

2014

# Подготовка к ЕГЭ по математике

Теория для решения задач В15



Дорогой друг! Если вы поняли теорию пределов, понятие производной, свойства производной для исследования графиков функций и её геометрический смысл, то задачи у вас ни какого затруднения не вызовут и ты решишь их с лёгкостью. Материал изложен именно так, чтобы любой учащийся, который эту тему пропустил или изучил её слабо смог без проблем решить подобные задачи. Для решения необязательно знать всю теорию производной и понимать её смысл, хотя лучше её понимать и знать, тогда никакая задача в этой теме в тупик вас не поставит.

Итак, необходимо знать в любом случае: таблицу производных и правила дифференцирования. Это базовые знания, в теме производной. В решениях представленных задач подробно расписывать нахождение производной не расписано, производные элементарных функций вы должны знать на отлично.

Правила дифференцирования:

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Если  $c$  — произвольная постоянная (число):

$$c' = 0$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

Производная сложной функции:

$$f'(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

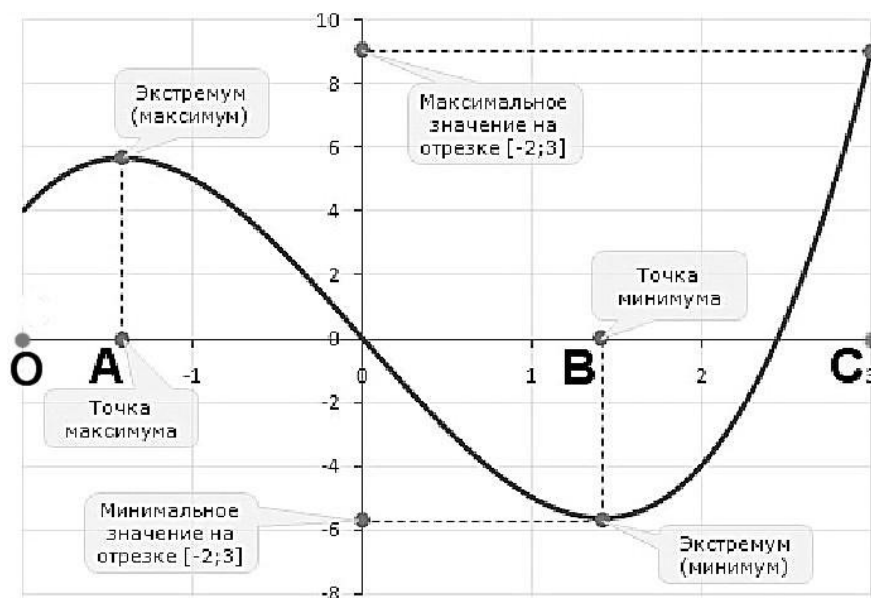
Вычисляя производную сложной функции  $f(g(x))$ , представьте, что  $g(x)$  переменная и считайте  $f'(g(x))$  по табличным формулам как обычную производную, затем полученный результат умножаем на производную функции  $g(x)$ . Слева функция, справа её производная.

Таблица производных

$f(x)$ (функция)	$f'(x)$ (производная)
$C$ (константа)	$0$
$x$	$1$
$x^2$	$2x$
$x^n$	$n \cdot x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$e^x$	$e^x$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

## Точки минимума, максимума. Свойства производной, которые используются для решения.

В задачах данной группы, требуется найти либо точку минимума (максимума), либо наибольшее (наименьшее) значение функции на интервале. Рассмотрим график функции:



Точка A — это точка максимума, на интервале от O до A функция возрастает, на интервале от A до B убывает.

Точка B — это точка минимума, на интервале от A до B функция убывает, на интервале от B до C возрастает.

В этих точках производная обращается в нуль (равна нулю).

Отметим, что производная на интервалах возрастания имеет положительный знак (то есть при подстановке значения из интервала в производную получается положительное число); на интервалах убывания имеет отрицательный знак (то есть при подстановке значения из интервала в производную получается отрицательное число).

## Задачи на нахождение точек максимума и минимума.

Алгоритм нахождения точек максимума (минимума) функции:

1. находим производную функции  $f'(x)$
2. находим нули производной (их ещё называют стационарными точками) путём приравнивания производной к нулю  $f'(x) = 0$ , решаем полученное уравнение
3. отмечаем полученные значения на числовой прямой и определяем знаки производной на этих интервалах, путём подстановки значений из интервалов в выражение производной
4. далее делаем вывод

Кроме того, на числовой прямой необходимо так же отмечать точки, в которых функция прерывается (это дробно-рациональные функции, где в знаменателе есть выражение с переменной, примеры 77468, 77469, 77472 и им подобные).

Вывод: если в точке производная меняет знак с положительного на отрицательное значение, то это точка максимума; если с отрицательного на положительное значение, то это точка минимума.

## Задачи на наибольшее и наименьшее значение функции на интервале.

В другом типе задач требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции на заданном интервале.

