И. К. Сиротина

МАТЕМАТИКА

ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЦЕНТРАЛИЗОВАННОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ И ЭКЗАМЕНУ

Минск
«ТетраСистемс»
2010

УДК 51(075.3/.4)
ББК 22.1я72
С40

А в т о р : преподаватель кафедры информационных технологий гуманитарного факультета Белорусского государственного университета *И. К. Сиротина*

Р е ц е н з е н т ы : профессор кафедры математического анализа Белорусского государственного педагогического университета им. М. Танка *Н. Т. Стельмашук*; декан факультета непрерывного образования Барановичского государственного университета *М. Н. Макута*

Сиротина, И. К.

С40 Математика : пособие для подготовки к централизованному тестированию и экзамену / И. К. Сиротина. – Минск : ТетраСистемс, 2010. – 400 с.

ISBN 978-985-470-984-0.

Пособие написано в соответствии с программой по математике за курс средней школы и программой для поступающих в высшие и средние специальные учебные заведения. Содержит теоретические сведения справочного характера, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения и контрольные тесты по всем темам школьного курса математики. Предназначено для систематизации знаний и формирования умений и навыков абитуриентов, а также ликвидации пробелов при подготовке к экзаменам и централизованному тестированию.

Книга адресована абитуриентам, слушателям подготовительных отделений вузов, учащимся старших классов, учителям математики.

УДК 51(075.3/.4)
ББК 22.1я72

Учебное издание

Сиротина Ирина Казимировна

МАТЕМАТИКА

Пособие для подготовки к централизованному тестированию и экзамену

Ответственный за выпуск *С. В. Процко*
Компьютерная верстка *О. И. Константиновой*

Подписано в печать 17.11.2009. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура Petersburg. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,3. Уч.-изд. л. 12. Тираж 2000 экз. Заказ 8699.

Научно-техническое общество с ограниченной ответственностью «ТетраСистемс». ЛИ № 02330/0494056 от 03.02.2009. Удостоверение о государственной гигиенической регистрации № 08-33-2.79451 от 14.10.2008. 220116, г. Минск, а/я 139 (тел.: 219-74-01; e-mail: rtsminsk@mail.ru; http://www.ts.by).

Унитарное полиграфическое предприятие «Витебская областная типография». Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, г. Витебск.

ISBN 978-985-470-984-0

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие является результатом обобщения многолетнего опыта работы автора по подготовке школьников к вступительным испытаниям в высшие и средние специальные учебные заведения, а также опыта подготовки абитуриентов к централизованному тестированию.

Цель пособия – ликвидация пробелов в знаниях и овладение выпускником школы системой математических знаний, которые необходимы как для успешного прохождения вступительных испытаний в высшие и средние специальные учебные заведения, так и для дальнейшего продолжения математического образования.

Педагогическая практика показывает, что попытка актуализации не приведенных ранее в систему знаний неизбежно требует их механического заучивания и ведет к кратковременному запоминанию. С этой целью в пособии изъят из системы «лишний» материал (тот учебный материал, который не влияет на образование связей в системе) и создана система оптимальных методов решений задач. Это позволило уменьшить объем материала, требующего механического запоминания, и установить связи между элементами учебного материала как в пределах одной темы (модуля), так и между всеми учебными модулями, и тем самым способствовать образованию устойчивых ассоциаций и повышению качества и скорости решения задач.

Книга содержит 23 учебных модуля (темы). Изучение всех модулей проводится по следующей схеме:

1. Теоретический блок содержит оперативные теоретические сведения: систему понятий, свойств, признаков, утверждений, правил, методов и алгоритмов решений ключевых задач. Контроль: тематический тест для проверки теоретических знаний.

2. Решение ключевых задач. Приведены примеры решений опорных задач. Рассмотрены оптимальные методы решений. Показаны приемы решений тестовых заданий.

3. Решение обучающих задач. Представлена система обучающих задач, в которой отражены все особенности задач данного класса. Приведены задачи репродуктивного, частично-поискового, поискового и исследовательского характера. Контроль: тематический тест для проверки практических умений и навыков.

Тематические тесты для проверки теоретических знаний содержат задания с выбором одного правильного ответа и с выбором нескольких правильных ответов, задания на соответствие и задания на построения алгоритмов. Тесты для проверки умений и навыков содержат только задания с выбором одного правильного ответа.

В соответствии с требованиями, предъявляемыми к знаниям, умениям и навыкам школьников и абитуриентов, в пособии большое внимание уделено рассмотрению основных вопросов теории и практики решения задач. В этой связи в каждом разделе приведены примеры решения ключевых задач и предложена система обучающих задач. Пособие содержит 1674 задачи, в том числе к 246 задачам приведены подробные решения. Для закрепления теоретических знаний и выработки умений и навыков предлагаются задания для самостоятельной работы. К упражнениям, предложенным для самостоятельного решения, даны ответы. Для решения предложенных задач, как правило, достаточно теоретических сведений, приведенных в начале каждого раздела пособия.

Система задач пособия не дублирует задачи школьных учебников математики и содержит задания различной степени трудности, большая часть которых относится к задачам повышенной сложности. Поскольку в книге приведены не только оптимальные методы решений задач репродуктивного и частично-поискового характера, но и уделено достаточно много внимания решению задач поискового, творческого и исследовательского характера, то, освоив учебный материал данного пособия, обучаемый в состоянии успешно выполнить все задания централизованного тестирования и получить при этом от 70 до 100 баллов.

Книга содержит следующий материал по арифметике и алгебре: признаки делимости натуральных чисел, пропорции и проценты, модули, степени и корни, логарифмы, многочлены, прогрессии. Показаны приемы арифметических вычислений и преобразований алгебраических выражений; приведены алгоритмы решений уравнений и неравенств; предложены методы решений текстовых задач и методы исследования математических задач. Рассмотрены графики элементарных функций, способы преобразований графиков функций и функциональные методы решений уравнений и неравенств. Включены основные формулы тригонометрии и показаны методы преобразований и вычислений тригонометрических выражений, а также методы решений тригонометрических уравнений. Приведены основные правила дифференцирования, таблица производных элементарных и сложных функций, алгоритмы исследования функций с помощью производной. Геометрический материал содержит свойства многоугольников и окружностей, вычисление площадей фигур, площадей поверхностей и объемов пространственных тел, комбинации многогранников и тел вращения. В пособие включен материал по теме «Векторы».

Пособие может быть использовано абитуриентами и школьниками при самостоятельной подготовке к экзамену за курс средней школы и централизованному тестированию, а также учителями математики при организации факультативных занятий со школьниками старших классов в учреждениях образования, обеспечивающих получение среднего образования, и при организации занятий на курсах по математике на подготовительных отделениях высших и средних специальных учебных заведений.

1 АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

1.1. Числовые множества

К числовым множествам относят:

а) множество ***натуральных чисел*** $\mathbf{N}$, состоящее из чисел, которые применяются при счете предметов: $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; ...\}$;

б) множество ***целых чисел*** $\mathbf{Z}$, состоящее из натуральных чисел, противоположных им чисел и числа 0: $m \in \{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$;

в) множество ***рациональных чисел*** $\mathbf{Q}$, состоящее из чисел вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$;

г) множество ***иррациональных чисел*** $\mathbf{I}$, состоящее из бесконечных непериодических десятичных дробей;

д) множество ***действительных чисел*** $\mathbf{R}$, состоящее из рациональных и иррациональных чисел.

Заметим, что любое действительное число можно записать в виде десятичной дроби:

а) конечной: например, $5 = 5{,}0$, $3\frac{2}{5} = 3{,}4$;

б) бесконечной периодической: например, $\frac{1}{3} = 0{,}(3)$, $\frac{15}{7} = 2{,}(142857)$;

в) бесконечной непериодической: например, $\pi = 3{,}14159...$, $\sqrt{2} = 1{,}1442135...$

В некоторых случаях необходимо выполнить округление десятичной дроби. При ***округлении десятичных дробей*** до какого-нибудь разряда поступают следующим образом:

1) все цифры, следующие за этим разрядом, заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то отбрасывают;

2) последнюю оставшуюся цифру не изменяют, если первая следующая за ней цифра 0, 1, 2, 3, 4, или последнюю цифру увеличивают на единицу, если первая следующая за этим разрядом цифра 5, 6, 7, 8 или 9. Если отбрасываемая цифра стояла до запятой, то на ее месте пишут нуль.

Например, округлим число 367,5243:

а) до сотен: $367{,}5243 \approx 400$;

б) до единиц: $367{,}5243 \approx 368$;

в) до сотых: $367{,}5243 \approx 367{,}52$.

1.2. Делимость натуральных чисел

Если одно из натуральных чисел делится на другое без остатка, то первое число называют *кратным* второго, а второе – *делителем* первого.

Признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 25.

1. Число делится на 2, если его запись заканчивается четной цифрой: 0, 2, 4, 6, 8.

2. Число делится на 3, если сумма цифр числа делится на 3.

3. Число делится на 4, если две последние цифры его записи образуют число, которое делится на 4.

4. Число делится на 5, если его запись заканчивается цифрой 0 или цифрой 5.

5. Число делится на 8, если три последние цифры его записи образуют число, которое делится на 8.

6. Число делится на 9, если сумма цифр числа делится на 9.

7. Число делится на 10, если его запись заканчивается цифрой 0.

8. Число делится на 11, если разность сумм цифр, стоящих на четных и нечетных местах, делится на 11.

9. Число делится на 25, если две последние цифры его записи образуют число, которое делится на 25.

Например, число 225432 делится на 2, 3, 4, 8 и 9, а число 34875 делится на 3, 9, 5 и 25.

Деление одного натурального числа на другое не всегда выполнимо. В этом случае имеет место деление с остатком.

Разделить натуральное число n на натуральное число m с остатком – значит представить число n в виде $n = cm + r$, где c – неполное частное, а r – остаток от деления n на m.

Например, $17:3=5+\frac{2}{3}$ или $17=5\cdot3+2$.

1.3. Простые и составные числа

Рассмотрим множество натуральных чисел, исключив из него число 1, которое не является ни простым, ни составным. В этом случае все оставшиеся числа разделятся на простые и составные.

Числа, которые можно представить в виде произведения двух и более множителей, будем называть составными.

Например, числа 4, 6 и 8 – составные, так как $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$.

Числа, которые не имеют разложения на множители, являются простыми.

Например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... – простые.

Натуральные числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, за исключением числа 1.

Например, числа 15 и 8 взаимно простые.

Всякое составное число можно единственным образом представить в виде произведения простых множителей.

1.4. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Общим делителем нескольких чисел называют число, служащее делителем для каждого из них. Среди всех общих делителей всегда имеется наибольший. Это число называется наибольшим общим делителем (НОД). Чтобы найти НОД нескольких чисел, необходимо разложить их на простые множители и найти произведение только тех множителей, которые имеются в разложениях каждого из чисел.

Например, числа 2, 3 и 6 являются общими делителями чисел 6 и 30, а НОД(6; 30) = 6.

Общим кратным нескольких чисел называют число, служащее кратным для каждого из них. Среди всех общих кратных всегда есть наименьшее. Это число называется наименьшим общим кратным (НОК). Чтобы найти НОК нескольких чисел, необходимо разложить их на простые множители, найти произведение всех множителей, входящих в разложение одного из чисел и недостающих множителей из разложений оставшихся чисел.

Например, числа 30, 60, 90 и 120 кратны числам 6 и 30, а НОК(6; 30) = 30.

1.5. Пропорции, проценты

Частное от деления одного числа на другое называют их отношением. Два равных отношения образуют *пропорцию*:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

где a и d – крайние, b и c – средние члены пропорции.

Основное свойство пропорции: произведение средних членов пропорции равно произведению ее крайних членов:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow bc=ad\ .$$

Две взаимно зависимые величины *пропорциональны*, если отношение их значений остается неизменным. Неизменное отношение пропорциональных величин называют *коэффициентом пропорциональности* и обозначают k.

Например, $\frac{125}{25}=\frac{300}{60}=5=k$.

Процентом числа a называют одну сотую часть этого числа: 1 % от числа a равен $0{,}01a$.

С понятием процента связаны три типа задач.

1. Нахождение *процентов от данного числа*:
p % от числа a равны $\frac{a}{100}\cdot p$.

2. Нахождение *числа по данной величине его процентов*:
если p % числа равны a, то это число равно $\frac{a}{p}\cdot 100$.

3. Нахождение *процентного отношения чисел*:
процентное отношение чисел a и b равно $\frac{a}{b}\cdot 100$ %.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все варианты правильных ответов (1–16):

1. Множество целых чисел:
1) состоит из натуральных чисел и чисел, им противоположных;
2) состоит из натуральных чисел, противоположных им чисел и числа нуль;
3) состоит из чисел, которые применяются при счете предметов;
4) является подмножеством рациональных чисел;
5) включает множество натуральных чисел.

2. Множество рациональных чисел:
1) является подмножеством иррациональных чисел;
2) является подмножеством действительных чисел;
3) включает множество целых чисел;
4) состоит их периодических десятичных дробей;
5) содержит множество натуральных чисел.

3. Множество действительных чисел:
1) является подмножеством иррациональных чисел;
2) включает рациональные и иррациональные числа;
3) состоит из натуральных и иррациональных чисел;
4) состоит из бесконечных непериодических и периодических десятичных дробей;
5) состоит из периодических десятичных дробей.

4. Делителями чисел 30 и 24 являются числа:

1) 2, 3 и 5; 2) 2, 9 и 5;
3) 2 и 3; 4) 3.

5. Кратны числам 30 и 24 числа:

1) 720; 2) 60;
3) 1440; 4) 72.

6. НОД чисел 30 и 24 равен:

1) 2; 2) 1;
3) 2 и 6; 4) 6.

7. НОК чисел 30 и 24 равно:

1) 240; 2) 720;
3) 480; 4) 14400.

8. Простые числа, которые являются делителями числа 34:

1) 1; 2) 2;
3) 17; 4) 34.

9. Составные числа, которые кратны числу 17:

1) 17; 2) 34;
3) 68; 4) 170.

10. Число кратно числам 2, 4 и 8, если:

1) его запись заканчивается четной цифрой;
2) две последние цифры его записи образуют число, которое делится на 4;
3) три последние цифры его записи образуют число, которое делится на 8;
4) его запись заканчивается цифрой 8.

11. Число кратно числам 5, 10 и 25, если:

1) его запись заканчивается цифрой 0 или 5;
2) две последние цифры его записи образуют число, которое делится на 25;
3) две последние цифры его записи образуют число 50;
4) две последние цифры его записи образуют четное число, которое делится на 25.

12. Число кратно числам 2, 3 и 9, если:

1) сумма цифр числа делится на 3;
2) сумма цифр числа делится на 9;
3) сумма цифр числа делится на 3 и запись числа заканчивается четной цифрой;
4) сумма цифр числа делится на 9 и запись числа заканчивается четной цифрой.

13. Число делится без остатка на 22, если:

1) разность сумм цифр, стоящих на четных и нечетных местах делится на 11;
2) разность сумм цифр, стоящих на четных и нечетных местах делится на 11, и запись числа заканчивается четной цифрой;
3) число делится и на 2 и на 11;
4) число делится на 44.

14. Если при делении натурального числа m на натуральное число k получили неполное частное p и остаток c, то:

1) $n = mp + c$;
2) $m = pk + c$;
3) $\frac{m}{k} = p + \frac{c}{k}$;
4) $m = pk - c$.

15. Пропорцией называют:

1) отношение пропорциональных величин;
2) $\frac{m}{n} = \frac{p}{k}$;
3) равенство двух чисел;
4) равенство двух отношений.

16. Процентом числа a называют:

1) сотую часть числа a;
2) $100a$;
3) $0{,}01a$;
4) $1{,}01a$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Номер правильного ответа	2, 4, 5	2, 3, 5	2, 4	3, 4	1, 3	4	1	2, 3
Номер задания	9	10	11	12	13	14	15	16
Номер правильного ответа	2, 3, 4	3	3, 4	4	2, 3, 4	2, 3	2, 4	1, 3

Примеры

Пример 1. Вычислите $\dfrac{(6{,}35-5{,}7):6{,}5+9{,}9}{\left(1{,}2:36+1{,}2:0{,}25-1\frac{5}{16}\right):7\frac{1}{24}}$.

Решение. Выполним последовательно действия с десятичными и обыкновенными дробями.

Найдем значение выражения, стоящего в числителе дроби:

1) $6{,}35-5{,}7=0{,}65$;

2) $0{,}65:6{,}5=\frac{65}{100}:\frac{65}{10}=\frac{65}{100}\cdot\frac{10}{65}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}=0{,}1$;

3) $0{,}1+9{,}9=10$.

Найдем значение выражения, стоящего в знаменателе дроби:

4) $1{,}2:36=\frac{12}{10}:36=\frac{12}{10}\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{10\cdot 3}=\frac{1}{30}$;

5) $1{,}2:0{,}25=\frac{12}{10}:\frac{25}{100}=\frac{12\cdot 100}{10\cdot 25}=\frac{6\cdot 4}{5\cdot 1}=\frac{24}{5}$;

6) $\frac{1}{30}+\frac{24}{5}=\frac{1+24\cdot 6}{30}=\frac{145}{30}=\frac{29}{6}$;

7) $\frac{29}{6}-1\frac{5}{16}=1\frac{23}{6}-1\frac{5}{16}=\frac{23}{2\cdot 3}-\frac{5}{2\cdot 8}=\frac{23\cdot 8-5\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 8}=\frac{184-15}{2\cdot 3\cdot 8}=\frac{169}{48}$;

8) $\frac{169}{48}:\frac{169}{24}=\frac{169\cdot 24}{48\cdot 169}=\frac{1}{2}$.

Разделим числитель дроби на ее знаменатель:

9) $10:\frac{1}{2}=10\cdot 2=20$.

Ответ: 20.

Пример 2. Вычислите $\frac{2^{-2}+4{,}755^{0}}{0{,}5^{-2}-5\cdot(-2)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}+10{,}75$.

Решение. Применим последовательно свойства степеней 2.8 и 2.1 (см. п. 2.3) и получим:

$$\frac{\frac{1}{2^{2}}+1}{\left(\frac{10}{5}\right)^{2}-5\cdot\frac{1}{(-2)^{2}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2}}+10\frac{3}{4}=\frac{\frac{1}{4}+1}{4-\frac{5}{4}+\frac{9}{4}}+10\frac{3}{4}=$$

$$=\frac{\frac{5}{4}}{4+1}+10\frac{3}{4}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{5}+10\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+10\frac{3}{4}=10\frac{4}{4}=11.$$

Ответ: 11.

Пример 3. Найдите X из пропорции

$$\frac{\left(4-3{,}5\cdot\left(52\frac{1}{7}-51\frac{1}{5}\right)\right)\cdot 0{,}16^{-1}}{X}=\frac{3\frac{2}{7}-\frac{3}{14}:\frac{1}{6}}{141\frac{46}{168}-140\frac{49}{60}}.$$

Решение. Найдем значение выражения, стоящего в числителе первой дроби:

1) $52\frac{1}{7}-51\frac{1}{5}=1\frac{1}{7}-\frac{1}{5}=\frac{8}{7}-\frac{1}{5}=\frac{8\cdot 5-1\cdot 7}{7\cdot 5}=\frac{33}{35}$;

2) $\frac{35}{10}\cdot\frac{33}{35}=\frac{33}{10}=3{,}3$;

3) $4-3{,}3=0{,}7$;

4) $\frac{7}{10}\cdot\left(\frac{16}{100}\right)^{-1}=\frac{7\cdot 100}{10\cdot 16}=\frac{7\cdot 10}{1\cdot 16}=\frac{7\cdot 5}{8}=\frac{35}{8}$.

Найдем значение выражения, стоящего в числителе второй дроби:

5) $\frac{3}{14}:\frac{1}{6}=\frac{3\cdot 6}{14}=\frac{3\cdot 3}{7}=\frac{9}{7}$;

6) $3\frac{2}{7}-1\frac{2}{7}=2\frac{2}{7}-\frac{2}{7}=2$.

Найдем значение выражения, стоящего в знаменателе второй дроби:

7) $141\frac{46}{168}-140\frac{49}{60}=1\frac{23}{84}-\frac{49}{60}=\frac{107}{12\cdot 7}-\frac{49}{12\cdot 5}=$

$=\frac{107\cdot 5-49\cdot 7}{12\cdot 7\cdot 5}=\frac{535-343}{12\cdot 7\cdot 5}=\frac{192}{12\cdot 7\cdot 5}=\frac{16}{1\cdot 7\cdot 5}=\frac{16}{35}$.

Запишем пропорцию $\frac{\frac{35}{8}}{X}=\frac{2}{\frac{16}{35}}$. Применив основное свойство пропорции, получим: $2X=\frac{35}{8}\cdot\frac{16}{35}$, $2X=2$, $X=1$.

Ответ: 1.

Пример 4. Вычислите наиболее рациональным способом:

$$\left(\frac{\sqrt{561^2-459^2}}{4\frac{2}{7}\cdot 0{,}15+4\frac{2}{7}:\frac{20}{3}}-2\sqrt{40}\right):\frac{1}{31}\sqrt{40}.$$

Решение. Применим формулу разности квадратов и выполним действия с обыкновенными дробями и арифметическими корнями:

$$\left(\frac{\sqrt{(561-459)(561+459)}}{\frac{30}{7}\cdot\frac{15}{100}+\frac{30}{7}\cdot\frac{3}{20}}-4\sqrt{10}\right)\cdot 62\sqrt{10}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{102\cdot 1020}}{\frac{30}{7}\cdot\frac{3}{20}+\frac{30}{7}\cdot\frac{3}{20}}-4\sqrt{10}\right)\cdot 62\sqrt{10}=\left(\frac{\sqrt{102^2\cdot 10}}{\frac{2\cdot 30\cdot 3}{7\cdot 20}}-4\sqrt{10}\right)\cdot 62\sqrt{10}=$$

$$=\left(\frac{102\cdot\sqrt{10}}{\frac{9}{7}}-4\sqrt{10}\right)\cdot 62\sqrt{10}=\left(\frac{102\cdot\sqrt{10}\cdot 7}{9}-4\sqrt{10}\right)\cdot 62\sqrt{10}=$$

$$=\frac{34\cdot\sqrt{10}\cdot 7\cdot 62\sqrt{10}}{3}-4\sqrt{10}\cdot 62\sqrt{10}=\frac{40\cdot 17\cdot 7\cdot 31}{3}-40\cdot 62=$$

$$=40\cdot 31\left(\frac{17\cdot 7}{3}-2\right)=\frac{40\cdot 31\cdot 113}{3}=46706\frac{2}{3}.$$

Ответ: $46706\frac{2}{3}$.

Пример 5. Замените периодическую десятичную дробь 1,(3) обыкновенной.

Решение. Полагая $1,(3)=x$ и умножая обе части этого равенства на 10, запишем $1,(3)\cdot 10=10x$, $13,(3)=10x$. Вычитая из последнего равенства первое, получим $\begin{array}{r} -\begin{array}{r}13,(3)=10x\\ 1,(3)=\ \ x\end{array}\\ \hline 12=\ 9x\end{array}$, $x=\frac{4}{3}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Пример 6. Найдите НОД (наибольший общий делитель) и НОК (наименьшее общее кратное) чисел 148 и 426.

Решение. Разложим числа 148 и 426 на простые множители: $148=2\cdot 2\cdot 37$, $426=2\cdot 3\cdot 71$.

Чтобы найти НОД чисел 148 и 426, выпишем множители, входящие в разложение обоих чисел: НОД (148; 426) = 2.

Чтобы найти НОК чисел 148 и 426, выпишем все множители, входящие в разложение первого числа, и только те множители из разложения второго числа, которые не встречались в записи первого: НОК (148; 426) = (2 ·2 ·37) ·(3 ·71) = 148 · 213 = 31 524.

Ответ: НОД (148; 426) = 2; НОК (148; 426) = 31 524.

Пример 7. При делении пятизначного числа $\overline{45n2m}$ на 5 в остатке получается 3. Найдите это число, если известно, что оно делится на 36.

Решение. Согласно условию задачи число $\overline{45n2m}$ делится на 36, следовательно, оно делится и на 4 и на 9.

Если искомое число делится на 4, то число $\overline{2m}$ делится на 4. Тогда m может принимать одно из значений: или 0, или 4, или 8. Поскольку при делении числа $\overline{45n2m}$ на 5 в остатке получается 3, то $m=8$.

Если же число $\overline{45n2m}$ делится на 9, то сумма цифр этого числа делится на 9, то есть $4+5+n+2+8=(19+n):9$. Тогда при условии, что $n=8$ число будет делиться на 9.

Запишем искомое число: $\overline{45n2m}=45\,828$.

Ответ: $45\,828$.

Пример 8. Укажите все номера рациональных чисел данного множества:

а) $\sqrt[3]{32\sqrt[4]{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{10+4\sqrt{6}}-2$;

в) $(\sqrt{2}-1)^2$; г) $\sin^0 1°$;

д) $\dfrac{12}{\sqrt{3}+3}+2\sqrt{3}$.

Варианты ответов: 1) а, б, д; 2) а, г, д; 3) б, в, д; 4) б, в, г; 5) а, в, г.

Решение. Применим метод исключений, выполняя следующие преобразования.

1. Преобразуем любое число данного множества, например число (д):

$$\frac{12}{\sqrt{3}+3}+2\sqrt{3}=\frac{12(3-\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+3)(3-\sqrt{3})}+2\sqrt{3}=\frac{12\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}+2\sqrt{3}=$$

$$=2\left(3-\sqrt{3}\right)+2\sqrt{3}=6-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=6.$$

Число (д) рациональное, значит, исключим варианты ответов, не содержащие этого числа, то есть варианты 4) и 5).

2. Преобразуем число (в): $(\sqrt{2}-1)^2=2-2\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}$. Число (в) иррациональное, значит, исключим вариант ответа 3).

3. Преобразуем любое из чисел (б) или (г), так как число (а) входит в оба оставшихся варианта ответа: $\sin^0 1°=1$. Число (г) – рациональное.

Ответ: 2.

Пример 9. Найдите все целые значения k, при которых дробь $-\dfrac{30k^2+5k+240}{5-15k}$ является целым числом.

Решение. Упростим дробь

$$-\frac{30k^2+5k+240}{5-15k}=-\frac{5\left(6k^2+k+48\right)}{-5(3k-1)}=\frac{6k^2+k+48}{3k-1}.$$

Разделим числитель дроби на ее знаменатель (см. п. 2.2):

$$\begin{array}{r|l} -\,6k^2+k+48 & 3k-1 \\ \cline{2-2} \underline{6k^2-2k} & 2k+1 \\ -\,3k+48 & \\ \underline{3k-1} & \\ 49 & \end{array}$$

Запишем результат деления: $\dfrac{6k^2+k+48}{3k-1}=2k+1+\dfrac{49}{3k-1}$. Очевидно, что дробь $\dfrac{6k^2+k+48}{3k-1}$ будет целым числом, если 49 разделится без остатка на $3k-1$, то есть если число $3k-1$ будет делителем числа 49.

Запишем делители числа 49: ±1; ±7; ±49. Решим уравнения:

1) $3k-1=1,\ k=\dfrac{2}{3}$; 2) $3k-1=-1,\ k=0$;

3) $3k-1=7,\ k=\dfrac{8}{3}$; 4) $3k-1=-7,\ k=-2$;

5) $3k-1=49,\ k=\dfrac{50}{3}$; 6) $3k-1=-49,\ k=-16$.

Поскольку согласно условию задачи k – целое число, то $k_1=0$, $k_2=-2$ и $k_3=-16$.

Ответ: $\{-16;\ -2;\ 0\}$.

Пример 10. Найдите сумму всех чисел m, каждое из которых делится без остатка на 18 и принадлежит промежутку $[-252;\ 299)$.

Решение. Рассмотрим отрезок $[-252;\ 252]$ и интервал $(252;\ 299)$ (рис. 1.1).

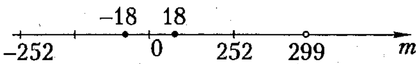


Рис. 1.1

1. Рассмотрим отрезок $[-252; 252]$. Сумма всех чисел, каждое из которых делится без остатка на 18 и принадлежит этому отрезку, будет равна нулю ($-18+18=0$, $-36+36=0$ и т. д.).

2. Рассмотрим интервал $(252; 299)$. Зная, что число 252 делится на 18 (так как оно делится и на 2 и на 9), но не принадлежит рассматриваемому интервалу, найдем все числа, кратные 18 и не превосходящие число 299.

Получим: $m_1 = 252+18 = 270$, $m_2 = 270+18 = 288$.

Тогда $m_1 + m_2 = 270+288 = 558$.

Ответ: 558.

Пример 11. Число $a=15$ и составляет 3 % от числа b. Число c составляет 40 % от числа b. Во сколько раз процентное отношение чисел a и c больше процентного отношения чисел a и b?

Решение. 1. Поскольку число 15 составляет 3 % от числа b, то:

$$b = \frac{15}{3} \cdot 100 = 50.$$

2. Поскольку число c составляет 40 % от числа 50, то:

$$c = \frac{50}{100} \cdot 40 = 20.$$

3. Найдем процентное отношение числа a к числу c:

$$\frac{15}{20} \cdot 100\ \% = 75\ \%.$$

4. Найдем процентное отношение числа a к числу b:

$$\frac{15}{50} \cdot 100\ \% = 30\ \%.$$

5. Найдем во сколько раз процентное отношение чисел a и c больше процентного отношения чисел a и b: 75 : 30 = 2,5.

Ответ: в 2,5 раза.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите (1–12):

1. $$\frac{3,(3) \cdot 1,9 + 19,5 : 4\frac{1}{2}}{0,82(6) - 0,16} : \frac{3,5 + 4\frac{2}{3} + 2\frac{2}{15}}{0,5 \cdot \left(1\frac{1}{20} + 4,1\right)}.$$

2. $$\frac{\left(3^{-1} - \sqrt{1\frac{7}{9}}\right)^{-2} : 2^{-2}}{\frac{37}{300} : 0,0925} + 12,5 \cdot 1,25^{-2}.$$

3. $$\frac{\left(0{,}625+2\frac{17}{24}\right):2{,}5}{\left(1{,}3+\frac{23}{30}+\frac{4}{11}\right)\cdot\frac{110}{401}}:2.$$

4. $$\frac{((17-16{,}35):6{,}5+9{,}9)\cdot\frac{1}{12{,}8}}{\left(1{,}2:36+1\frac{1}{5}:0{,}25-1{,}8(3)\right)\cdot1\frac{1}{4}}:0{,}125.$$

5. $$\frac{\left(12\frac{38}{45}-10\frac{1}{15}\right):13\frac{8}{9}+3\frac{3}{65}\cdot\frac{26}{99}}{\left(58\frac{1}{2}-53\frac{7}{9}\right)\cdot\frac{1}{85}}\cdot0{,}5.$$

6. $$\frac{3{,}75:1\frac{1}{2}+\left(1{,}5:3\frac{3}{4}\right)\cdot2\frac{1}{2}+\left(1\frac{1}{7}-\frac{23}{49}\right):\frac{22}{147}}{2:3\frac{1}{5}+\left(3\frac{1}{4}:13\right):0{,}(6)-\left(2\frac{5}{18}-\frac{17}{36}\right)\cdot\frac{18}{65}}.$$

7. $$\frac{\left(\left(4{,}625-\frac{13}{18}\cdot\frac{9}{26}\right):\frac{9}{4}+2{,}5:1{,}25:6{,}75\right):1\frac{53}{68}}{\left(3\frac{1}{2}-3{,}375\right):0{,}125+\left(\frac{15}{18}-\frac{14}{24}\right):(0{,}358-1{,}4796:13{,}7)}.$$

8. $$\frac{\left(\left(5\frac{7}{12}-4\frac{11}{18}+2\frac{1}{24}\right)\cdot1\frac{5}{31}-\frac{3}{52}\cdot\left(3\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\right)\right)\cdot1\frac{7}{13}}{\frac{19}{84}:\left(15\frac{13}{42}-12\frac{13}{28}+\frac{5}{24}\right)+1\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}.$$

9. $$\left(\frac{(2{,}2-0{,}7):0{,}003}{\left(\frac{29}{35}-\frac{3}{7}\right)\cdot4:0{,}2}-\frac{\left(1\frac{13}{20}-1{,}5\right):\frac{2}{3}}{\left(2{,}44+1\frac{14}{25}\right):8}\right):62\frac{1}{20}+1{,}364:0{,}124.$$

10. $$5\frac{4}{7}:\left(8{,}4:\frac{7}{6}\cdot\left(6-\frac{(2{,}3+5:6{,}25)\cdot7}{8\cdot0{,}0125+6{,}9}\right)-\frac{203{,}84}{13}\right).$$

11. $$\frac{(0{,}6)^0-(0{,}1)^{-1}}{\left(3:2^3\right)^{-1}\cdot(1{,}5)^3+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}\cdot0{,}(6).$$

12. $$\frac{\sqrt{66{,}3\cdot33{,}7}\left(\sqrt{\frac{66{,}3}{33{,}7}}-\sqrt{\frac{33{,}7}{66{,}3}}\right)}{\sqrt{(66{,}3+33{,}7)^2-4\cdot66{,}3\cdot33{,}7}}.$$

Решите пропорции (13–16):

13. $\frac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6{,}16:15{,}4+0{,}8}=\frac{0{,}016:0{,}12+0{,}7}{x}$.

14. $\frac{\frac{y}{8}}{\left(\frac{57}{72}-\frac{42}{80}\right)\cdot 8\frac{14}{32}}=\frac{\left(2\frac{28}{63}-1\frac{17}{21}\right)\cdot 0{,}7}{0{,}675\cdot 2{,}4-0{,}02}$.

15. $\frac{\frac{z}{3}}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\frac{3\cdot\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}$.

16. $\frac{15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51:14{,}7}{x}=\frac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1{,}2}{3{,}2+0{,}8\left(25\frac{1}{2}-23{,}25\right)}$.

17. Найдите наибольший общий делитель чисел 126, 540 и 630.

18. Найдите наименьшее общее кратное чисел 270, 300 и 315.

19. Найдите наибольшее трехзначное число, которое делится без остатка на 12.

20. Найдите наибольшее целое число, которое при делении на 16 с остатком дает частное, равное 9.

21. Найдите наибольший из остатков при делении числа 713854012 на каждое из чисел: 2, 3, 4, 5, 9, 10.

22. При делении пятизначного числа $\overline{3n19m}$ на 5 в остатке получается 2. Найдите наибольшую возможную сумму цифр m и n, если известно, что исходное число делится на 12.

23. Найдите сумму простых чисел, принадлежащих промежутку $[0;\,19)$.

24. Укажите все номера рациональных чисел данного множества: а) $1{,}0(3)$; б) $1{,}(6)-12{,}(6)$; в) $125^{\frac{3}{4}}$; г) $\sqrt{8+6\sqrt{13}}-\sqrt{15}$; д) $\frac{1}{\sqrt{3^{-1}}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Варианты ответов: 1) а, б, д; 2) б, г, д; 3) а, б, в; 4) в, г, д; 5) а, г, д.

25. Укажите натуральное число n, при котором дробь $\frac{n^2+3n-3}{n+2}$ является целым числом.

26. Найдите сумму всех нечетных чисел k, каждое из которых делится без остатка на 7 и принадлежит отрезку $[-110;\,160]$.

27. Найдите 182 % числа a, если число 26,25 составляет 175 % числа a.

28. Известно, что $a=1050$, $b=1500$ и $c=1820$. На сколько процентов число c больше числа a и на сколько процентов число c больше числа b? (Вычислите с точностью до 0,1 %.).

Ответы: **1.** 4. **2.** 11. **3.** 1. **4.** $\frac{5}{3}$. **5.** 9. **6.** 16. **7.** $\frac{17}{27}$. **8.** 5. **9.** 12. **10.** $\frac{15}{14}$. **11.** –1. **12.** 1. **13.** $\frac{1}{3}$. **14.** 5. **15.** 5. **16.** 25. **17.** 18. **18.** 18 900. **19.** 996. **20.** 159. **21.** 4. **22.** 11. **23.** 58. **24.** 1. **25.** 3. **26.** 399. **27.** 27,3. **28.** На 73,3 %; на 21,3 %.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Результатом округления числа 1,20499 с точностью до сотых является число	1) 1,20; 2) 1,21; 3) 0,22; 4) 1,204; 5) 1,205.
2	Результат вычисления выражения $4{,}3\cdot(-5{,}5)-(-2{,}3)\cdot(-4{,}3)-2{,}2\cdot4{,}3$ равен	1) –24,94; 2) –6,02; 3) –43; 4) –24,08; 5) –0,43.
3	Результат вычисления выражения $3{,}2^2+3{,}2\cdot0{,}2+0{,}1^2-2{,}3^2$ равен	1) 5,6; 2) 10,6; 3) 1; 4) 0,64; 5) 3,3.
4	Результат вычисления выражения $\left(-4{,}2^2+4{,}2\cdot0{,}7\right):4{,}2+4{,}1(3)$ равен	1) $-\frac{19}{30}$; 2) $\frac{19}{30}$; 3) 21; 4) $\frac{19}{3}$; 5) 0,19.
5	Если $\dfrac{\frac{11}{7}:12{,}5}{2\frac{1}{7}-1{,}2}=\dfrac{10}{36\cdot(x-4{,}(6))}$, то значение x равно	1) $8\frac{5}{6}$; 2) $\frac{27}{4}$; 3) $\frac{13}{44}$; 4) $\frac{19}{4}$; 5) $\frac{2}{3}$.
6	Укажите число натуральных делителей числа $3^3\cdot5^2$	1) 12; 2) 5; 3) 6; 4) 11; 5) 21.

№	Задания	Варианты ответов
7	Если разность двух натуральных чисел равна 66, а НОК равно 360, то сумма этих чисел равна	1) 294; 2) 422; 3)110; 4)396; 5) 114.
8	Количество натуральных чисел *n*, при которых дробь $\frac{n^2+2n-\backslash 2}{п+6}$ s натуральное число, равно	1)2; 2)3; 3)4; 4)1; 5) 5.
9	Если число 1234n67m делится без остатка на 6, то наибольшая сумма цифр *тип* равна	1) 14; 2) 15; 3) 16; 4) 17; 5) 18.
10	Сумма $1^3+2^3+\ldots+59^3$ делится на число	1)120; 2)48; 3) 16; 4) 60; 5) 61.
11	Если число *а* при делении на 8 дает остаток 6, то остаток от деления числа а на 4 равен	1)0; 2)1; 3) 2; 4) 3; 5)5.
12	Если сумма квадратов двух целых простых чисел равна 13, а разность их квадратов - простое число, то модуль разности этих чисел равен	1)11; 2)6; 3) 3; 4) 13; 5) 1.
13	Найдите число, половина которого равна (4 6 + ^ : 1|) : 4,6-1,75	1)1,75; 2)3,5; 3) 7; 4) 17,5; 5) 35.
14	Процентное отношение модулей чисел 19и $\|2,4^2-2\|-1,9):2,4-2\|$ равно	1) 1000; 2)110; 3) 10; 4) 90; 5) 1100.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер правильного ответа	1	3	1	2	2	1	5
Номер задания	8	9	10	11	12	13	14
Номер правильного ответа	4	3	4	3	5	3	1

2 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

2.1. Формулы сокращенного умножения

Для любых a, b и c и целого положительного n верны следующие равенства:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$
$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac;$$
$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n.$$

2.2. Деление многочленов

Многочленом степени n называют выражение вида:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Деление многочленов выполняют аналогично делению целых чисел: делят старший член многочлена-делимого на старший член многочлена-делителя, затем частное умножают на многочлен-делитель и полученное произведение вычитают из многочлена-делимого. Многочлен-первый остаток аналогичным образом делят на многочлен-делитель. Деление продолжают до тех пор пока не получат остаток 0 или степень многочлена-остатка не будет меньше степени многочлена-делителя.

Например,

$$\begin{array}{r|l}
-\, x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 2 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2}
x^4 + x^3 - 2x^2 & x^2 - 4x + 11 \\ \cline{1-1}
-\, -4x^3 + 7x^2 + 2 & \\
-4x^3 - 4x^2 + 8x & \\ \cline{1-1}
-\, 11x^2 - 8x + 2 & \\
11x^2 + 11x - 22 & \\ \cline{1-1}
-19x + 24 &
\end{array}$$

Результат деления записывают следующим образом:

$$x^4-3x^3+5x^2+2=\left(x^2+x-2\right)\left(x^2-4x+11\right)+(-19x+24).$$

Теорема Безу. Остаток r от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x-c)$ равен значению многочлена при $x=c$, то есть $r=P_n(c)$.

Следствие 1. Для делимости многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x-c)$ необходимо и достаточно, чтобы число c было корнем многочлена $P_n(x)$.

Следствие 2. Если c_1, c_2, ... ,c_n все корни многочлена

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,$$

$$\text{то } P_n(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)...(x-c_n).$$

Теорема о целых корнях. Всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем свободного члена.

Следствие из теоремы о целых корнях. При отыскании целых корней многочлена с целыми коэффициентами достаточно рассмотреть делители свободного члена.

2.3. Степени и арифметические корни

Произведение n сомножителей, каждый из которых равен a, называют n-ной *степенью числа a*.

Арифметическим корнем n-ной степени из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число b, n-ая степень которого равна a: $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a$.

Свойства степеней и арифметических корней:

$a^0=1;$ (2.1)

$1^n=1;$ (2.2)

$a^na^m=a^{n+m};$ (2.3)

$\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m};$ (2.4)

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^n;$ (2.9)

$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$; $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$ (2.10)

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m};$ (2.11)

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}=(ab)^{\frac{1}{n}};$ (2.12)

$$(a^n)^m = a^{nm}; \quad (2.5)$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \quad (2.6)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad (2.7)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \quad (2.8)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}; \quad (2.13)$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \quad (2.14)$$

$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a; \quad (2.15)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = a^{\frac{1}{mn}}. \quad (2.16)$$

Равенства 2.2–2.9 верны для любых n и m и положительных a и b. Равенства 2.1 и 2.10–2.16 верны для натуральных n и m и любых неотрицательных a и b.

Внесение множителей под знак корня и вынесение множителей из-под знака корня

В случае нечетной степени корня всякий множитель можно внести под знак этого корня, а если степень множителя выше степени корня, то и вынести из-под знака этого корня.