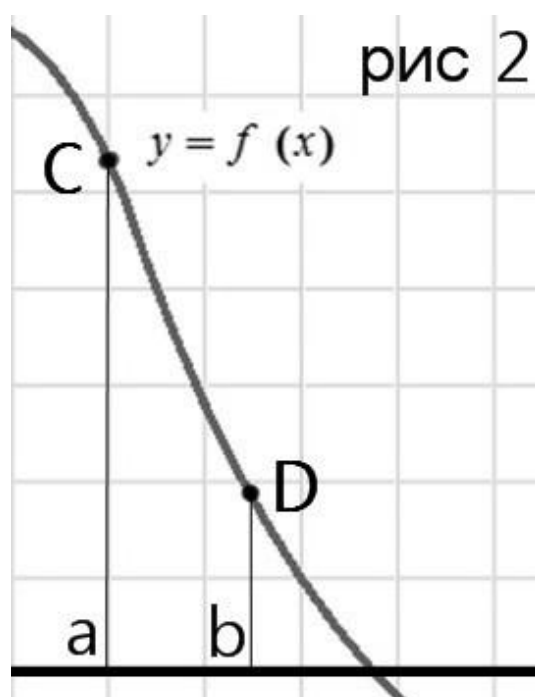
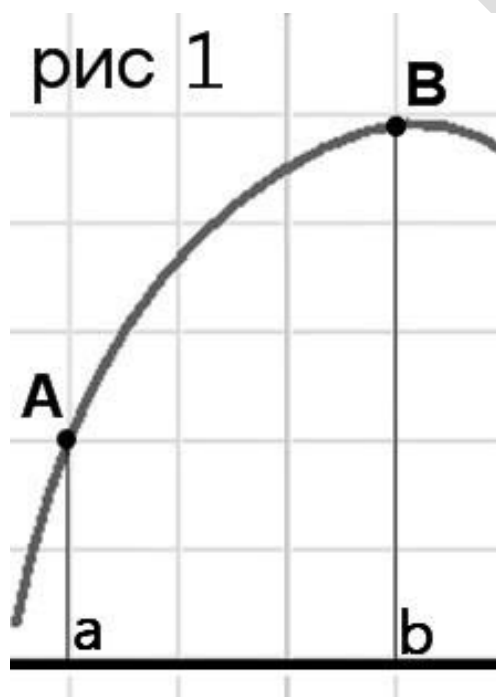
Алгоритм нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции:

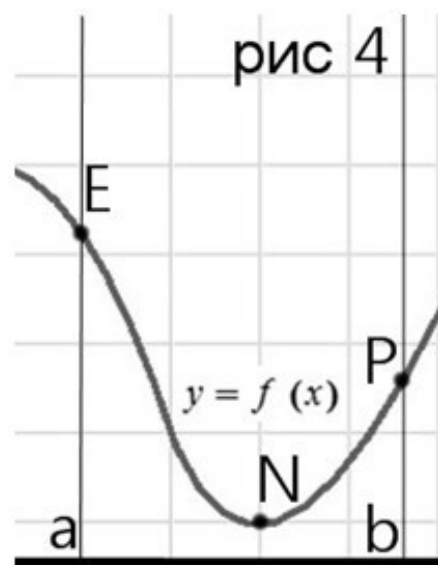
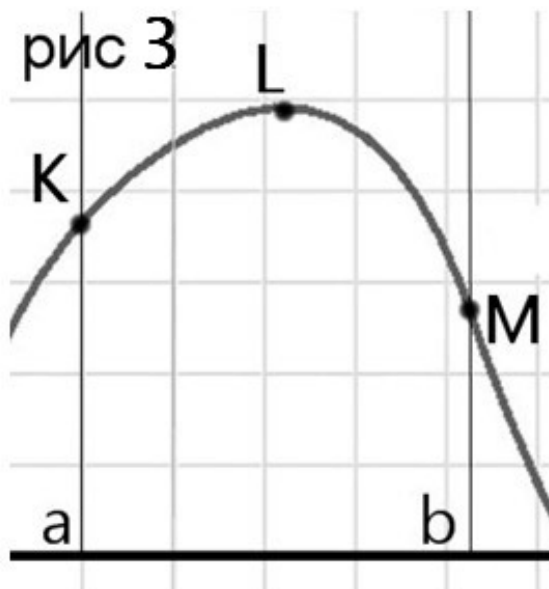
1. определяем, есть ли точки максимума (минимума): находим  $f'(x)$ , затем решаем  $f'(x) = 0$  (пункты 1 и 2 из предыдущего алгоритма)

2. определяем, принадлежат ли полученные точки заданному интервалу, записываем лежащие в пределах интервала.
3. подставляем в исходную функцию (не в производную, а в данную в условии) концы данного интервала и точки (максимума-минимума), лежащие в пределах интервала (п.2).
4. вычисляем значения функции.
5. выбираем из полученных наибольшее (наименьшее) значение, смотря какой вопрос поставлен в задаче, и записываем ответ.

Поставим вопрос: для чего в задачах на нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции необходимо искать точки максимума (минимума)?

Ответ лучше всего проиллюстрировать, посмотрите схематичное изображение графиков, задаваемых функцией:





В случаях 1 и 2 достаточно подставить границы интервала, чтобы определить наибольшее или наименьшее значение функции. В случаях 3 и 4 необходимо найти нули функции (точки максимума-минимума). Если мы подставим границы интервала (не находя нули функции), то получим неверный ответ, видно по графикам. И всё дело в том, что мы по заданной функции не можем увидеть как выглядит график на интервале (имеет ли он максимум или минимум в пределах интервала). Потому находите нули функции обязательно.

Если уравнение  $f'(x) = 0$  не будет иметь решения, это значит, что точек максимума-минимума нет (рисунок 1,2), и для нахождения поставленной задачи в данную функцию подставляем только границы интервала.

Ещё один важный момент. Помните, что ответом должно быть целое число или конечная десятичная дробь. При вычислении наибольшего и наименьшего значения функции вы будете получать выражения с числом  $e$  и  $\pi$ , а также выражения с корнем. Запомните, что до конца вам их вычислять не нужно, и так понятно, что результат таких выражений ответом являться не будет. Если возникнет желание вычислить такое значение, то считайте (напомним число  $e \approx 2,71 \dots$  число  $\pi = 3,14 \dots$ ).