В случае четной степени корня необходимо помнить, что:

1) при *внесении множителя под знак квадратного корня* (в общем случае под знак корня четной степени) необходимо учитывать знак этого множителя:

$$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, & \text{если } a > 0, \\ -\sqrt{a^2 b}, & \text{если } a < 0; \end{cases}$$

2) при *извлечении квадратного корня* (корня четной степени) из произведения необходимо учитывать, что корень определен и в случае, если оба множителя положительны, и в случае, если оба множителя отрицательны:

$$\sqrt{ab} = \begin{cases} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, & \text{если } a > 0, \text{ и } b > 0, \\ \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}, & \text{если } a < 0, \text{ и } b < 0. \end{cases}$$

Тест для проверки теоретических знаний

Установите соответствие (1–5):

1. Формулы сокращенного умножения:

1) $m^2 + n^2 + 2mn$; а) $n^3 + m^3 + 3nm(n+m)$;

2) $(m-n)(m+n)$; б) $m^2 + n^2$;

3) $(m-n)\left(m^2+mn+n^2\right)$;

4) $(m+n)\left(m^2-mn+n^2\right)$;

5) $(m+n-p)^2$;

6) $(m+n)^3$;

7) $(n-m)^3$;

8) $m^2-2mn+n^2$.

в) m^2-n^2 ;

г) $(n+m)^2$;

д) $(n-m)^2$;

е) n^3+m^3;

ж) $n^3-m^3+3mn(n-m)$;

з) m^3-n^3;

и) $m^2+n^2+p^2+2(mn-mp-np)$;

к) $m^2+n^2+p^2+2mn+2mp+2np$.

2. Свойства степеней:

1) x^{n+m};

2) $\dfrac{x^n}{y^n}$;

3) $x^n \cdot y^n$;

4) x^{-n};

5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n}$;

6) $x^{m\cdot n}$.

а) $(xy)^n$;

б) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n$;

в) $x^n \cdot x^m$;

г) $\left(x^n\right)^m$;

д) $\dfrac{1}{x^n}$;

е) x^n+x^m;

ж) $\left(\dfrac{y}{x}\right)^n$;

з) x^n-x^m.

3. Свойства арифметических корней:

1) $b^{\frac{1}{mn}}$;

2) $b^{\frac{n}{m}}$;

3) $\sqrt[2n]{b^{2n}}$;

4) $\sqrt[n]{ab}$;

а) $\dfrac{1}{b^{mn}}$;

б) b;

в) $b\sqrt{b}$;

г) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

5) $b^{\frac{1}{2}}$;

6) $\sqrt[2n+1]{b^{2n+1}}$.

д) $|b|$;

е) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}}$;

ж) $\sqrt{b}$;

з) $\sqrt[m]{b^n}$.

4. Вынесение множителей из-под знака корня:

ВЫРАЖЕНИЕ

1) $\sqrt{a^3b^4c^6}$;

2) $\sqrt{-a^3b^4c^6}$;

3) $\sqrt[3]{a^3b^4c^6}$;

4) $\sqrt[3]{-a^3b^4c^6}$.

РЕЗУЛЬТАТ УПРОЩЕНИЯ

а) $-abc^2\sqrt[3]{-b}$;

б) $-ab^2|c|^3\sqrt{a}$;

в) $-ab^2|c|^3\sqrt{-a}$;

г) $ab^2|c|^3\sqrt{a}$;

д) $abc^2\sqrt[3]{b}$;

е) $-abc^2\sqrt[3]{b}$.

5. Внесение множителей под знак корня:

ВЫРАЖЕНИЕ

1) $ab^2c^2\sqrt[4]{ac}$, $c<0$;

2) $ab^2c^2\sqrt[4]{ac}$, $c>0$;

3) $-2ab^2c\sqrt[5]{ac}$;

4) $-2ab^2c\sqrt[4]{ac}$.

РЕЗУЛЬТАТ УПРОЩЕНИЯ

а) $\sqrt[4]{a^5b^8c^9}$;

б) $\sqrt[5]{32a^6b^{10}c^6}$;

в) $-\sqrt[4]{a^5b^8c^9}$;

г) $\sqrt[5]{-32a^6b^{10}c^6}$;

д) $-\sqrt[4]{16a^5b^8c^5}$;

е) $\sqrt[4]{-16a^5b^8c^5}$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5
Номер правильного ответа	1 – г, 2 – в, 3 – з, 4 – е, 5 – и, 6 – а, 7 – ж, 8 – д.	1 – в, 2 – б, 3 – а, 4 – д, 5 – ж, 6 – г.	1 – е, 2 – з, 3 – д, 4 – г, 5 – ж, 6 – б.	1 – г, 2 – в, 3 – д, 4 – е	1 – в, 2 – а, 3 – г, 4 – д

Примеры

Пример 1. Упростите выражение

$$\frac{4}{a+\dfrac{1}{b+c^{-1}}}:\frac{1}{a+b^{-1}}-\frac{1}{4^{-1}b(abc+a+c)}.$$

Решение. Выполним последовательно следующие действия:

1) $$\frac{4}{a+\dfrac{c}{c\left(b+\dfrac{1}{c}\right)}}=\frac{4}{a+\dfrac{c}{bc+1}}=\frac{4(bc+1)}{(bc+1)\left(a+\dfrac{c}{bc+1}\right)}=\frac{4(bc+1)}{abc+a+c};$$

2) $$\frac{1}{a+\dfrac{1}{b}}=\frac{b}{b\left(a+\dfrac{1}{b}\right)}=\frac{b}{ab+1};$$

3) $$\frac{4(bc+1)}{abc+a+c}:\frac{b}{ab+1}=\frac{4\left(ab^2c+bc+ab+1\right)}{b(abc+a+c)};$$

4) $$\frac{4\left(ab^2c+bc+ab+1\right)-4}{b(abc+a+c)}=\frac{4b(abc+c+a)}{b(abc+a+c)}=4.$$

Ответ: 4.

Пример 2. Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{2x}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x^2+5x+6}\right)^{-2}:\frac{(3-x)^2+12x}{2}.$$

Решение. Согласно правилу разложения квадратного трехчлена на линейные множители $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$, запишем:

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2);\ x^2+4x+3=(x+1)(x+3);$$

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3).$$

Тогда исходное выражение примет вид:

$$\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{2x}{(x+1)(x+3)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}\right)^{-2}:\frac{(x-3)^2+12x}{2}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и применяя формулы сокращенного умножения, получим:

$$\left(\frac{x+3+2x^2+4x+x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\right)^{-2}\cdot\frac{2}{x^2-6x+9+12x}=$$

$$=\frac{(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2\cdot 2}{\left(2x^2+6x+4\right)^2\left(x^2+6x+9\right)}=\frac{2(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2}{4(x+1)^2(x+2)^2(x+3)^2}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

Пример 3. Сократите дробь $\frac{x^2-11xy+30y^2}{x^2-9xy+20y^2}$.

Решение. Рассмотрим относительно x квадратный трехчлен $f(x)=x^2-11xy+30y^2$. Зная, что $x_1+x_2=11y$ и $x_1x_2=30y^2$ (см. теорему Виета п. 5.2), получим $x_1=5y$, $x_2=6y$. Аналогично найдем корни квадратного трехчлена $f(x)=x^2-9xy+20y^2$: $x_1=4y$, $x_2=5y$. Разложим трехчлены на линейные множители и выполним сокращение дроби: $\frac{(x-5y)(x-6y)}{(x-4y)(x-5y)}=\frac{x-6y}{x-4y}$.

Ответ: $\frac{x-6y}{x-4y}$.

Пример 4. Найдите корни многочлена $6x^3-11x^2+6x-1$.

Решение. Найдем целые корни многочлена. Согласно теореме о целых корнях многочлена, ими могут быть только делители свободного члена, то есть числа -1 и 1. Найдем:

$$P_3(-1)=6\cdot(-1)^3-11\cdot(-1)^2+6\cdot(-1)-1=-6-11-6-1=-24 \text{ и}$$

$$P_3(1)=6\cdot 1-11\cdot 1+6\cdot 1-1=0.$$

Так как $P_3(-1)\neq 0$, то число -1 не является корнем многочлена, а так как $P_3(1)=0$, то число 1 – целый корень многочлена.

Тогда согласно следствию из теоремы Безу многочлен $6x^3-11x^2+6x-1$ делится на двучлен $(x-1)$.

Выполним деление многочленов:

$$\begin{array}{r|l}
-\,6x^3-11x^2+6x-1 & x-1 \\
6x^3-6x^2 \qquad\qquad & \overline{6x^2-5x+1} \\
\hline
-\,-5x^2+6x-1 & \\
-5x^2+5x \quad & \\
\hline
-\,x-1 & \\
x-1 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Запишем результат деления:

$$6x^3-11x^2+6x-1=(x-1)\left(6x^2-5x+1\right).$$

Найдем корни квадратного трехчлена $6x^2-5x+1$. Получим:

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, многочлен $6x^3-11x^2+6x-1$ имеет три корня:

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 1.

Пример 5. Упростите выражение

$$\frac{\dfrac{a-b}{2a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{2a^2+ab-b^2}}{\left(4b^4+4ab^2+a^2\right):\left(2b^2+a\right)}\cdot\frac{b^2+b+ab+a}{b+1}.$$

Решение. Выполним последовательно действия с многочленами, предварительно раскладывая их на множители:

1) $2a^2+ab-b^2=a^2+ab+a^2-b^2=a(a+b)+(a-b)(a+b)=$
$=(a+b)(2a-b)$;

2) $\dfrac{a-b}{2a-b}-\dfrac{a^2+b^2+a}{(a+b)(2a-b)}=\dfrac{(a-b)(a+b)-(a^2+b^2+a)}{(a+b)(2a-b)}=$

$$=\frac{a^2-b^2-a^2-b^2-a}{(a+b)(2a-b)}=\frac{-2b^2-a}{(a+b)(2a-b)}=\frac{-\left(2b^2+a\right)}{(a+b)(2a-b)};$$

3) $\dfrac{4b^4+4ab^2+a^2}{2b^2+a}=\dfrac{\left(2b^2+a\right)^2}{2b^2+a}=2b^2+a$;

4) $\dfrac{-\left(2b^2+a\right)}{(a+b)(2a-b)}:\left(2b^2+a\right)=\dfrac{-\left(2b^2+a\right)}{(a+b)(2a-b)\left(2b^2+a\right)}=$

$$=\frac{-1}{(a+b)(2a-b)};$$

5) $b^2+b+ab+a=b(b+1)+a(b+1)=(b+1)(b+a)$;

6) $\dfrac{-(b+1)(b+a)}{(a+b)(2a-b)(b+1)}=-\dfrac{1}{2a-b}=\dfrac{1}{b-2a}.$

Ответ: $\dfrac{1}{b-2a}$.

Пример 6. Упростите выражение

$$\sqrt[4]{216x^3\left(5+2\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}\ .$$

Решение. Выполним следующие действия:

1) $\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}=\sqrt[4]{\left(3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}\right)^2}=\sqrt[4]{30x-12x\sqrt{6}}=$
$=\sqrt[4]{6x\left(5-2\sqrt{6}\right)}$;

2) $\sqrt[4]{216x^3\left(5+2\sqrt{6}\right)}\sqrt[4]{6x\left(5-2\sqrt{6}\right)}=\sqrt[4]{(6x)^4\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)}=$
$=\sqrt[4]{(6x)^4(25-24)}=\sqrt[4]{(6x)^4}=6x$.

Ответ: $6x$.

Пример 7. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^6a^{-1}}}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^2}}}-\dfrac{a^0}{\sqrt[6]{a^{-1}}}$.

Решение. Последовательно применяя формулы 2.10, 2.5, 2.3, 2.4, получим:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^6a^{-1}}}}{\sqrt[4]{a^3\sqrt[3]{a^2}}}-\sqrt[6]{a}=\frac{a^{2\cdot\frac{1}{3}}a^{6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}a^{-1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}}{a^{3\cdot\frac{1}{4}}a^{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}}-a^{\frac{1}{6}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{12}}}{a^{\frac{3}{4}}a^{\frac{1}{6}}}-a^{\frac{1}{6}}=$$

$$=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}-\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}-a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{6}}-a^{\frac{1}{6}}=0.$$

Ответ: 0.

Пример 8. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[3]{9x^5}-4x}{\sqrt[3]{3x^2}-2\sqrt[3]{x}}-\dfrac{2}{x^{\frac{-2}{3}}}$.

Решение. Полагая $\sqrt[3]{x}=y$ и $\sqrt[3]{3}=a$, запишем данное выражение в виде:

$$\frac{a^2y^5-4y^3}{ay^2-2y}-2y^2=\frac{y^3(a^2y^2-4)}{y(ay-2)}-2y^2=$$

$$=\frac{y^2(ay-2)(ay+2)}{ay-2}-2y^2=y^2(ay+2)-2y^2=y^2(ay+2-2)=ay^3.$$

Учитывая подстановку $\sqrt[3]{x}=y$ и $\sqrt[3]{3}=a$, запишем результат преобразования: $\dfrac{\sqrt[3]{9x^5}-4x}{\sqrt[3]{3x^2}-2\sqrt[3]{x}}-\dfrac{2}{x^{\frac{-2}{3}}}=\sqrt[3]{3}x$.

Ответ: $\sqrt[3]{3}x$.

Пример 9. Упростите выражение

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}}\right)^2+2^2a^{\frac{m+n}{m-n}}}{\left(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}}\right)}:\left(a^{\frac{m+n}{m-n}}\right)^0.$$

Решение. На основании свойств степеней 2.1, 2.3 и 2.11 выполним следующие преобразования:

1) $\left(a^{\frac{(m+n)}{(m-n)}}\right)^0=1$;

2) $a^{\frac{m+n}{mn}}=a^{\frac{m}{mn}+\frac{n}{mn}}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1}{m}}$;

3) $\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}}=a^{\frac{m+1}{m}}+a^{\frac{n+1}{n}}=a^{\frac{m}{m}+\frac{1}{m}}+a^{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}=$

$=a^{1+\frac{1}{m}}+a^{1+\frac{1}{n}}=a\cdot a^{\frac{1}{m}}+a\cdot a^{\frac{1}{n}}=a\left(a^{\frac{1}{m}}+a^{\frac{1}{n}}\right)$.

Заданное выражение примет вид $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}}\right)^2+4a^{\frac{1}{m}}a^{\frac{1}{n}}}{\left(a^{\frac{2}{m}}-a^{\frac{2}{n}}\right)a\left(a^{\frac{1}{m}}+a^{\frac{1}{n}}\right)}=A$.

Полагая $a^{\frac{1}{m}}=x$ и $a^{\frac{1}{n}}=y$, запишем $A=\dfrac{(x-y)^2+4xy}{a\left(x^2-y^2\right)(x+y)}$.

Применяя формулы сокращенного умножения, получим:

$$A=\frac{x^2-2xy+y^2+4xy}{a\left(x^2-y^2\right)(x+y)}=\frac{(x+y)^2}{a(x-y)(x+y)(x+y)}=\frac{1}{a(x-y)}.$$

Учитывая, что $a^{\frac{1}{m}}=x$ и $a^{\frac{1}{n}}=y$, запишем: $A=\dfrac{1}{a\left(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a}\right)}$.

Ответ: $\dfrac{1}{a\left(\sqrt[m]{a}-\sqrt[n]{a}\right)}$.

Пример 10. Упростите выражение $\dfrac{5\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54}+15\sqrt[3]{128}}}{3\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32}}+3\sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}$.

Решение. На основании свойств степеней выполним преобразования числителя и знаменателя дроби:

1) $5\sqrt[4]{7\sqrt[3]{2\cdot 3^3}+15\sqrt[3]{2^7}}=5\sqrt[4]{7\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 3+15\cdot 2^{\frac{7}{3}}}=5\sqrt[4]{2^{\frac{1}{3}}(21+15\cdot 4)}=$

$=5\sqrt[4]{2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^4}=5\cdot 2^{\frac{1}{12}}\cdot 3=15\cdot 2^{\frac{1}{12}}$;

2) $3\sqrt[3]{2^2\sqrt[4]{2^5}}+3\sqrt[3]{3^2\sqrt[4]{2\cdot 3^4}}=3\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{5}{12}}+3\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{12}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=$

$=3\cdot 2^{\frac{13}{12}}+9\cdot 2^{\frac{1}{12}}=2^{\frac{1}{12}}\cdot(6+9)=15\cdot 2^{\frac{1}{12}}$.

Запишем: $\dfrac{15\cdot 2^{\frac{1}{12}}}{15\cdot 2^{\frac{1}{12}}}=1$.

Ответ: 1.

Пример 11. Найдите $\sqrt{a}-\sqrt{a+12}$, если $\sqrt{a}+\sqrt{a+12}=130$.

Решение. Полагая $\sqrt{a}-\sqrt{a+12}=x$, найдем произведения правых и левых частей равенств $\sqrt{a}+\sqrt{a+12}=130$ и $\sqrt{a}-\sqrt{a+12}=x$.

Получим: $(\sqrt{a}+\sqrt{a+12})(\sqrt{a}-\sqrt{a+12})=130x$. Откуда:

$a-(a+12)=130x$, $a-a-12=130x$, $x=-\dfrac{6}{65}$.

Ответ: $-\dfrac{6}{65}$.

Пример 12. Проверьте справедливость равенства

$$-\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}.$$

Решение. Выполним преобразования правой части равенства, умножая числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное выражению, записанному в знаменателе дроби:

$$\sqrt[3]{\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}=\sqrt[3]{\frac{\left(10-7\sqrt{2}\right)^2}{\left(10+7\sqrt{2}\right)\left(10-7\sqrt{2}\right)}}=\sqrt[3]{\frac{100-140\sqrt{2}+98}{100-98}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{2\left(99-70\sqrt{2}\right)}{2}}=\sqrt[3]{99-70\sqrt{2}}.$$

Аналогичным образом выполним преобразования левой части равенства: $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\dfrac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1}=3-2\sqrt{2}$.

Поскольку правая часть равенства представлена корнем третьей степени, запишем:

$$3-2\sqrt{2}=\sqrt[3]{\left(3-2\sqrt{2}\right)^3}=\sqrt[3]{27-54\sqrt{2}+72-16\sqrt{2}}=\sqrt[3]{99-70\sqrt{2}}\,.$$

Ответ: Равенство справедливо.

Пример 13. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{6}}$.

Решение. Запишем знаменатель дроби в виде $3-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$. Умножив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ на выражение $3+\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$, сопряженное выражению $3-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$, и применяя формулы сокращенного умножения, получим:

$$\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}=\frac{\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{\left(3-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\right)\cdot\left(3+\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\right)}=$$

$$=\frac{9+2+6+6\sqrt{2}+6\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{9-\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}=\frac{17+6\sqrt{2}+6\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{9-2-4\sqrt{3}-6}=$$

$$=\frac{\left(17+6\sqrt{2}+6\sqrt{6}+4\sqrt{3}\right)\left(1+4\sqrt{3}\right)}{\left(1-4\sqrt{3}\right)\left(1+4\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{17+6\sqrt{2}+6\sqrt{6}+4\sqrt{3}+68\sqrt{3}+24\sqrt{6}+72\sqrt{2}+48}{1-48}=$$

$$=-\frac{65+78\sqrt{2}+72\sqrt{3}+30\sqrt{6}}{47}\,.$$

Ответ: $-\dfrac{65+78\sqrt{2}+72\sqrt{3}+30\sqrt{6}}{47}$.

Пример 14. Найдите число, 125 % которого равны числу

$$\left(\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}\right):\sqrt[8]{\left(5\cdot\sqrt[3]{5}\right)^2}\,.$$

Решение. Найдем значение выражения

$$\left(\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}\right):\sqrt[8]{\left(5\cdot\sqrt[3]{5}\right)^2}=A\,.$$

Получим: $A=\dfrac{\left(3^3\cdot5\right)^{\frac{1}{3}}+\left(2^3\cdot5\right)^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{4}}\cdot5^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}}=\dfrac{3\cdot5^{\frac{1}{3}}+2\cdot5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}}}=\dfrac{5\cdot5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}}=5\,.$

Зная, что 125 % искомого числа равны 5, запишем и решим пропорцию: $\begin{matrix} x-100\% \\ 5-125\% \end{matrix}$. Откуда $125\cdot x=100\cdot 5$, $x=4$.

Ответ: 4.

Пример 15. Упростите выражение $\sqrt{\sqrt{2}+1}:\sqrt[3]{(7-5\sqrt{2})^{-1}}$.

Решение. Представим корни второй и третьей степени в виде корней шестой степени и применим формулы сокращенного умножения. Но поскольку $7-5\sqrt{2}=\sqrt{49}-\sqrt{50}<0$, то запишем $7-5\sqrt{2}=-\left(5\sqrt{2}-7\right)$ и получим:

$$-\sqrt[2\cdot 3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}\cdot\sqrt[3\cdot 2]{\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}=$$

$$=-\sqrt[6]{\left(2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}=-\sqrt[6]{\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)^2}=$$

$$=-\sqrt[6]{\left(5\sqrt{2}+7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)\left(5\sqrt{2}-7\right)}=-\sqrt[6]{(50-49)\left(5\sqrt{2}-7\right)}=$$

$$=-\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}=-\sqrt[6]{2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1}=-\sqrt[6]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}=-\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot$$

Ответ: $-\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

Пример 16. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^4}-\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{2}\right)^5}\right)^{-4}.$$

Решение. Упростим выражение $\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^4}$.

Поскольку $\sqrt{2}-\frac{3}{2}=\sqrt{2}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\sqrt{2}-\sqrt{2\frac{1}{4}}<0$,

то, зная, что $(a-b)^{2n}=(b-a)^{2n}$, запишем $\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^4=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^4$.

Тогда согласно свойству 2.14 получим: $\sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)^4}=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$.

Упростим выражение $\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{2}\right)^5}$. Согласно свойству 2.15 будем иметь $\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{2}\right)^5}=1-\sqrt{2}$.

Найдем значение исходного выражения:

$$\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}-\left(1-\sqrt{2}\right)\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\right)^{-4}=\left(1\frac{1}{2}-1\right)^{-4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16.$$

Ответ: 16.

Задачи для самостоятельного решения

Упростите выражения и найдите их значения в случае, если известны числовые значения параметров (1–70):

1. $\left(\frac{1+x+x^2}{2x+x^2}-\frac{1-x+x^2}{2x-x^2}+2\right)^{-1}:\left(5-2x^2\right)^{-1}$; $\sqrt{x}=\sqrt{3{,}92^{\frac{1}{2}}}$.

2. $\frac{3a^2+2ax-x^2}{(3x+a)(a+x)}-\frac{10ax-30x^2}{9x^2-a^2}-2$.

3. $\frac{a^{-1}-\frac{1}{b+c}}{a^{-1}+\frac{1}{b+c}}\left(1-\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right):\frac{2a-2b-2c}{2^2bc}$,

$a=50^{-1}$; $c=1{,}07$; $b=-11{,}05$.

4. $\frac{b^{-1}}{(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\frac{1}{b+c^{-1}}}:\frac{2}{2a+2b^{-1}}$.

5. $\left(x^2+2x+\frac{11x-2}{-3x-1}\right)\cdot\left(x+1+\frac{-2x^2-x-2}{3x+1}\right)^{-1}$; $x=7,(3)$.

6. $\frac{1+(a+x)^{-1}}{1-(a+x)^{-1}}\cdot\left(1-\frac{1-\left(a^2+x^2\right)}{2ax}\right)$; $x^{-3}=\frac{1}{(a-1)^{-3}}$.

7. $\frac{\left(ab^{-1}+a^{-1}b+1\right):\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^{-2}}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)}$.

8. $\frac{x^{-6}-64}{16+4x^{-2}+x^{-4}}\cdot\frac{1}{4-4x^{-1}+x^{-2}}+\frac{x^2(-2x-1)}{0{,}25-0{,}5x}$.

9. $\frac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$.

10. $\left(\dfrac{(a+b)^{\frac{-n}{4}}c^{\frac{1}{4}}}{a^{2-n}b^{\frac{-3}{4}}}\right)^{\frac{4}{3}}\cdot\left(\dfrac{b^3c^4}{(a+b)^{2n}a^{16-8n}}\right)^{-1/6}$; $b=0{,}04$.

11. $\dfrac{2x^{\frac{-1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{-1}{3}}}+\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}}}+\dfrac{x+1}{-x^2+4x-3}$.

12. $\dfrac{x-1}{x+x^{0,5}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}-\dfrac{1}{-0{,}5x^{-0,5}}$.

13. $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{-1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}$.

14. $\left(\dfrac{36-16a^{-2}}{12\sqrt{a^{-1}}+8\sqrt{a^{-3}}}-\dfrac{1+a^{-1}-6a^{-2}}{\sqrt{a^{-1}}+3\sqrt{a^{-3}}}\right)^4$.

15. $\dfrac{\left(\sqrt[10]{a^{\frac{8}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[15]{a^{12}}\right)^3}:\dfrac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^{-4}}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^{-6}}$.

16. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{-12}{-12x^2+12\sqrt{x}}$.

17. $\dfrac{x-1}{x+\sqrt{x}+1}:\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1}+2\sqrt{x}-2^3$.

18. $\dfrac{\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{ab^4}-\sqrt[4]{a^4b}-\sqrt[4]{b^5}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}:\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^{-1}$.

19. $\dfrac{\sqrt[3]{\left(a^2b\sqrt{b}-6\sqrt[3]{a^5}\sqrt[4]{b^5}+12ab\sqrt[3]{a}-8a\sqrt[4]{b^3}\right)^2}}{ab\sqrt[3]{a}-4a\sqrt[4]{b^3}+4\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}}$.

20. $\left(\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt[3]{b}}{ba\sqrt{a}}\right)^3+\left(\dfrac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}}\right)^2}\right):\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)$.

21. $\left(\left(\sqrt[4]{p}-\sqrt[4]{q}\right)^{-2}+\left(\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}\right)^{-2}\right):\dfrac{\sqrt{p}-\sqrt{q}}{\sqrt{p^2}-\sqrt{q^2}}$.

22. $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2-4b}{(a-b)\cdot\left(b^{-\frac{1}{2}}+3a^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}:\dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}$.

23. $\dfrac{-\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)^2-\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)^2}{2(n-m)}:\dfrac{1}{\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3}}-3m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}$.

24. $\left(\left(\dfrac{2^{\frac{3}{2}}+3^3y^{\frac{3}{5}}}{\sqrt{2}+3\sqrt[5]{y}}+3\sqrt[10]{2^5y^2}-2\right)3^{-2}\right)^{25}$.

25. $x^{\frac{2p-6}{2p^2+6p}}:x^{\frac{12}{9-p^2}}\cdot x^{\frac{3}{3p-p^2}}$.

26. $\sqrt[n]{y^{\frac{2nm}{m-n}}}:\sqrt[m]{y^{\frac{m(m-n)^2+4m^2n}{m^2-n^2}}}$.

27. $\left(\dfrac{\left(x^{\frac{2}{p}}+x^{\frac{2}{q}}\right)^2-4x^{\frac{\frac{2}{p+2}}{q}}}{\left(x^{\frac{1}{q}}-x^{\frac{1}{p}}\right)^2+4x^{\frac{\frac{1}{p+1}}{q}}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

28. $\dfrac{x^{\frac{3}{p}}-x^{\frac{3}{q}}}{\left(x^{\frac{1}{p}}+x^{\frac{1}{q}}\right)^2-2x^{\frac{1}{q}}\left(x^{\frac{1}{q}}+x^{\frac{1}{p}}\right)}+\dfrac{x^{\frac{1}{p}}}{x^{\frac{(q-p)}{pq}}+1}-x^{\frac{1}{p}}+x^{\frac{1}{q}}$.

29. $\dfrac{x\left(x^{\frac{2}{m}}-9x^{\frac{2}{n}}\right)\left(\sqrt[m]{x^{1-m}}-3\sqrt[n]{x^{1-n}}\right)}{3\left(x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}}\right)^2-36x^{\frac{(m+n)}{(mn)}}}$.

30. $\dfrac{5\left(y^2-x^2\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{-\sqrt[3]{x^5}-\sqrt[3]{x^2y^3}+\sqrt[3]{x^3y^2}+\sqrt[3]{y^5}}-5\left(\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right),\ x=64$.

31. $-\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{a}+\dfrac{a}{\sqrt{2}}+2}-\dfrac{2\sqrt{a}-a^2\sqrt[4]{2}}{a\sqrt{2a}-a\sqrt[4]{2^3}}$.

32. $\left(\dfrac{a+2}{-\sqrt{2a}}+\dfrac{-a}{\sqrt{2a}+2}-\dfrac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\dfrac{2^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{a+2}$.

33. $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2:\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+\dfrac{\sqrt{a}+1}{1-\sqrt{a}}\right)^{-1}$.

34. $\dfrac{9b^{\frac{7}{3}}-a^{\frac{3}{2}}b^{-1}}{b\sqrt{a^{\frac{3}{2}}b^{-2}+6a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{-1}{3}}+9b^{\frac{4}{3}}}}\cdot\dfrac{b^4}{b^2a^{\frac{3}{4}}-3b^{\frac{11}{3}}}$, $b=4$.

35. $\dfrac{\sqrt{2}(a-x)}{a-2x}-\left(\left(\dfrac{-\sqrt{x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2x}+\sqrt{a}}{-2\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$;

$a=\dfrac{2^3}{5^2}$, $x=\dfrac{2}{5^2}$.

36. $\left(\sqrt[4]{36mn^2p}+\sqrt{3mn}+\sqrt{3np}\right)\left(\sqrt[4]{36mn^2p}-\sqrt{3mn}-\sqrt{2np}\right)$.

37. $\dfrac{\sqrt{3}\left(a-b^2\right)+2\sqrt{3}b^2}{\sqrt{2\left(b^2-a\right)^2+\left(-2b\sqrt{2a}\right)^2}}\cdot\dfrac{\sqrt{2a}-\sqrt{2c}}{\sqrt{3}\sqrt{a^{-1}}-\sqrt{3}\sqrt{c^{-1}}}$.

38. $\dfrac{2^3-\sqrt[3]{n^3}}{2+\sqrt[3]{n}}:\left(\sqrt{2^2}+\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{2+\sqrt[3]{n}}\right)-\left(\sqrt[3]{n}+\dfrac{2\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}-2}\right)\dfrac{2^2-\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2}+2\sqrt[3]{n}}$.

39. $\dfrac{m\sqrt[3]{m}-3^3n\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m^2}+3\sqrt[3]{mn}+3^2\sqrt[3]{n^2}}:\left(1-3\sqrt[3]{nm^{-1}}\right)-\sqrt[3]{m^2}$.

40. $\dfrac{(\sqrt{x}+2)\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x}-1\right)-(\sqrt{x}-2)\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x}+1\right)-\dfrac{8\sqrt{x}}{x}}{\left(2-\sqrt{x+2}\right):\left(\sqrt{\dfrac{2}{x}+1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x}\right)}$.

41. $\dfrac{1-\sqrt{2t}}{\dfrac{1-\sqrt[4]{(2t)^3}}{1-\sqrt[4]{2t}}-\sqrt{2t}}:\left(\dfrac{\sqrt[4]{(2t)^{-1}}+\sqrt[4]{(2t)^2}}{1+\sqrt[4]{(2t)^{-1}}}-\sqrt{2t}\right)$.

42. $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{xy}+2^2y^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(x\sqrt[3]{x}-2^3y\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\left(2-\sqrt[3]{xy^{-1}}\right)$.

43. $\dfrac{\left(x-\sqrt{x^3}+2-2\sqrt{x}\right)^2\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{x-2+x^{-1}}-\sqrt{x^3}\sqrt{4x^{-1}+4+x}$.

44. $\left(2\sqrt{ab}-2ab\left(a+\sqrt{ab}\right)^{-1}\right)\cdot\left(2\left(\sqrt{ab}-b\right)\sqrt{(ab)^{-2}}\right)^{-1}$.

45. $\left(\sqrt[3]{8-x^3}+\sqrt[3]{\dfrac{x^5+2x^4+4x^3}{4-4x+x^2}}\right):\left(\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)^{-1}+\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^{-1}\right)$.

46. $\dfrac{\left(1+a^{-3}b^{3}\right)a^{4}}{a\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{2}-\sqrt{4a^{3}b}}-\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{4ab^{2}}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{4a^{2}b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{a+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}+\left(\dfrac{b+\sqrt{ab}}{2}\right)^{-1}}.$

47. $\left(\left(\sqrt{mn}-\dfrac{mn}{m+\sqrt{mn}}\right):\dfrac{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}{m-n}-m\sqrt{n}\right)^{2}:\sqrt[3]{mn\sqrt{mn}}.$

48. $\left(\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right)-\dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}}\right):\sqrt[3]{ab\sqrt{ab}}.$

49. $\dfrac{\left(a^{2}-b^{-2}\right)^{a}\left(b+a^{-1}\right)^{b-a}}{\left(b^{2}-a^{-2}\right)^{b}\left(a-b^{-1}\right)^{a-b}}.$

50. $\dfrac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{-x}\left(\dfrac{x-1}{1-x-\sqrt{1-x^{2}}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right).$

51. $\left(\dfrac{pq^{3}}{(p+q)^{\frac{5}{2}}}-\dfrac{2pq^{2}}{(p+q)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{pq}{\sqrt{p+q}}\right):\dfrac{p^{3}}{(p+q)^{\frac{7}{2}}}.$

52. $\left(\left(1-x^{2}\right)^{\frac{-1}{2}}+\left(\left(1-x^{2}\right)^{\frac{-1}{2}}-1\right)^{-1}+1\right)^{-2}:\left(2-x^{2}-2\left(1-x^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$

53. $\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+y}}{\sqrt[3]{x-y}}+\dfrac{\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}}-2\right):\left(\sqrt[3]{(x-y)^{-1}}-\sqrt[3]{(x+y)^{-1}}\right).$

54. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-a^{2}}}\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-a^{2}}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^{2}}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-a^{2}}}{\sqrt{x-a^{2}}-\sqrt{x}}\right)^{-1}.$

55. $\left(\dfrac{(a-1)^{-1}}{a^{-3}}-(1-a)^{-1}\right)\cdot\dfrac{1+a(a-2)}{a^{2}-a+1}\cdot(1+a)^{-1}.$

56. $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}-1-x}\right)^{2}:\dfrac{2}{x^{2}-1}-\sqrt{1-x^{2}}.$

57. $\left(\dfrac{a-\sqrt{a^{2}-b^{2}}}{a+\sqrt{a^{2}-b^{2}}}+\dfrac{a+\sqrt{a^{2}-b^{2}}}{\sqrt{a^{2}-b^{2}}-a}\right):\dfrac{16a\sqrt{a^{2}-b^{2}}}{(10b)^{2}},\ a>b>0.$

58. $\dfrac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2a\sqrt{ab}}:\dfrac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{ab}}$, $a>b>0$.

59. $\dfrac{2\sqrt{1+0{,}25\left(\sqrt{a^{-1}}-\sqrt{a}\right)^2}}{\sqrt{1+0{,}25\left(\sqrt{a^{-1}}-\sqrt{a}\right)^2}-0{,}5\left(\sqrt{a^{-1}}-\sqrt{a}\right)}$.

60. $\dfrac{x+\dfrac{2x}{\sqrt{x+4}}}{2-\sqrt{x+4}}+\dfrac{4}{\sqrt{x+4}}+\sqrt{x+4}$.

61. $\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{\sqrt{1+x}}{-1-\sqrt{x}}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}-1}\right)^2$.

62. $\sqrt{\dfrac{2a}{(a+1)^{\frac{4}{3}}}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2^2+2^3a^{-1}+2^2a^{-2}}{2^{\frac{1}{2}}}}$.

63. $\dfrac{\left(2x^2+2x\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4-x}$.

64. $\dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{\sqrt{x}-2:\sqrt{x}}$.

65. $2\sqrt[6]{4x\left(11+4\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}\cdot\sqrt[3]{50x^2}$.

66. $\dfrac{\sqrt[3]{-x-\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[9]{\left(x^2-1\right)^3}}$.

67. $\dfrac{\left(\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)\sqrt{1+4x^{-2}}}-\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)\sqrt{1-4x^{-2}}}\right)^2}{x^2-\sqrt{x^4-16}}$.

68. $\dfrac{\sqrt{(abc+4)a^{-1}+4\sqrt{bca^{-1}}}}{\sqrt{abc}+2}$; $a=5^{-2}$.

69. $\dfrac{(2a+1)^{\frac{3}{2}}+(2a-1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4a+2\sqrt{(2a)^2-1}}}$.

70. $\dfrac{4a^2-b^2}{a^6-8b^6}\cdot\sqrt{a^4-(2ab)^2+\left(2b^2\right)^2}\cdot\dfrac{a^4+2a^2b^2+4b^4}{4a^2+4ab+b^2}$; $a=\dfrac{3}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$.

Выполнив указанную подстановку, упростите выражения (71–76):

71. $\dfrac{\sqrt{b}-b\sqrt{b}}{b}x^2-2x+\dfrac{b}{\sqrt{b}};\ x=\dfrac{b}{\sqrt{b}-b}$.

72. $\dfrac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)};\ x=\dfrac{-2}{\sqrt{5}+3}$.

73. $\dfrac{\left(\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}\right)^{-1}+\left(\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}\right)^{-1}}{\left(\sqrt{3+x}\cdot\sqrt{x+2}\right)^{-1}-\left(\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-2}\right)^{-1}};\ x=2\sqrt{1,5}$.

74. $\dfrac{2a\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x+\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}};\ x=0,5\left(\sqrt{ab^{-1}}-\sqrt{ba^{-1}}\right);\ a>0,\ b>0$.

75. $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{(1+bx)^2}{1-b^2x^2}};\ x=\sqrt{\dfrac{2a-b}{a^2b}};\ 0<\dfrac{b}{a}<a<b$.

76. $0,(3)x^3-x+0,3;\ \ x=\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Вычислите значения выражений (77–85):

77. $\dfrac{30\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+42\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{96\sqrt[3]{24}+48\sqrt[3]{375}}}$.

78. $\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{6}{\sqrt{3}-2}+\dfrac{30}{3-\sqrt{3}}\right):\left(2\sqrt{3}+10\right)$.

79. $\sqrt[4]{16\sqrt[3]{32}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{0,5}}-\sqrt[3]{54\sqrt[4]{2}}$.

80. $5\sqrt{48\sqrt[3]{0,(6)}}+\sqrt{32\sqrt[3]{2,25}}-11\sqrt[3]{12\sqrt{8}}$.

81. $\sqrt{160\sqrt{12}}+\sqrt{45\sqrt{48}}-\sqrt[4]{1200}-\sqrt{240\sqrt{27}}$.

82. $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$.

83. $\sqrt{3+\sqrt{3}-\sqrt[3]{-10-\sqrt{108}}}$.

84. $\sqrt[3]{26+\sqrt{675}}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$.

85. $\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{24}}\left(5+2\sqrt{6}\right)(49-10\sqrt{24})}{\sqrt{27}-\sqrt{162}+\sqrt{108}-\sqrt{8}}$.

Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби (86–88):

86. $\dfrac{5}{\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{3}}$.

87. $\dfrac{1-x}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}$.

88. $\dfrac{23}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$.

89. Найдите $\sqrt{(3-a)(2+a)}$, если $\sqrt{3-a}+\sqrt{2+a}=15$.

90. Найдите $\sqrt{100-x^2}+\sqrt{50-x^2}$, если известно, что $\sqrt{100-x^2}-\sqrt{50-x^2}=10$.

91. Вычислите $\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}-\dfrac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Ответы: **1.** 0,04. **2.** 1. **3.** 10. **4.** –1. **5.** 20. **6.** $\dfrac{a^3}{2(a-1)}$. **7.** $\dfrac{1}{ab}$. **8.** $(2x+1)^2$. **9.** $\dfrac{a^2+1}{a-1}$. **10.** 0,2. **11.** 0. **12.** $x+1$. **13.** $\dfrac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$. **14.** $16a^2$. **15.** $\dfrac{1}{\sqrt[12]{a^2b}}$. **16.** $x-1$. **17.** $x-7$. **18.** $a+b$. **19.** 1. **20.** $\dfrac{1}{ab}$. **21.** $\dfrac{2\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^4}{(p-q)^2}$. **22.** $\dfrac{1}{ab}$. **23.** $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)^2$. **24.** y^{10}. **25.** $x^{\frac{1}{p-3}}$. **26.** y. **27.** $\left|x^{\frac{1}{p}}-x^{\frac{1}{q}}\right|$. **28.** $2\sqrt[q]{x}$. **29.** $\dfrac{x^{\frac{1}{m}}+3x^{\frac{1}{n}}}{3}$. **30.** 80. **31.** 1. **32.** $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$. **33.** $\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$. **34.** –4. **35.** 1. **36.** $-3n(m+p)$. **37.** $-\sqrt{ac}$. **38.** 2. **39.** 0. **40.** 2. **41.** 1. **42.** –1. **43.** $x(x+1)(x+2)$. **44.** $\dfrac{a^2b}{a-b}$. **45.** $\dfrac{\sqrt[3]{8-x^3}}{\sqrt{2}}$. **46.** $(a-b)^2$. **47.** m^2. **48.** –1. **49.** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{a+b}$. **50.** –1. **51.** $q(p+q)$. **52.** $1-x^2$. **53.** $\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}$. **54.** $\dfrac{a^2}{4\left(a^2-x\right)}$. **55.** $1-a$, если $a\in(-\infty;\ -1)$; $a-1$, если $a\in(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$. **56.** –1. **57.** –25. **58.** $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{a-b}$. **59.** $\dfrac{a+1}{a}$. **60.** –4. **61.** $\dfrac{16x\sqrt{x}}{\left(1-x^2\right)(x-1)}$. **62.** $\dfrac{2\sqrt[6]{a^5}}{a}$. **63.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

64. $-\sqrt{x}$, если $x\in(0;\ 2)$; $\sqrt{x}$, если $x\in(2;\ +\infty)$. **65.** $20x$. **66.** $-\sqrt[6]{2}$, если $x\in(-\infty;\ -1)\cup(1;\ +\infty)$; $\sqrt[6]{2}$, если $x\in(-1;\ 1)$. **67.** $\frac{2\sqrt[3]{x}}{x}$. **68.** 5. **69.** $4a-\sqrt{4a^2-1}$. **70.** $\frac{5}{7}$. **71.** 0. **72.** 0,2. **73.** $-0{,}5\sqrt{6}$. **74.** $a+b$. **75.** 1. **76.** $\frac{20\sqrt{3}+9}{30}$. **77.** 31. **78.** 0,5. **79.** $\sqrt[12]{32}$. **80.** $2\sqrt[6]{18}$. **81.** 0. **82.** 2. **83.** $\sqrt{3}+1$. **84.** 1. **85.** 1. **86.** $\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{3}\right)\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$. **87.** $\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\left(x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\right)}{x}$. **88.** $7\sqrt{2}+5\sqrt{3}+\sqrt{6}+12$. **89.** 110. **90.** 5. **91.** 1.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Результат вынесения множителя из-под знака корня $\sqrt{-8a^4b^9}$ равен	1) $-3a^2b^4\sqrt{-3b}$; 2) $2a^2b^4\sqrt{-2b}$; 3) $3ab^4\sqrt{3ab}$; 4) $3a^2b^4\sqrt{b}$; 5) $-a^2b^4\sqrt{27b}$.
2	Если $a=68, b=4$, то значение выражения $\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(ba^{-\frac{3}{4}}+b^{\frac{5}{4}}a^{-1}\right)^{-1}$ равно	1) 17; 2) 72; 3) 0,75; 4) 64; 5) 1.
3	Результат упрощения выражения $\left(\frac{\left(\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{a^2x}\right):\left(\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{ax^2}\right)-1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^{-1}}\right)^6$ равен	1) $\frac{a}{x^2}$; 2) $\left(\frac{a}{x}\right)^2$; 3) $\frac{a^2}{x^4}$; 4) a^2x^4; 5) $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}$.

№	Задания	Варианты ответов
4	Если $\sqrt{8-x}-\sqrt{3-x}=8$, то значение выражения $\sqrt{8-x}+\sqrt{3-x}$ равно	1) $\frac{1}{4}$; 2) 1; 3) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{5}{4}$; 5) $\frac{13}{2}$.
5	Если $\sqrt{a}+\sqrt{b}=5,\ ab=4$, то значение выражения $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}$ равно	1) 20; 2) 263; 3) 95; 4) 400; 5) 40.
6	Если $x+y=4$, $y+z=8$, $x+z=6$, то значение выражения $x-y+2z$ равно	1) 10; 2) 18; 3) 40; 4) 8; 5) 2.
7	Наибольшее значение выражения $-4b\cdot(5a+b)-(5a-2)(5a+2)$ равно	1) 4; 2) 14; 3) 40; 4) 20; 5) 5.
8	Остаток от деления многочленов x^3-5x^2+3x-1 и $x+2$ равен	1) $x-2$; 2) x^2+1; 3) 0; 4) 35; 5) -35.
9	Результат вычисления выражения $(0{,}25)^{-\frac{3}{2}}+3\cdot 0{,}0081^{-\frac{1}{4}}+(0{,}0625)^{-0{,}75}$ равен	1) 25; 2) 26; 3) -1; 4) 260; 5) 3.
10	В результате преобразования выражения $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-\sqrt[3]{243\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+\sqrt[3]{600\sqrt{50}}$ получим	1) 0; 2) $\sqrt[3]{6}$; 3) 1; 4) $\sqrt[6]{18}$; 5) $\sqrt[3]{5}$.
11	Результат вычисления выражения $\dfrac{4\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}\right)}$ равен	1) 4; 2) 14; 3) 2; 4) $\sqrt[4]{6}$; 5) $\sqrt{6}$.

№	Задания	Варианты ответов
12	Результат упрощения выражения $\left(\sqrt[6]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ равен	1) $5-2\sqrt{5}$; 2) 0; 3) 1; 4) $4-2\sqrt{5}$; 5) -2.
13	Если $ab^{-1}=2^{-2}$, то значение выражения $\dfrac{\sqrt{a+2b}-\sqrt{b-3a}}{\sqrt{4a+3b}+\sqrt{13a-b}}$ равно	1) $\dfrac{2}{7}$; 2) $\dfrac{7}{2}$; 3) $\dfrac{3}{4}$; 4) 4; 5) 12.
14	Результат упрощения выражения $\sqrt{\dfrac{4}{a}+\dfrac{1}{4a^{-1}}-2}+\sqrt{\dfrac{1}{4a^{-1}}+\dfrac{2^{-2}}{a}+2^{-1}}$ при условии, что $0<a<4$, равен	1) $\dfrac{2a-3}{2\sqrt{a}}$; 2) $\dfrac{5}{\sqrt{a}}$; 3) $\dfrac{5}{2\sqrt{a}}$; 4) $2\sqrt{a}$; 5) $5\sqrt{a}$.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	2	1	3	3	3	4	1
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	5	2	1	1	5	1	3

3 ФУНКЦИИ

3.1. Основные понятия и определения

Функцией $y = f(x)$ называют такую зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y.

Область определения функции $D(f)$ – множество всех допустимых значений переменной x.

Область значения функции $E(f)$ – множество всех допустимых значений переменной y.

Функция монотонна, если она либо только возрастает, либо только убывает на $D(f)$.

Функция четна, если:

а) $D(f)$ – симметричное множество относительно начала отсчета;

б) $f(x) = f(-x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция нечетна, если:

а) $D(f)$ – симметричное множество относительно начала отсчета;

б) $f(x) = -f(-x)$.

График нечетной функции симметричен относительно точки $O(0;\ 0)$.

Функция $y = f(x)$ является периодической, если существует такое число $T \neq 0$, при котором для всех x из области определения функции выполняется равенство $f(x \pm T) = f(x)$.

3.2. Графики элементарных функций

Графиком функции $y = f(x)$ называют множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данной функциональной зависимости, то есть точек вида $M(x;\ f(x))$. График функции представляет собой некоторую линию на плоскости.

Рассмотрим элементарные функции и их графики.

1. ***Линейной*** называют функцию вида $y = kx + b$, где k и b некоторые действительные числа.

Если $b = 0$, то функция принимает вид $y = kx$ и называется *прямой пропорциональностью.*

$$D(f): x \in \mathbf{R};\ E(f): y \in \mathbf{R}.$$

Графиком линейной функции является *прямая.*

Угловой коэффициент k прямой $y = kx + b$ находят по формуле $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox.

Если $k > 0$, то функция монотонно возрастает.

например, $y = x + 1$ (рис. 3.1);

Если $k < 0$, то функция монотонно убывает.

например, $y = -x + 1$ (рис. 3.2);

Если $k = 0$, то, придавая b произвольные значения, получим семейство прямых параллельных оси Ox.

Например, $y = -1$ (рис. 3.2).

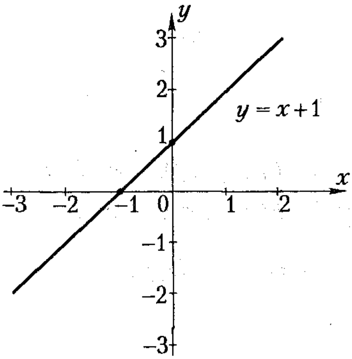


Рис. 3.1

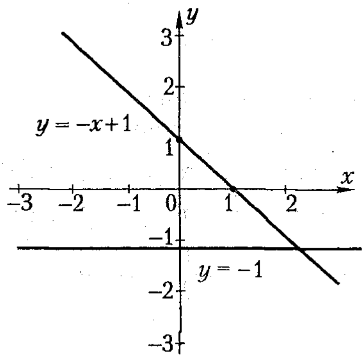


Рис. 3.2

2. ***Обратной пропорциональностью*** называют функцию вида $y = \dfrac{k}{x}$, где k – отличное от нуля действительное число.

$D(f): x \in \{\mathbf{R} / x \neq 0\}$; $E(f): y \in \{\mathbf{R} / y \neq 0\}$.

Графиком функции $y = \dfrac{k}{x}$ является *гипербола.*

Если $k > 0$, то график функции расположен в первой и третьей четверти координатной плоскости.

Например, $y = \dfrac{1}{x}$ (рис. 3.3).

Если $k < 0$, то график функции расположен во второй и четвертой четверти координатной плоскости.

Например, $y = -\dfrac{1}{x}$ (рис. 3.4).

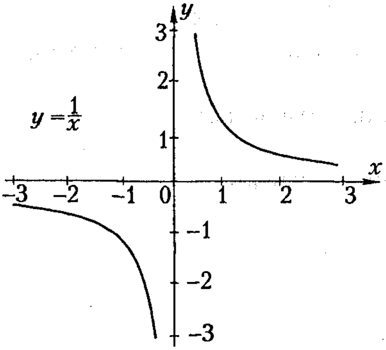


Рис. 3.3

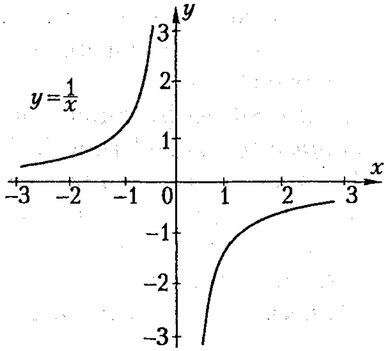


Рис. 3.4

3. ***Степенной*** называют функцию вида $y=x^n$, где n – действительное число, отличное от нуля:

а) если $n=2$, то $y=x^2$. $D(f): x\in \mathbf{R}$; $E(f): y\in [0;\ +\infty)$ (рис. 3.5);

б) если $n=3$, то $y=x^3$. $D(f): x\in \mathbf{R}$; $E(f): y\in \mathbf{R}$ (рис. 3.6);

в) если $n=\frac{1}{2}$, то $y=x^{\frac{1}{2}}$ или $y=\sqrt{x}$. $D(f): x\in [0;\ +\infty)$; $E(f): y\in [0;\ +\infty)$ (рис. 3.7);

г) если $n=\frac{1}{3}$, то $y=x^{\frac{1}{3}}$ или $y=\sqrt[3]{x}$. $D(f): x\in \mathbf{R}$; $E(f): y\in \mathbf{R}$ (рис. 3.8).

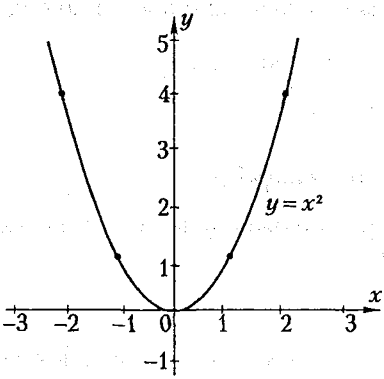


Рис. 3.5

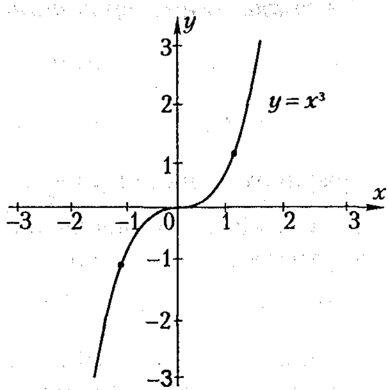


Рис. 3.6

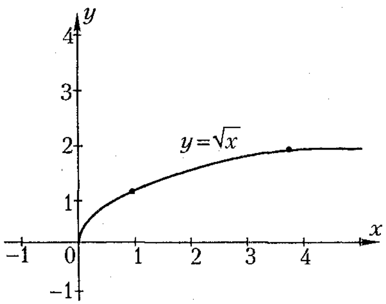


Рис. 3.7

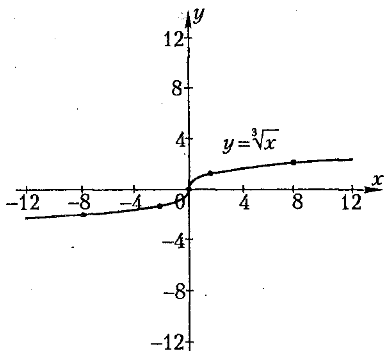


Рис. 3.8

4. ***Показательной*** называют функцию вида $y=a^x$, где a – const, $a>0$ и $a\neq1$. $D(f): x\in\mathbf{R}$; $E(f): y\in(0;\ +\infty)$.

Графиком показательной функции является *экспонента*.

Если $a>1$, то функция монотонно возрастает.

Например, $y=2^x$ (рис. 3.9).

Если $0<a<1$, то функция монотонно убывает.

Например, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 3.10).

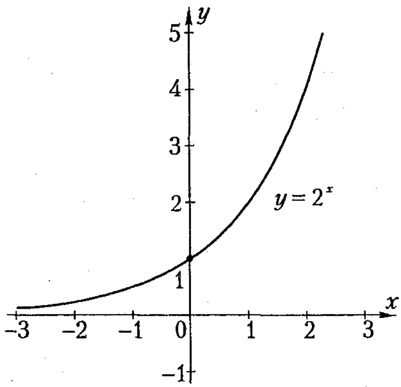


Рис. 3.9

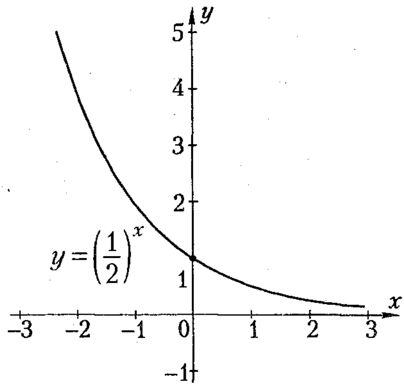


Рис. 3.10

5. ***Логарифмической*** называют функцию вида $y=\log_a x$, где a – действительное число, причем, $a>0$ и $a\neq1$.

$D(f): x \in (0;\ +\infty)$; $E(f): y \in \mathbf{R}$.

Если $a > 1$, то функция монотонно возрастает.

Например, $y = \log_2 x$ (рис. 3.11).

Если $0 < a < 1$, то функция монотонно убывает.

Например, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (рис. 3.12).

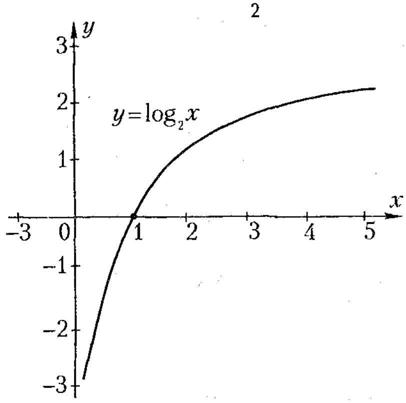


Рис. 3.11

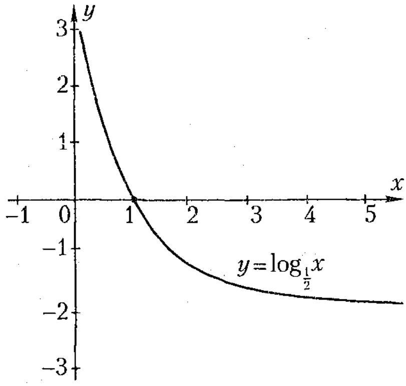


Рис. 3.12

6. К ***тригонометрическим*** относят функции:

1) $y = \sin x$. $D(f): x \in \mathbf{R}$; $E(f): y \in [-1;\ 1]$; основной период функции $T = 2\pi$ (рис. 3.13);

2) $y = \cos x$. $D(f): x \in \mathbf{R}$, $E(f): y \in [-1;\ 1]$; основной период функции $T = 2\pi$ (рис. 3.14);

3) $y = \operatorname{tg} x$. $D(f): x \in \{\mathbf{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\}, n \in \mathbf{Z}$; $E(f): y \in \mathbf{R}$; основной период функции $T = \pi$ (рис. 3.15);

4) $y = \operatorname{ctg} x$. $D(f): x \in \{\mathbf{R} / x \neq 0 + \pi n\}, n \in \mathbf{Z}$; $E(f): y \in \mathbf{R}$; основной период функции $T = \pi$ (рис. 3.16).

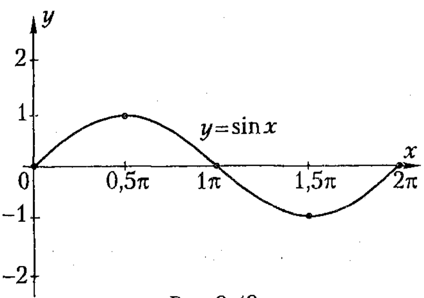


Рис. 3.13

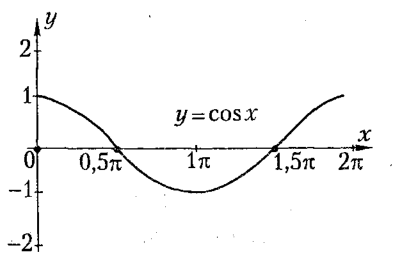


Рис. 3.14

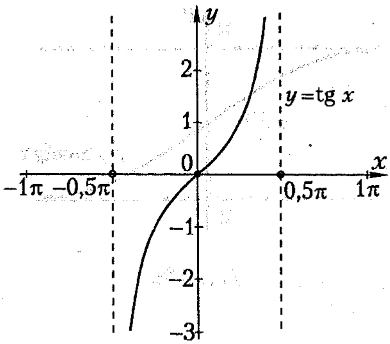


Рис. 3.15

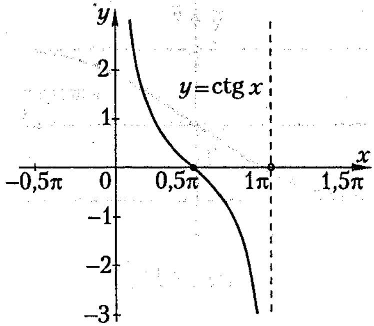


Рис. 3.16

Заметим, что на рисунках 3.13–3.16 показаны графики тригонометрических функций только на их основных периодах T.

7. К ***обратным тригонометрическим*** функциям относят:

1) $y = \arcsin x$. $D(f): x \in [-1; 1]$, $E(f)$: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 3.17);

2) $y = \arccos x$. $D(f): x \in [-1; 1]$, $E(f)$: $y \in [0; \pi]$ (рис. 3.18);

3) $y = \operatorname{arctg} x$. $D(f): x \in \mathbf{R}$, $E(f): y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 3.19);

4) $y = \operatorname{arcctg} x$. $D(f): x \in \mathbf{R}$, $E(f): y \in (0; \pi)$ (рис. 3.20).

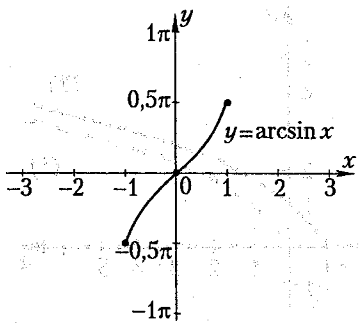


Рис 3.17

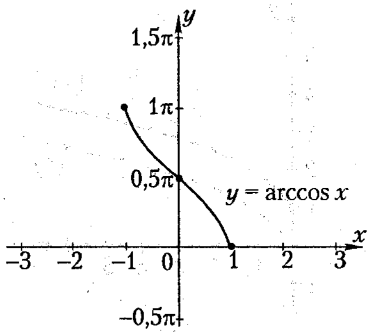


Рис. 3.18

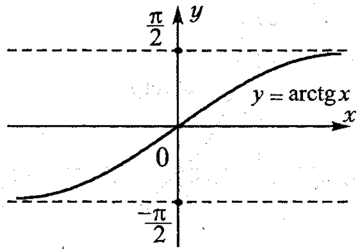


Рис. 3.19

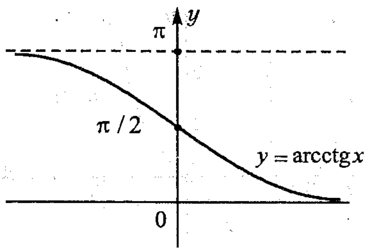


Рис. 3.20

3.3. Преобразования графиков функций

Во многих случаях график функции может быть получен в результате некоторых геометрических преобразований известного графика функции $y = f(x)$.

1. Построение графика функции $y = f(x) + b$: график функции $y = f(x)$ сдвигаем вдоль оси Oy на b единичных отрезков вверх при $b > 0$ или вниз при $b < 0$.

Например, согласно этому правилу построим график функции $y = \sqrt{x} + 1$ (1), предварительно построив график функции $y = \sqrt{x}$ (*) (рис. 3.21).

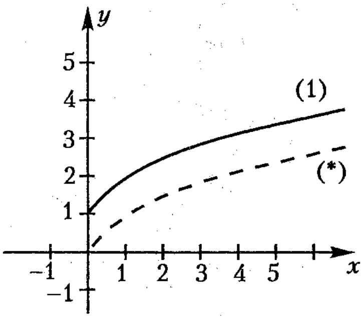


Рис. 3.21

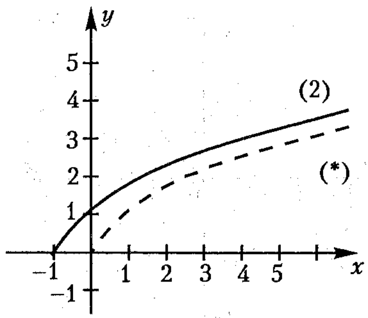


Рис. 3.22

2. Построение графика функции $y = f(x + a)$: график функции $y = f(x)$ сдвигаем вдоль оси Ox влево на a единичных отрезков при $a > 0$ или вправо при $a < 0$.

Например, в соответствии с этим правилом построим график функции $y=\sqrt{x+1}$ (2), предварительно построив график функции $y=\sqrt{x}$ (*) (рис. 3.22).

3. Построение графика функции $y=-f(x)$: график функции $y=f(x)$ отражаем симметрично оси Ox.

Например, построим график функции $y=-\log_a x$ (3), предварительно построив график функции $y=\log_a x$ (*), при условии, что $a>1$ (рис. 3.23).

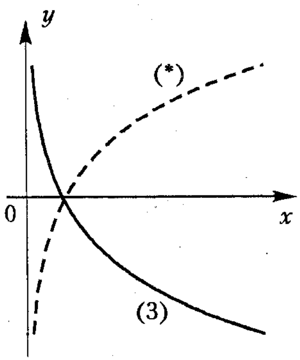


Рис. 3.23

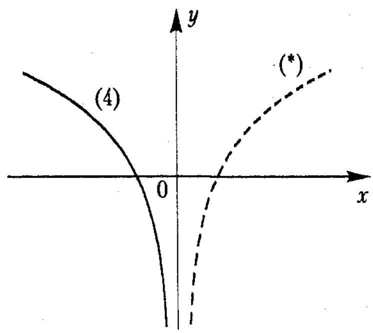


Рис. 3.24

4. Построение графика функции $y=f(-x)$: график функции $y=f(x)$ отражаем симметрично оси Oy.

Например, построим график функции $y=\log_a(-x)$ (4), предварительно построив график функции $y=\log_a x$ (*), при условии, что $a>1$ (рис. 3.24).

5. Построение графика функции $y=|f(x)|$: часть графика функции $y=f(x)$ над осью Ox оставляем, а ту, что под осью, отражаем симметрично этой оси.

Например, построим график функции $y=\left|\frac{k}{x}\right|$ (5), предварительно построив график функции $y=\frac{k}{x}$ (*) при условии, что $k>0$ (рис. 3.25).

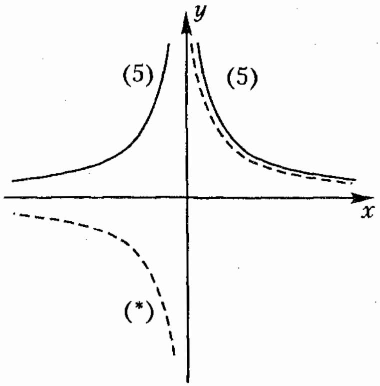


Рис. 3.25

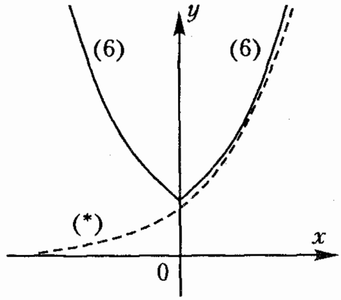


Рис. 3.26

6. Построение графика функции $y = f(|x|)$: часть графика функции $y = f(x)$ правее оси Oy оставляем и ее же отражаем симметрично этой оси.

Например, построим график функции $y = a^{|x|}$ (6), предварительно построив график функции $y = a^x$ (*) при условии, что $a > 1$ (рис. 3.26).

7. Построение графика функции $y = kf(x)$: каждую ординату точки графика функции $y = f(x)$ увеличиваем в k раз (растяжение графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy при $k > 1$ и сжатие – при $0 < k < 1$).

Например, построим график функции $y = \frac{1}{2} \cdot x^2$ (7), предварительно построив график функции $y = x^2$ (*) (рис. 3.27).

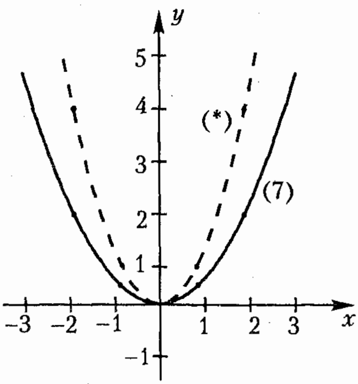


Рис. 3.27

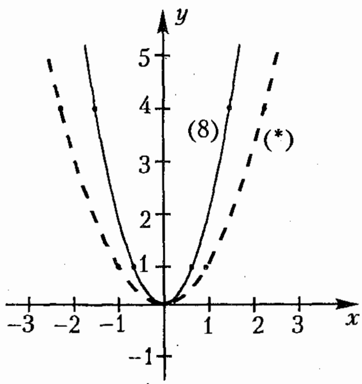


Рис. 3.28

8. Построение графика функции $y = f(kx)$: каждую абсциссу точки графика функции $y = f(x)$ увеличиваем в k раз (растяжение графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox при $k > 1$ и сжатие – при $0 < k < 1$).

Например, построим график функции $y = (2x)^2$ (8), предварительно построив график функции $y = x^2$ (*) (рис. 3.28).

Заметим, что если функция $y = f(x)$ тригонометрическая, то преобразование $y = f(kx)$ изменяет основной период функции.

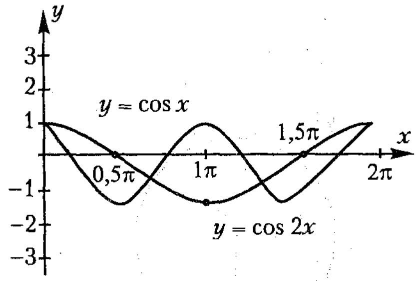


Рис. 3. 29

Например, рассмотрим функцию $y = \cos x$, основной период которой $T = 2\pi$. Тогда период функции $y = \cos kx$ найдем по формуле:

$$T_1 = \frac{T}{|k|} \text{ или } T_1 = \frac{2\pi}{|k|}.$$

На рисунке 3.29 изображены графики функций $y = \cos x$ и $y = \cos 2x$.

3.4. Изображения некоторых множеств точек на плоскости

Уравнением линии на плоскости называют уравнение с двумя переменными $F(x;\, y) = 0$ или $y = f(x)$, которому удовлетворяют координаты x (абсцисса) и y (ордината) любой точки данной линии.

Уравнение кривой $F(x;\, y) = 0$ задает функцию *неявно.*

Чтобы задать функцию явно, необходимо из уравнения кривой выразить одну координату через другую.

Например, рассмотрим уравнение гиперболы $xy = -3$. Выразив переменную x через переменную y, получим $x = -\frac{3}{y}$. А выразив переменную y через переменную x, получим $y = -\frac{3}{x}$.

Рассмотрим уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$, которое нельзя считать графиком некоторой функции, так как каждому значению x соответствует два значения y.

Например, если уравнение окружности имеет вид $x^2+y^2=2$, то при условии, что $x=1$, получим: $y=\pm 1$.

Однако если рассматривать не всю окружность, а только ее часть, то можно однозначно записать y, как функцию от x. Так, например, если взять часть окружности $x^2+y^2=2$, расположенную над осью абсцисс, то $y=\sqrt{2-x^2}$, а если взять часть окружности, расположенную под осью абсцисс, то $y=-\sqrt{2-x^2}$.

Рассмотрим расположение ***окружности*** на координатной плоскости (рис. 3.30 и 3.31).

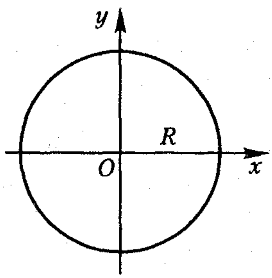


Рис. 3.30

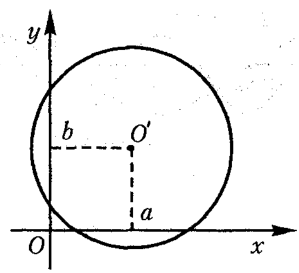


Рис. 3.31

1. Если уравнение окружности имеет вид $x^2+y^2=R^2$, то ее центр находится в точке $O(0;\ 0)$, а радиус равен R (рис. 3.30).

2. Если уравнение окружности имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, то ее центр находится в точке $O'(a;\ b)$, радиус равен R (рис. 3.31).

Заметим, что неравенству $x^2+y^2<R^2$ удовлетворяют координаты всех точек плоскости, лежащих внутри окружности $x^2+y^2=R^2$, а неравенству $x^2+y^2>R^2$ удовлетворяют координаты всех точек, лежащих вне этой окружности.

Рассмотрим расположение ***квадрата*** на координатной плоскости (рис. 3.32 и 3.33).

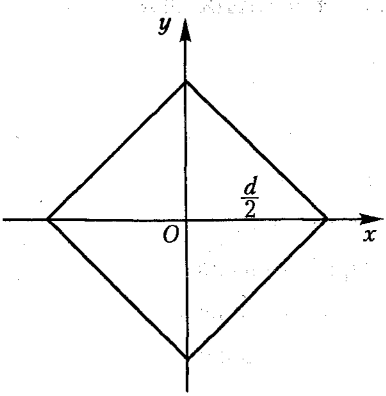


Рис. 3.32

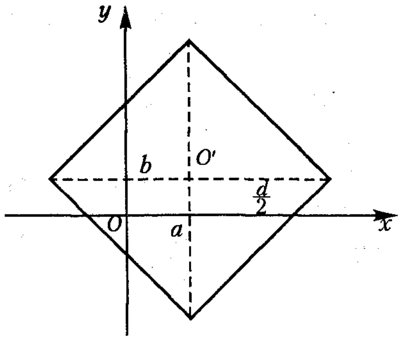


Рис. 3.33

Если уравнение квадрата имеет вид $|x|+|y|=\frac{d}{2}$, то точка $O(0;\ 0)$ – точка пересечения диагоналей квадрата, d – длина диагонали квадрата (рис. 3.32).

Если уравнение квадрата имеет вид $|x-a|+|y-b|=\frac{d}{2}$, то точка $O'(a;\ b)$ – точка пересечения диагоналей квадрата, d – длина диагонали квадрата (рис. 3.33).

Заметим, что неравенству $|x|+|y|<\frac{d}{2}$ удовлетворяют координаты всех точек плоскости, лежащих внутри квадрата $|x|+|y|=\frac{d}{2}$, а неравенству $|x|+|y|>\frac{d}{2}$ удовлетворяют координаты всех точек, лежащих вне этого квадрата.

Пересечение линий

Рассмотрим две линии, заданные уравнениями $f_1(x;\ y)=0$ и $f_2(x;\ y)=0$. Чтобы найти точку пересечения этих линий необходимо решить систему их уравнений $\begin{cases} f_1(x;\ y)=0, \\ f_2(x;\ y)=0. \end{cases}$ Число решений системы равно числу точек пересечения линий. Если же система решений не имеет, то линии не пересекаются.

Тест для проверки теоретических знаний

Установите соответствие (1–8):

1. Функция:

ФОРМУЛА	НАЗВАНИЕ
1) $y = kx + b$;	а) степенная;
2) $y = e^x$;	б) показательная;
3) $y = \lg x$;	в) логарифмическая;
4) $y = \sin x$;	г) тригонометрическая;
5) $y = \operatorname{arctg} x$;	д) иррациональная;
6) $y = x^n$;	е) линейная;
7) $y = \dfrac{k}{x}$.	ж) прямая пропорциональность;
	з) обратная пропорциональность;
	и) обратная тригонометрическая.

2. Функция:

ФОРМУЛА	ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
1) $y = x^{\frac{-1}{2}}$;	а) $x \in \mathbf{R}$;
2) $y = x^2$;	б) $x > 0$;
3) $y = x^{-3}$;	в) $x \geq 0$;
4) $y = \sqrt{x}$.	г) $x \in \mathbf{R} / x \neq 0$;
	д) $x \in \mathbf{N}$;
	е) $x \in \mathbf{Q}$.

3. Функция:

ФОРМУЛА	ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ	ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ
1) $y = \log_a x$;	а) $x \in \mathbf{R}$;	д) $y \in \mathbf{R}$;
2) $y = a^x$.	б) $x > 0$;	е) $y > 0$;
	в) $x \geq 0$;	ж) $y \geq 0$;
	г) $x < 0$.	з) $y < 0$.

4. Функция:

ФОРМУЛА	ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ	ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ
1) $y=\sin x$;	а) $\mathbf{R}$;	ж) $\mathbf{R}$;
2) $y=\cos x$;	б) $(0;\ +\infty)$;	з) $(0;\ +\infty)$;
3) $y=\operatorname{tg} x$;	в) $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;	и) $(0;\ \pi)$;
4) $y=\operatorname{ctg} x$.	г) $x\neq 2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;	к) $(-1;\ 1)$;
	д) $x\neq\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$;	л) $(0;\ 1]$;
	е) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.	м) $[-1;\ 1]$.

5. Функция:

ФОРМУЛА	ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ	ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ
1) $y=\arcsin x$;	а) $\mathbf{R}$;	ж) $\mathbf{R}$;
2) $y=\arccos x$;	б) $[-1;\ 1]$;	з) $(0;\ \pi)$;
3) $y=\operatorname{arctg} x$;	в) $(-1;\ 1)$;	и) $[0;\ \pi]$;
4) $y=\operatorname{arcctg} x$.	г) $-1\leq x\leq 1$;	к) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;
	д) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.	л) $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

6. Функция:

ФОРМУЛА	ПЕРИОД
1) $y=\sin(-x)$;	а) π;
2) $y=\cos kx$;	б) 2π;
3) $y=\operatorname{ctg} x$;	в) $k\pi$;
4) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{k}$.	г) $\frac{\pi}{k}$;
	д) $\frac{2\pi}{k}$;
	е) $2\pi k$.

7. Окружность:

УРАВНЕНИЕ	ЦЕНТР	РАДИУС
1) $x^2+y^2=R^2$;	а) $(-a;\ -b)$;	ж) $2R$;
2) $(x-a)^2+(y-b)^2=R$;	б) $(0;\ b)$;	з) R;
3) $(x+a)^2+(y+b)^2=2R$;	в) $(a;\ b)$;	и) $4R$;
4) $x^2+(y-b)^2=4R^2$.	г) $(0;-b)$;	к) $\sqrt{2R}$;
	д) $(a;\ -b)$;	л) $\sqrt{2}R$;
	е) $(0;\ 0)$.	м) $\sqrt{R}$.

8. Квадрат:

УРАВНЕНИЕ	ЦЕНТР	ДИАГОНАЛЬ
1) $\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=d$;	а) $(0;\ 0)$;	ж) d;
2) $\lvert x+a\rvert+\lvert y-b\rvert=\dfrac{d}{2}$;	б) $(a;\ --b)$;	з) $2d$;
3) $\lvert x-a\rvert+\lvert y+b\rvert=2d$;	в) $(-a;\ b)$;	и) $4d$;
4) $\lvert x+a\rvert+\lvert y\rvert=\sqrt{d}$.	г) $(a;\ 0)$;	к) d^2;
	д) $(-a;\ 0)$;	л) $2\sqrt{d}$;
	е) $(a;\ b)$.	м) $\dfrac{\sqrt{d}}{2}$.

Укажите все правильные варианты ответов (9–15):

9. Если кривые $f_1(x;\ y)=0$ и $f_2(x;\ y)=0$ имеют две точки пересечения, то система уравнений $\begin{cases} f_1(x;\ y)=0, \\ f_2(x;\ y)=0 \end{cases}$ имеет:

1) одно решение;
2) более одного решения;
3) два решения;
4) не менее двух решений;
5) менее трех решений.

10. График функции $y=f(x-a)+b$ получим в результате следующего преобразования:

1) график функции $y=f(x)$ сдвигаем вдоль оси Ox на a ед. отрезка вправо и вдоль оси Oy на b ед. отрезка вниз;

2) график функции $y=f(x)$ сдвигаем вдоль оси Ox на a ед. отрезка вправо и вдоль оси Oy на b ед. отрезка вверх;

3) график функции $y=f(x)$ сдвигаем вдоль оси Ox на a ед. отрезка влево и вдоль оси Oy на b ед. отрезка вниз;

4) график функции $y=f(x)$ сдвигаем вдоль оси Ox на a ед. отрезка влево и вдоль оси Oy на b ед. отрезка вверх.

11. График функции $y=-f(x)-b$ получим в результате следующего преобразования:

1) график функции $y=f(x)$ отражаем симметрично оси Oy и сдвигаем на b ед. отрезка вверх;

2) график функции $y=f(x)$ отражаем симметрично оси Oy и сдвигаем на b ед. отрезка вниз;

3) график функции $y=f(x)$ отражаем симметрично оси Ox и сдвигаем на b ед. отрезка вверх;

4) график функции $y=f(x)$ отражаем симметрично оси Ox и сдвигаем на b ед. отрезка вниз.

12. График функции $y=|f(-x)|$ получим в результате следующего преобразования:

1) график функции $y=f(x)$ отражаем симметрично оси Ox, часть полученного графика над осью Ox оставляем, а ту, что под осью, отражаем симметрично этой оси;

2) график функции $y=f(x)$ отражаем симметрично оси Ox и полученный график отражаем симметрично оси Oy;

3) часть графика функции $y=f(x)$ над осью Ox оставляем, а ту, что под осью, отражаем симметрично этой оси и полученный график отражаем симметрично оси Oy;

4) часть графика функции $y=f(x)$ над осью Oy оставляем, а ту, что под осью, отражаем симметрично этой оси и полученный график отражаем симметрично оси Ox.

13. График функции $y=f(|x+a|)$ получим в результате следующего преобразования:

1) часть графика функции $y=f(x)$ правее оси Oy оставляем и ее же отражаем симметрично этой оси, полученный график сдвигаем вдоль оси Ox на a ед. отрезка влево;

2) часть графика функции $y=f(x)$ правее оси Oy оставляем и ее же отражаем симметрично этой оси, полученный график сдвигаем вдоль оси Ox на a ед. отрезка вправо;

3) часть графика функции $y=f(x)$ выше оси Ox оставляем и ее же отражаем симметрично этой оси, полученный график сдвигаем вдоль оси Oy на a ед. отрезка влево;

4) часть графика функции $y=f(x)$ ниже оси Ox оставляем и ее же отражаем симметрично этой оси, полученный график сдвигаем вдоль оси Ox на a ед. отрезка влево.

14. График функции $y=|f(|x|)|$ получим в результате следующего преобразования:

1) часть графика функции $y=f(x)$ правее оси Oy оставляем и ее же отражаем симметрично этой оси, часть полученного графика над осью Ox оставляем, а ту, что под осью Ox, отражаем симметрично этой оси;

2) часть графика функции $y=f(x)$ левее оси Oy оставляем и ее же отражаем симметрично этой оси, часть полученного графика над осью Ox оставляем, а ту, что под осью Ox, отражаем симметрично этой оси;

3) график функции $y=f(x)$ отражаем симметрично оси Oy, часть полученного графика над осью Ox оставляем, а ту, что под осью Ox, отражаем симметрично этой оси;

4) часть графика функции $y=f(x)$ правее оси Oy оставляем и ее же отражаем симметрично этой оси, полученный график отражаем симметрично оси Ox.

15. График функции $y=nf(kx)$ получим в результате следующего преобразования:

1) абсциссы всех точек графика функции $y=f(x)$ увеличиваем в k раз, а ординаты уменьшаем в n раз;

2) абсциссы всех точек графика функции $y=f(x)$ уменьшаем в n раз, а ординаты – в k раз;

3) абсциссы всех точек графика функции $y=f(x)$ увеличиваем в n раз, а ординаты – в k раз;

4) абсциссы всех точек графика функции $y=f(x)$ увеличиваем в k раз, а ординаты – в n раз.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Вариант правильного ответа	1 – е, 2 – б, 3 – в, 4 – г, 5 – и, 6 – а, 7 – з	1 – б, 2 – а, 3 – г, 4 – в	1 – б – д, 2 – а – е	1 – а – м, 2 – а – м, 3 – е – ж, 4 – д – ж	1 – б – к, 2 – б – и, 3 – а – л, 4 – а – з
Номер задания	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Вариант правильного ответа	1 – б, 2 – д, 3 – а, 4 – в	1 – е – з, 2 – в – м, 3 – а – к, 4– б – ж	1 – а – з. 2 – в – ж, 3 – б – и, 4 – д – л	3	2

Номер задания	11	12	13	14	15
Вариант правильного ответа	4	3	1	1	4

Примеры

Пример 1. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=3$, $y=3x$ и $y=x-4$.

Решение. Построим на координатной плоскости данные прямые (рис. 3.34).

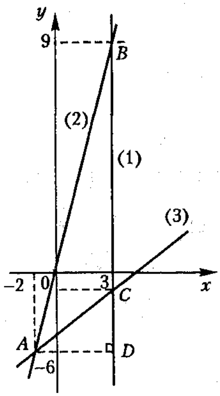


Рис. 3.34

Прямая $x=3$ (1) параллельна оси ординат и проходит через точку $(3;\ 0)$. Чтобы построить прямую $y=3x$ (2), необходимо знать две точки, принадлежащие этой прямой. Например, можно построить точки $(0;\ 0)$, $(3;\ 9)$ и провести через них прямую (2). Чтобы построить прямую $y=x-4$ (3), можно построить точки $(0;\ -4)$ и $(4;\ 0)$, принадлежащие этой прямой, и провести через них прямую (3).

Из рисунка 3.34 видим, что треугольник ABC ограничен данными прямыми. Площадь полученного треугольника найдем по формуле: $S=\frac{1}{2}ah_a$, т. е. $S=\frac{1}{2}BC\cdot AD$.

Найдем координаты точек пересечения прямых.

1. Найдем координаты точки A, решая систему уравнений $\begin{cases} y=3x, \\ y=x-4. \end{cases}$ Получим $A(-2;\ -6)$.

2. Найдем координаты точки B, решая систему уравнений $\begin{cases} x=3, \\ y=3x. \end{cases}$ Получим $B(3;\ 9)$.

3. Найдем координаты точки C, решая систему уравнений $\begin{cases} x=3, \\ y=x-4. \end{cases}$ Получим $C(3;\ -1)$.

Найдем длину отрезка BC, вычитая из ординаты точки B ординату точки C. Получим $BC=9-(-1)=10$. Найдем длину отрезка AD, вычитая из абсциссы точки C абсциссу точки A: $AD = 3-(-2) = 5$. Найдем площадь треугольника ABC:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25.$$

Ответ: 25.

Пример 2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств $\begin{cases} x+y \le 2, \\ y-x \le 2, \\ -2 \le y \le 0. \end{cases}$

Решение. Построим граничные прямые, соответствующие неравенствам заданной системы: $y=-x+2$ (1), $y=x+2$ (2), $y=0$ (3), $y=-2$ (4) (рис. 3.35). Система неравенств задает на координатной плоскости трапецию $ADEC$, площадь которой найдем по формуле $S = \frac{1}{2} \cdot (DE + AC) \cdot OK$.

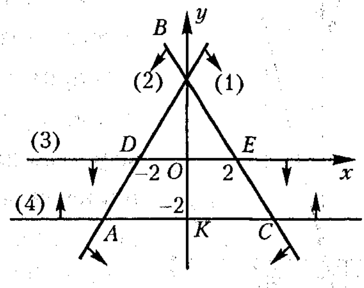


Рис. 3.35

Согласно рисунку 3.35 запишем: $DE = 4$, $OK = 2$.

Найдем координаты точки A, решая систему уравнений $\begin{cases} y = x+2, \\ y = -2. \end{cases}$ Получим $A(-4;\ -2)$. Аналогично найдем координаты точки C. Получим $C(4;\ -2)$. Тогда $AC = 8$.

Найдем площадь трапеции: $S = \frac{1}{2} \cdot (4+8) \cdot 2 = 12$.

Ответ: 12.

Пример 3. Найдите все целые значений параметра k, при которых уравнение $\left|3x^2 - 8|x| - 3\right| = -3k$ имеет шесть корней.

Решение. Решим уравнение графически, заменив его равносильной системой уравнений $\begin{cases} y = \left|3x^2 - 8|x| - 3\right|, \\ y = -3k. \end{cases}$

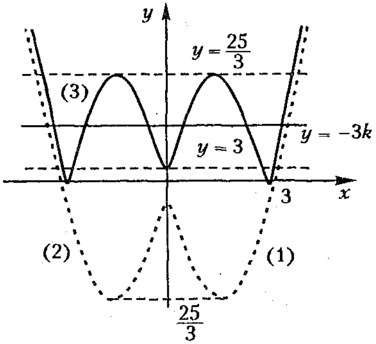


Рис.3.36

Построим схематически график функции $y=\left|3x^2-8|x|-3\right|$, предварительно построив графики функций $y=3x^2-8x-3$ и $y=3x^2-8|x|-3$.

1. Графиком функции $y=3x^2-8x-3$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты вершины параболы.

Согласно формулам $x_0=-\frac{b}{a}$, $y_0=f(x_0)$ получим: $x_0=\frac{4}{3}$, $y_0=3\cdot\frac{16}{9}-8\cdot\frac{4}{3}-3=-8\frac{1}{3}$.

Найдем нули функции (точки пересечения графика с осью абсцисс), решая уравнение $3x^2-8x-3=0$. Получим $x_1=-\frac{1}{3}$, $x_2=3$. Найдем точку пересечения графика с осью ординат: $f(0)=-3$. Построим график (1) (рис. 3.36).

2. Рассмотрим функцию $y=3x^2-8|x|-3$. Поскольку $x^2=|x|^2$, то запишем $y=3|x|^2-8|x|-3$. Построим график (2) этой функции, выполняя следующее преобразование: часть графика функции $y=3x^2-8x-3$ правее оси Oy оставим и ее же отразим симметрично этой оси (рис. 3.36).

3. Построим график (3) функции $y=\left|3|x|^2-8|x|-3\right|$, выполняя следующее преобразование: часть графика функции $y=3|x|^2-8|x|-3$, расположенной над осью Ox оставим, а ту, что под осью Ox, отразим симметрично этой оси (рис. 3.36).

Рассмотрим линейную функцию $y=-3k$. Построим семейство прямых, параллельных оси Ox так, чтобы они пересекали график функции $y=\left|3|x|^2-8|x|-3\right|$ в шести точках. Это возможно при условии, что $3<-3k<\frac{25}{3}$ или $-\frac{25}{9}<k<-1$. Очевидно, что промежутку $\left(-2\frac{7}{9};\ -1\right)$ принадлежит одно целое значение $k=-2$.

Ответ: -2.

Пример 4. Укажите все значения параметра a, при которых графики функций $y=\left|x^2-7ax\right|$ и $y=4a$ имеют две общие точки.

Решение. Построим схематически графики заданных функций (рис. 3.37).

1. Рассмотрим функцию $y=\left|x^2-7ax\right|$. Построим параболу, заданную уравнением $y=x^2-7ax$ (1). Определим координаты вершины параболы: $x_0=\frac{7a}{2}$; $y_0=\left(\frac{7a}{2}\right)^2-\frac{7a\cdot 7a}{2}$, $y_0=-\frac{49a^2}{4}$.

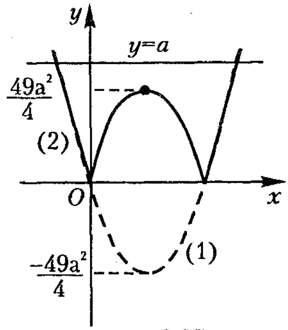


Рис. 3.37

Чтобы построить график функции $y=\left|x^2-7ax\right|$ (2), выполним следующее преобразование: часть графика функции $y=x^2-7ax$, расположенную над осью абсцисс, оставим, а ту, что под осью абсцисс, отразим симметрично этой оси.

2. Построим график функции $y=a$ (семейство прямых, параллельных оси Ox) так, чтобы графики функций $y=\left|x^2-7ax\right|$ и $y=a$ пересекались в двух точках. Очевидно, что прямая $y=a$ должна или совпадать с осью Ox, тогда $a=0$ или располагаться выше точки A (рис. 3.37), тогда $a>\frac{49a^2}{4}$.

Решим неравенство $a>\frac{49a^2}{4}$: $49a^2-4a<0$, $a(49a-4)<0$.

Согласно рисунку 3.38 запишем его решение: $a\in\left(0;\ \frac{4}{49}\right)$.

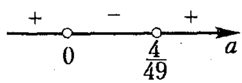


Рис. 3.38

Поскольку значение $a=0$ не является решением неравенства $a(49a-4)<0$, то прямую $y=0$ рассматривать не будем.

Ответ: $\left(0;\ \frac{4}{49}\right)$.

Пример 5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{x+8}{|x+8|}=|x+a|^2$ имеет один корень.

Решение. Решим уравнение графически, заменив его равносильной системой уравнений $\begin{cases} y=\dfrac{x+8}{|x+8|}, \\ y=(x+a)^2. \end{cases}$

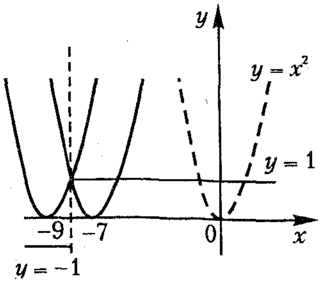


Рис. 3.39

1. Построим схематически график функции $y=\dfrac{x+8}{|x+8|}$ (рис. 3.39). Для этого найдем нули функции под знаком модуля: $x+8=0$, $x=-8$ и раскроем модуль на полученных промежутках, учитывая при этом, что $x=-8$ – точка разрыва функции.

Рассмотрим два случая: 1) если $x\in(-\infty;\ -8)$, то $y=-\dfrac{x+8}{x+8}$ или $y=-1$; 2) если $x\in(-8;\ +\infty)$, то $y=\dfrac{x+8}{x+8}$ или $y=1$.

2. Построим схематически график функции $y=(x+a)^2$, предварительно построив параболу $y=x^2$ (рис. 3.39).

Парабола $y=x^2$ и прямая $y=1$ имеют две общие точки. Так как согласно условию задачи графики функций $y=\dfrac{x+8}{|x+8|}$ и $y=(x+a)^2$ должны иметь только одну точку пересечения, то, выполняя параллельный перенос параболы $y=x^2$ на a единичных отрезков влево, заметим, что при $a=7$ парабола $y=(x+a)^2$ и прямая $y=1$ имеют одну точку пересечения, а при $a=9$ не имеют общих точек. Следовательно, если a принимает значения из промежутка $[7;\ 9)$, то графики функций $y=\dfrac{x+8}{|x+8|}$ и $y=(x+a)^2$ имеют одну общую точку, а уравнение $\dfrac{x+8}{|x+8|}=|x+a|^2$ имеет одно решение.

Ответ: $[7;\ 9)$.

Пример 6. Найдите количество всех целых чисел из области значений функции $y=\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}+2$, которые она принимает на промежутке $(-3;\ 4)$.

Решение. Запишем функцию

$y=\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}+2$ в виде $y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}+2$, откуда $y=|x-1|+|x+1|+2$, и построим схематически ее график (рис. 3.41).

1. Найдем нули функций, записанных под знаками модулей, решая уравнение $x-1=0$, откуда $x=1$ и уравнение $x+1=0$, откуда $x=-1$.

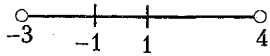


Рис. 3.40

2. Нанесем числа -1 и 1 на интервал $(-3;\ 4)$ (рис. 3.40) и раскроем модули на полученных промежутках.

Получим:

1) если $x\in(-3;\ -1]$, то $y=-x+1-x-1+2$ или $y=-2x+2$;

2) если $x\in(-1;\ 1]$, то $y=-x+1+x+1+2$ или $y=4$;

3) если $x\in(1;\ 4)$, то $y=x-1+x+1+2$ или $y=2x+2$.

Построим графики полученных функций на соответствующих промежутках (рис. 3.41).

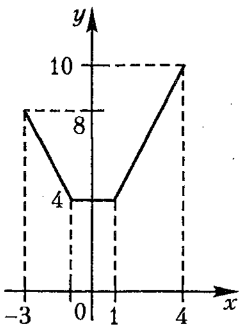


Рис. 3.41

Согласно рисунку 3.41 запишем область значений функции $y=\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}+2$ на промежутке $(-3;\ 4)$: $y\in[4;\ 10)$. Промежутку $[4;\ 10)$ принадлежит шесть целых чисел: 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ответ: 6.

Пример 7. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $|x-14|+|x+2|=-a^3$ имеет бесконечно много решений.

Решение. Решим уравнение графически, заменив его равносильной системой уравнений $\begin{cases} y=|x-14|+|x+2|, \\ y=-a^3. \end{cases}$

1. Построим схематически график функции $y=|x-14|+|x+2|$. Для этого найдем нули функций, записанных под знаками модулей, решая уравнения $x-14=0$, откуда $x=14$ и $x+2=0$, откуда $x=-2$. Раскроем модули на полученных промежутках и построим графики функций на этих промежутках (рис. 3.42):

1) если $x \in (-\infty;\ -2]$, то $y = -x + 14 - x - 2$ или $y = -2x + 12$; 2) если $x \in (-2;\ 14]$, то $y = -x + 14 + x + 2$ или $y = 16$; 3) если $x \in (14;\ +\infty)$, то $y = x - 14 + x + 2$ или $y = 2x - 12$.

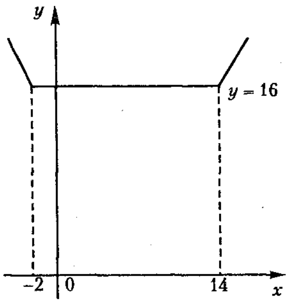


Рис. 3.42

Построим прямую $y = -a^3$ так, чтобы она имела с графиком функции $y = |x - 14| + |x + 2|$ бесконечно много общих точек. Очевидно, что это возможно в том случае, если $-a^3 = 16$, откуда $a = -2\sqrt[3]{2}$.

Ответ: $a = -2\sqrt[3]{2}$.

Пример 8. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = 8, \\ x^2 + y^2 = 4a \end{cases}$ имеет четыре решения.

Решение. Имеем уравнение квадрата $|x| + |y| = 8$ и уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4a$.

1. Построим квадрат с центром в точке $O(0;\ 0)$ и диагональю $d = 16$ (рис. 3. 43).

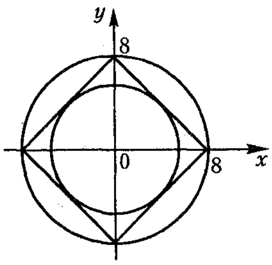


Рис. 3.43

Площадь квадрата найдем по формуле $S = \frac{1}{2}d^2$. Получим: $S = \frac{1}{2} \cdot 16^2 = 128$. С другой стороны площадь квадрата можно вычислить по формуле $S = x^2$, где x – сторона квадрата. Тогда $x^2 = 128$ и $x = 8\sqrt{2}$.

2. Построим окружность с центром в точке $O(0;\ 0)$ и радиусом $R = 2\sqrt{a}$ (рис. 3.43). Поскольку система уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = 8, \\ x^2 + y^2 = 4a \end{cases}$ имеет четыре решения, то окружность должна быть вписана в квадрат, тогда ее радиус $r = \frac{x}{2}$ или $2\sqrt{a} = \frac{8\sqrt{2}}{2}$, откуда $a = 8$ или описана около квадрата, тогда радиус окружности $R = \frac{d}{2}$ или $2\sqrt{a} = 8$, откуда $a = 16$.

Ответ: 8; 16.

Пример 9. Найдите площадь и периметр фигуры, заданной неравенством $|x-20|+|y-2|\leq 22$.

Решение. Неравенству $|x-20|+|y-2|\leq 22$ удовлетворяют координаты всех точек плоскости, расположенных внутри квадрата $|x-7|+|y+2|=10$ и на его границе.

Построим квадрат с центром в точке $O'(7;\ 2)$ и диагональю $d=44$ (рис. 3. 44). Найдем площадь квадрата. Согласно формуле $S=\frac{1}{2}d^2$ получим $S=\frac{1}{2}\cdot 44^2=968$.

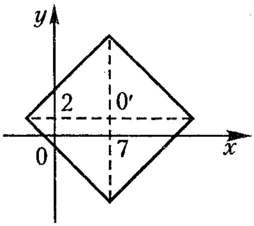


Рис. 3.44

С другой стороны площадь квадрата находят по формуле $S=a^2$, где a – сторона квадрата.

Тогда $a^2=968$ и $a=22\sqrt{2}$. Найдем периметр квадрата: $P=4a=88\sqrt{2}$.

Ответ: $S=968$, $P=88\sqrt{2}$.

Пример 10. Найдите длину отрезка, концы которого лежат на графике функции $f(x)=15|x|^{51}+\sqrt[3]{x}-\frac{16}{x}+\cos x+\log_5|x|$, а ось ординат является для него серединным перпендикуляром.

Решение. Рассмотрим отрезок AB, который пересекает ось ординат в точке D, а концы его лежат на графике функции $f(x)=15|x|^{51}+\sqrt[3]{x}-\frac{16}{x}+\cos x+\log_5|x|$ (рис. 3.45).

Так как ось ординат является серединным перпендикуляром отрезка AB, то $AD=DB$ и $AB\perp OD$. В таком случае справедливо равенство $f(x)=f(-x)$.

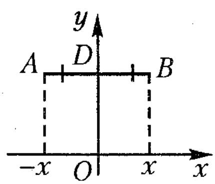


Рис. 3.45

Следовательно,

$$15|x|^{51}+\sqrt[3]{x}-\frac{16}{x}+\cos x+\log_5|x|=$$
$$=15|x|^{51}-\sqrt[3]{x}+\frac{16}{x}+\cos x+\log_5|x|.$$

Упростим полученное уравнение и найдем значение x:

$$\sqrt[3]{x}-\frac{16}{x}=-\sqrt[3]{x}+\frac{16}{x},\ 2\sqrt[3]{x}=\frac{2\cdot 16}{x},\ \sqrt[3]{x}=\frac{16}{x},\ x=\frac{16^3}{x^3},$$
$$x^4=2^{4\cdot 3},\ x=\pm 8$$

Найдем длину отрезка AB: $AB=8-(-8)=16$.

Ответ: 16

Задачи для самостоятельного решения

Найдите область определения функций (1–3):

1. $f(x)=\ln x-\sqrt{\ln x^2}$.

2. $f(x)=\lg\sqrt{(-x)^2}$.

3. $|y|=\log_{\frac{1}{2}}|x|$.

4. Укажите область значений функций (4–6):

а) $y=-x^2+4x-5$; **б)** $y=-x^2+4|x|-5$;
в) $y=\left|-x^2+4x-5\right|$; **г)** $y=\left|-x^2+4|x|-5\right|$.

а) $y=\log_{0,5}x$; **б)** $y=\log_{0,5}(-x)$; **в)** $y=\log_{0,5}|x|$;

г) $y=\left|\log_{0,5}x\right|$; **д)** $y=\left|\log_{0,5}|x|\right|$.

а) $y=\sin x$; **б)** $y=2\sin x$; **в)** $y=\sin 2x$; **г)** $y=\sin 0,5x$.

7. Укажите область значений функции $y=-2^{-|x|}$.

8. Найдите область значений функции $y=\log_2\sin x\cos x$.

9. Найдите целые числа, не принадлежащие области значений функции $y=x+|x|\cdot x^{-1}$.

10. Найдите $|M-m|$, если m – наименьшее, а M – наибольшее значения функции $|y|=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$ на промежутке $(0;\ \pi)$.

11. Найдите среднее арифметическое целых чисел, принадлежащих области значений функции $y=\left|\cos|x|\right|$.

12. Найдите сумму наименьшего и наибольшего значений функции $y=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-8x+16}$ на отрезке $[0;\ 8]$.

13. Укажите, какие из заданных функций являются четными, нечетными и какие не являются ни четными, ни нечетными (общего вида):

а) $y=-4x^2-4-\mathrm{tg}^6 x$; б) $y=\sin\pi x+\cos(-x)$;

в) $y=\sqrt{x}+x|x|$; г) $y=\log_2^2(x+3)-x^3$; д) $y=\sqrt{\cos^2 x}+x^4$;

е) $y=-\arcsin 5x$; ж) $y=\arccos 5x$; з) $y=e^x+e^{-x}+e$.

14. Найдите нули функции $y=\log_2 \sin x$ на промежутке $(0;+\infty)$.

15. Найдите нули функции $y=\left|\log_{2^{-1}}|x|\right|$.

16. Найдите нули функции
$y=\cos\left(\pi\cdot\left(3x-x^2+6\right)\right)-x^2+8x-17$.

17. Решите уравнение $\cos x+\sin 6x=2$.

18. Решите уравнение $\sqrt{25-x^2}=\log_5\left||x|-5\right|$.

19. Определите количество корней уравнения
$x^2-x+2{,}35=2\sin x$.

20. Найдите длину отрезка, концы которого лежат на графике функции $f(x)=13e^{-x}+13e^{x}+x^3\cdot\sin(-x)+|-x|^5+x^3-64x^{-3}$, а ось ординат является для него серединным перпендикуляром.

21. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|x^2-6x-5a^2\right|=-4a$:

а) не имеет решений;

б) имеет два решения;

в) имеет четыре решения.

22. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2+3a|x|-9+a^2=0$:

а) имеет одно решение;

б) имеет два решения;

в) имеет три решения;

г) имеет четыре решения;

д) не имеет решений.

23. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\left|x^2+3a|x|\right|=a^2-9$:

а) имеет одно решение;

б) имеет два решения;

в) имеет три решения;

г) имеет четыре решения;

д) имеет пять решений;

е) имеет шесть решений;

ж) не имеет решений.

24. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{|x+6|}{x+6}=\sqrt[6]{(x+6)^6}$ имеет один корень.

25. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(x+1)^3\cdot|x-2|^3=a^6$ имеет три корня.

26. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $||2x-2|+3|=-a$:

а) имеет один корень;

б) имеет два корня;

в) не имеет корней.

27. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $x^2+(y-1)^2=1$ и $|x|+|y-1|=a$ имеет четыре решения.

28. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $2x+2y=7$, $x-y=0$ и $y=3$.

29. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного прямыми $x+y=2$, $5x+5y=3$ и осями координат.

30. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств $\begin{cases}2x+y\geq 0,\\ x+y\leq 0,\\ 1\leq x\leq 5.\end{cases}$

31. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=6-x$, $2y=2x+12$, $y=|x|$.

32. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством $(x+3)^2+(y-5)^2\leq 7$.

33. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством $|x+3|+|y-5|\leq 7$.

34. Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases}x^2+y^2\geq 3,\\ x^2+y^2\leq 9.\end{cases}$

35. Найдите площадь фигуры, заданной системой неравенств $\begin{cases}|x-1|+|y+1|\leq 3,\\ |x-1|+|y+1|\geq 1.\end{cases}$

Ответы: **1.** $[1;\ +\infty)$. **2.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$. **3.** $[-1;\ 0)\cup(0;\ 1]$. **4.** а) $(-\infty;\ -1]$; б) $(-\infty;\ -1]$; в) $[1;+\infty)$; г) $[1;+\infty)$. **5.** а) R; б) R; в) R; г) $[0;\ +\infty)$; д) $[0;\ +\infty)$. **6.** а) $[-1;\ 1]$; б) $[-2;\ 2]$; в) $[-1;\ 1]$; г) $[-1;\ 1]$. **7.** $[-1;\ 0)$. **8.** $(-\infty;\ -1]$. **9.** – 1, 0 и 1. **10.** 2. **11.** 0,5. **12.** 10. **13.** а) четная; б) общего вида; в) общего вида; г) общего вида; д) четная; е) не четная; ж) общего вида; з) четная. **14.** $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{N}$ и $n=0$. **15.** $\{-1;\ 1\}$. **16.** 4. **17.** $\varnothing$. **18.** $\varnothing$. **19.** 0. **20.** 4. **21.** а) $a>0$; б) $a=0$; в) $a<0$. **22.** а) $a=3$; б) $a\in(-3;\ 3)$; в) $a=-3$; г) $a\in(-\infty;\ -3)$; д) $a\in(3;\ +\infty)$. **23.** а) $a=3$; б) $a\in(3;\ +\infty)$; в) $a=-3$; г) $\varnothing$; д) $\varnothing$; е) $a\in(-\infty;\ -3)$; ж) $a\in(-3;\ 3)$. **24.** $[5;\ 7)$. **25.** $|a|<1{,}5;\ a\neq 0$. **26.** а) $a=3$ или $a=-3$; б) $a\in(-\infty;\ -3)$ или $a\in(3;\ +\infty)$; в) $a\in(-3;\ 3)$. **27.** $a=1$ или $a=\sqrt{2}$. **28.** $\frac{25}{16}$. **29.** $\frac{91}{50}$. **30.** 12. **31.** 18. **32.** 7π. **33.** 98. **34.** 6π. **35.** 16.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Точка $A(3;\ 4)$ принадлежит графику функции $y=a\sqrt{x}$ при значении a равном	1) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; 2) $4\sqrt{3}$; 3) −4; 4) 2; 5) 3.
2	Сумма абсцисс точек графика функции $y=x^2-5x+3$, у которых абсцисса и ордината отличаются только знаком, равна	1) −4; 2) 4; 3) 0; 4) 8; 5) −8.
3	Найдите ab, если графики функций $y=x^2-ax+5$ и $y=ax+b$ имеют общую точку $M(2;\ 3)$	1) 1; 2) −6; 3) 6; 4) 9; 5) −9.
4	Если гипербола $y=-\frac{4}{x}$ и прямая $y=x-a$ имеют одну общую точку, то значение a равно	1) −4; 2) 4; 3) −2; 4) 2 или 4; 5) −4 или 4.

№	Задания	Варианты ответов
5	Задайте формулой функцию, график которой симметричен графику функции $y=x^2-6x+10$ относительно оси Oy	1) $y=-x^2-6x+10$; 2) $y=x^2+6x+10$; 3) $y=x^2-6x-10$; 4) $y=x^2+6x-10$; 5) $y=x^2-6x$.
6	Сумма всех целых чисел из множества значений функции $y=(\sin(\pi-x)-\cos(x-\pi))^2$ равна	1) 10; 2) 12; 3) 0; 4) 2; 5) 3.
7	Количество решений уравнения $\sin(2x+0{,}5\pi)=x^2+1$ равно	1) 7; 2) 4; 3) 2; 4) 1; 5) 2.
8	Если $(x_0;\, y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases}2x=3\lvert -y\rvert+1,\\ \lvert -x\rvert+2y=4,\end{cases}$ то значение выражения $y_0-2^{-1}x_0$ равно	1) –10; 2) –1,2; 3) 0; 4) 2,2; 5) 37.
9	Число точек пересечения параболы $y=x^2+1$ и кривой $y=5\lvert 0{,}6x^2-1\rvert$ равно	1) 4; 2) 3; 3) 2; 4) 1; 5) 6.
10	Число решений уравнения $\arcsin(-x)=-x$ равно	1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 4; 5) 5.
11	Число решений уравнения $-\lg x=\cos(\pi+x)$ равно	1) 4; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 8.
12	Среднее арифметическое корней уравнения $\lvert 2-x\rvert=\lvert 1-\sqrt{x}\rvert+1$ равно	1) $\frac{5}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 2,5; 4) 5; 5) 1.

№	Задания	Варианты ответов
13	Сумма корней уравнения $\left\|\left\|1-x^2\right\|-3\right\|=x+2$ равна	1) 4; 2) 2; 3) –2; 4) 10; 5) 13.
14	Площадь фигуры, заданной неравенством $\|x+2\|+\|y-2\|\le 2{,}5$, равна	1) 4; 2) 8; 3) 1,2; 4) 12,5; 5) 5.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	1	2	5	5	2	5	4
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	3	1	3	4	1	2	4

4 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

4.1. Линейные уравнения

Уравнение вида $ax=b$ называют *линейным.*

Исследование решения линейного уравнения:

1) если $a\neq 0$ и $b\in \mathbf{R}$, то уравнение $ax=b$ имеет одно решение: $x=\dfrac{b}{a}$;

2) если $a=0$ и $b=0$, то уравнение $ax=b$ примет вид $0\cdot x=0$. Поскольку получили верное числовое равенство $0=0$, то уравнение $ax=b$ имеет бесконечное множество решений: $x\in \mathbf{R}$;

3) если $a=0$ и $b\neq 0$, то уравнение $ax=b$ примет вид $0\cdot x=b$. Поскольку равенство $0=b$ не верно, то уравнение $ax=b$ корней не имеет: $x\in\varnothing$.

4.2. Исследование систем линейных уравнений

Рассмотрим прямые $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ и составим систему линейных уравнений $\begin{cases} y=k_1x+b_1, \\ y=k_2x+b_2. \end{cases}$

1. Система имеет ***одно решение*** (прямые пересекаются), если

$$k_1\neq k_2.$$

Угол между этими прямыми находят по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|.$$

Если выполняется условие $k_1k_2=-1$, то прямые перпендикулярны.

2. Система ***не имеет решений*** (прямые параллельны), если

$$k_1=k_2 \text{ и } b_1\neq b_2.$$

3. Система имеет ***бесконечное множество решений*** (прямые совпадают), если $k_1=k_2$ и $b_1=b_2$.

4.3. Линейные неравенства

Неравенство вида $ax < b$ ($>$; $\le$; $\ge$) называют *линейным*.

Исследование решения линейного неравенства:

1) если $a > 0$ и $b \in \mathbf{R}$, то $x < \dfrac{b}{a}$ – решение неравенства $ax < b$;

2) если $a < 0$ и $b \in \mathbf{R}$, то $x > \dfrac{b}{a}$ – решение неравенства $ax < b$;

3) если $a = 0$ и $b < 0$, то неравенство $ax < b$ примет вид $0 < b$, что не верно. Следовательно, данное неравенство не имеет решений: $x \in \varnothing$;

4) если $a = 0$ и $b > 0$, то неравенство $ax < b$ примет вид $0 < b$, что верно. Следовательно, данное неравенство имеет бесконечное множество решений: $x \in \mathbf{R}$.

Систему двух неравенств записывают в виде

$$\begin{cases} f_1(x) < g_1(x), \\ f_2(x) < g_2(x). \end{cases}$$

Чтобы *решить систему неравенств*, необходимо найти множества решений каждого неравенства системы, тогда общая часть (пересечение) этих множеств и будет решением данной системы неравенств.

Совокупность двух неравенств записывают в виде

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x) < g_1(x), \\ f_2(x) < g_2(x). \end{array} \right.$$

Чтобы *решить совокупность неравенств*, необходимо найти множества решений каждого неравенства совокупности, тогда объединение этих множеств и будет решением данной совокупности неравенств.

Тест для проверки теоретических знаний

Установите соответствие (1–4):

1. Уравнение вида $kx = b$ имеет:

РЕШЕНИЕ	ПРИ УСЛОВИИ
1) одно решение;	а) $k = 0$;
2) более одного решения;	б) $k \ne 0$;

РЕШЕНИЕ	ПРИ УСЛОВИИ
3) не имеет решений.	в) $k \neq 0$ и $b \in \mathbf{R}$;
	г) $k = 0$ и $b = 0$;
	д) $k = 0$ и $b \neq 0$.

2. Неравенство вида $kx > b$ имеет:

РЕШЕНИЕ	ПРИ УСЛОВИИ
1) $x > \frac{b}{k}$;	а) $k > 0$ и $b \in \mathbf{R}$;
2) $x < \frac{b}{k}$;	б) $k < 0$ и $b \in \mathbf{R}$;
3) $x \in \mathbf{R}$;	в) $k = 0$ и $b \neq 0$;
4) $x \in \varnothing$.	г) $k = 0$ и $b \in \mathbf{R}$;
	д) $k = 0$ и $b > 0$;
	е) $k = 0$ и $b < 0$.

3. Система уравнений $\begin{cases} y = k_1x + b_1, \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ имеет:

РЕШЕНИЕ	ПРИ УСЛОВИИ
1) одно решение;	а) $k_1 = k_2$;
2) более одного решения;	б) $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$;
3) не имеет решений.	в) $k_1 \neq k_2$;
	г) $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$;
	д) $b_1 = b_2$.

4. Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ пересекаются:

ПОД УГЛОМ	ПРИ УСЛОВИИ
1) $90°$;	а) $k_1 \neq k_2$;
2) $0°$;	б) $b_1 \neq b_2$;
3) $\operatorname{arctg}\left\lvert\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}\right\rvert$.	в) $k_1k_2 = 1$;
	г) $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$;
	д) $k_1k_2 = -1$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Вариант правильного ответа	1 – в, 2 – г, 3 – д.	1 – а, 2 – б, 3 – е, 4 – д.	1 – в, 2 – г, 3 – б.	1 – д, 2 – г, 3 – а.

Примеры

Пример 1. Найдите все значения a и b, при которых уравнение $5ax - 2b = x$ имеет бесконечно много решений.

Решение. Приведем уравнение к виду $kx = b$. Запишем:

$$5ax - x = 2b\,,\ x(5a-1) = 2b\,.$$

Уравнение имеет бесконечно много решений, если $5a-1=0$ и $2b=0$, то есть если $a=0{,}2$ и $b=0$.

Ответ: $a=0{,}2$, $b=0$.

Пример 2. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\,1)$ и образующей с осью Ox угол $30°$.

Решение. Уравнение прямой имеет вид $y=kx+b$. Угловой коэффициент k прямой находят по формуле $k=\operatorname{tg}\alpha$ (см. п. 3.2). Зная, что $\alpha=30°$, получим $k=\operatorname{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Поскольку искомая прямая проходит через точку $M(2;\,1)$, то, подставляя в уравнение прямой координаты точки M $x=2$, $y=1$ и значение $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$, найдем значение b:

$$1=\frac{2\sqrt{3}}{3}+b\text{, откуда } b=-\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\,.$$

Зная значения k и b, запишем уравнение искомой прямой:

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\,.$$

Ответ: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

Пример 3. Найдите угол между прямыми

$$y=\frac{7}{2}x+1 \text{ и } y=-\frac{4}{3}x+2\,.$$

Решение. Угол между прямыми найдем по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|.$$

Зная, что $k_1 = \frac{7}{2}$, а $k_2 = -\frac{4}{3}$, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{-\frac{4}{3}-\frac{7}{2}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{2}}\right| = \left|\frac{-\frac{29}{6}}{-\frac{22}{6}}\right| = \frac{29}{22}, \text{ откуда } \alpha = \operatorname{arctg}\frac{29}{22}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{29}{22}$.

Пример 4. Найдите сумму координат точки пересечения прямых $3x-5y=27$ и $2x+3y=18$.

Решение. Координаты точки пересечения заданных прямых найдем, решая систему уравнений $\begin{cases}3x-5y=27,\\2x+3y=18.\end{cases}$

Выполним ряд преобразований.

1. Умножим первое уравнение системы на 3, а второе на 5. Получим: $\begin{cases}9x-15y=81,\\10x+15y=90.\end{cases}$

2. Сложим уравнения системы: $19x=171$, откуда $x=9$.

3. Подставим значение $x=9$ в любое уравнение системы, например в уравнение $3x-5y=27$, и найдем значение y: $27-5y=27$, откуда $y=0$.

4. Найдем сумму координат точки пересечения заданных прямых: $9+0=9$.

Ответ: 9.

Пример 5. Найдите все значения a, при которых система уравнений $\begin{cases}-1{,}4x+0{,}4ay+1=0,\\(1-0{,}75a)x+ay-1{,}75=0\end{cases}$ не имеет решений.

Решение. Запишем каждое уравнение системы в виде:

$$y=kx+b.$$

Преобразуем первое уравнение системы, предварительно умножив его на 5:

$$-7x+2ay+5=0,\ 2ay=7x-5,\ y=\frac{7}{2a}x-\frac{5}{2a}.$$

Получим $k_1=\frac{7}{2a}$, $b_1=-\frac{5}{2a}$.

Преобразуем второе уравнение системы, предварительно умножив его на 4:

$$(4-3a)x+4ay=7\ ,\ 4ay=(3a-4)x+7\ ,\ y=\frac{3a-4}{4a}x+\frac{7}{4a}.$$

Получим $k_2=\frac{3a-4}{4a}$, $b_2=\frac{7}{4a}$.

Рассмотрим два случая.

1. Если $a\neq 0$, то исходная система не имеет решений при условии, что $\begin{cases}k_1=k_2,\\ b_1\neq b_2\end{cases}$ или $\begin{cases}\frac{7}{2a}=\frac{3a-4}{4a},\\ -\frac{5}{2a}\neq\frac{7}{4a}\end{cases}$; $\Leftrightarrow\begin{cases}7=\frac{3a-4}{2},\\ -5\neq\frac{7}{2}\end{cases}$.

Найдем значение a из первого уравнения системы:

$$3a-4=14\ ,\ 3a=18\ ,\ a=6\,.$$

2. Рассмотрим исходную систему при условии, что $a=0$. Подставляя значение $a=0$ в каждое уравнение этой системы, получим: $\begin{cases}7x=5,\\ 4x=7;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{5}{7},\\ x=\frac{7}{4}.\end{cases}$ Так как $\frac{5}{7}\neq\frac{7}{4}$, то при $a=0$ система не имеет решения.

Ответ: $\{0;\,6\}$.

Пример 6. Найдите середину интервала, являющегося решением системы неравенств $\begin{cases}-2<2x-1<1,\\ \left(2\sqrt{5}-5\right)(3-5x)<0.\end{cases}$

Решение. Решим каждое неравенство системы:

1) $-2<2x-1<1\Leftrightarrow -1<2x<2\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<1$;

2) $\left(2\sqrt{5}-5\right)(3-5x)<0\Leftrightarrow 3-5x>0\Leftrightarrow 5x-3<0\Leftrightarrow x<\frac{3}{5}$,

поскольку $2\sqrt{5}-5=\sqrt{20}-\sqrt{25}<0$.

Найдем решение данной системы неравенств. Согласно рисунку 4.1 запишем $x\in\left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{5}\right)$.

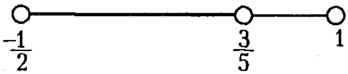


Рис. 4.1

Найдем середину интервала $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{5}\right)$. Получим:

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right):2=\frac{1}{20}=0{,}05\,.$$

Ответ: 0,05.

Пример 7. Найдите наибольшее целое решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} 2-\dfrac{5-x}{3} \geq x+1, \\ 3+\dfrac{x-1}{4} < 2-x. \end{array}\right.$

Решение. Найдем решение каждого неравенства совокупности, выполнив равносильные преобразования неравенств:

1) $2-\dfrac{5-x}{3} \geq x+1 \Leftrightarrow 6-5+x \geq 3x+3 \Leftrightarrow 2x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -1$;

2) $3+\dfrac{x-1}{4} < 2-x \Leftrightarrow 12+x-1 < 8-4x \Leftrightarrow 5x < -3 \Leftrightarrow x < -\dfrac{3}{5}$.

Поскольку решение второго неравенства совокупности содержит решение первого неравенства, то решением данной совокупности неравенств является промежуток $\left(-\infty;\ -\dfrac{3}{5}\right)$, а число -1 является наибольшим целым решением этой совокупности неравенств.

Ответ: -1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите все значения a и b, при которых уравнение $2bx-a=3x$ имеет бесконечно много решений.

2. Найдите все значения a и b, при которых неравенство $2bx-a \geq 3x$ не имеет решений.

3. Найдите такие значения a, при которых уравнение $\left(a^2-1\right)x+3-a=\left(-\sqrt{2}a\right)^2$:

а) имеет один корень;

б) имеет более одного корня;

в) не имеет корней.

4. Запишите уравнение прямой, которая параллельна прямой $y=3-7x$ и проходит через точку с координатами $(3;\ -7)$.

5. Запишите уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y=5x$ и проходит через точку с координатами $(0;\ -5)$.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 675{,}1x+324{,}9y=2675{,}1, \\ 32{,}49x+67{,}51y=232{,}49. \end{cases}$$

7. Найдите все значения m, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x+(m-1)y=3, \\ (m+1)x+4y=-3 \end{cases}$$

а) имеет бесконечно много решений; б) не имеет решений.

8. Найдите все значения a, при которых прямые
$2x-\left(2-(-3a)^2\right)y=3a$ и $y=1-x$:

а) параллельны; б) перпендикулярны.

9. Найдите угол между прямыми $2y=5-3x$ и $x+y=1$.

10. Найдите значение числа a, при котором система
$\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}+\dfrac{0,4x+1,2y}{2}=2, \\ \dfrac{x+2y}{2}+\dfrac{5y-x}{3}=3, \\ \dfrac{5x-y}{3}+\dfrac{10y-x}{2}=a \end{cases}$ имеет решение.

11. Найдите значение a, при котором система уравнений $\begin{cases} x-\left(1-4,5a^2\right)y=1,5a, \\ x+y=1 \end{cases}$ не имеет решений.

12. Найдите сумму целых решений системы неравенств
$\begin{cases} \dfrac{3x-3}{2}-2x+\dfrac{3x}{2}>3-\dfrac{3x+15}{2}, \\ \dfrac{x+5}{4}-6+7x<\dfrac{x+1}{2}. \end{cases}$

13. Найдите среднее арифметическое целых решений системы неравенств $\begin{cases} -1\le 2x-3\le 1, \\ 5-0,4x>0. \end{cases}$

14. Решите неравенство $a(2x-6)+6x+20\le 0$.

15. При каких значениях b наибольшее целое число, являющееся решением совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x<5, \\ x\le b \end{array}\right.$ равно 13?

16. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 5-\dfrac{3-x}{4}<2x+3, \\ 4+\dfrac{2x-1}{3}\ge 5-x. \end{array}\right.$

17. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} -1<3-2x<1, \\ 5x-3\ge 7-2x. \end{array}\right.$

Ответы: **1.** $a=0,\ b=1,5$. **2.** $a>0,\ b=1,5$. **3.** а) $a\ne\pm1$; б) 1; в) -1. **4.** $y=-7x+14$. **5.** $y=-\dfrac{1}{5}x-5$. **6.** (3; 2). **7.** а) -3; б) 3. **8.** а) $-\dfrac{2}{3}$; б) 0. **9.** $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}$. **10.** 7. **11.** $-\dfrac{2}{3}$. **12.** -1. **13.** 1,5. **14.** $x\ge\dfrac{2a}{a+3}$ при $a<-3$; $x\in\varnothing$ при $a=-3$; $x\le\dfrac{2a}{a+3}$ при $a>-3$. **15.** $13\le b<14$. **16.** $\left(\dfrac{5}{7};\ +\infty\right)$. **17.** $(1;\ +\infty)$.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Сумма целых чисел, между которыми заключен корень уравнения $\left(5+4x^{-1}\right)^{-1}=(-3)^{-2}$, равна	1) -1; 2) -2; 3) 0; 4) 1; 5) 2.
2	Ближайшее к корню уравнения $\left(5+\sqrt{27}\right)\cdot x=-2$ целое число равно	1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) 2; 5) -2.
3	Уравнение $15x+3a=3+x$ имеет отрицательное решение при условии, что a	1) $a\in\mathbf{R}$; 2) $a=0$; 3) $a<3$; 4) $a>1$; 5) $a\geq 1$.
4	Уравнение $a(2x-a)=-6x-9$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x<-2$, при условии, что a	1) $a<-1$; 2) $a\neq -3$; 3) $a\leq -1$; 4) $a\in\mathbf{R}$; 5) $a<-1$, $a\neq -3$.
5	Тангенс угла между прямыми $x-y=2$ и $4x+2y=5$ равен	1) 5; 2) -3; 3) -5; 4) 3; 5) -1.
6	Наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\left(3-\sqrt{10}\right)x>19-6\sqrt{10}$, равно	1) 31; 2) 7; 3) 2; 4) 0; 5) -1.
7	Область определения функции $y=\sqrt{-x+\sqrt{3-\sqrt{8}}+2}$ задает множество чисел вида	1) $x\in\mathbf{R}$; 2) $x\geq 1$; 3) $\left(-\infty;\sqrt{2}+1\right]$; 4) $\left(\sqrt{2}+1;\ +\infty\right)$; 5) $x>3-2\sqrt{2}$.
8	Решением системы неравенств $\begin{cases}x>2,\\ x\geq c\end{cases}$ является промежуток $(2;\ +\infty)$ при следующих значениях c	1) 2; 2) $(-\infty;\ 2)$; 3) $(-\infty;\ 2]$; 4) $[0;\ 2]$; 5) $[2;\ +\infty)$.
9	Решение системы неравенств $\begin{cases}\left(1-\sqrt{3}\right)x+\sqrt{12}\leq 4,\\ x\sqrt{243}\leq -27\end{cases}$ имеет вид	1) $\mathbf{R}$; 2) $(0;\ +\infty)$; 3) $\left[0;\ 2\sqrt{3}\right]$; 4) $\varnothing$; 5) $\left(-\infty;\ -8\sqrt{3}\right]$.

№	Задания	Варианты ответов
10	Решением совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x<1, \\ x>a \end{array}\right.$ является множество всех действительных чисел при следующих значениях a	1) $a \le 1$; 2) $a<1$; 3) $a=1$; 4) $a>1$; 5) $a \in \mathbf{R}$.
11	Если число -5 – наименьшее целое решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x \ge -2, \\ -x<-a, \end{array}\right.$ то целое значение a равно	1) -6; 2) -5; 3) 1; 4) 6; 5) 16.
12	Количество целых отрицательных решений совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} -3<1-2x \le -1, \\ 3x+1<4x+5 \end{array}\right.$ равно	1) 3; 2) 4; 3) 1; 4) 2; 5) 8.
13	Площадь фигуры, ограниченной линиями $3x-4y+12 \ge 0$, $x+y-2 \le 0$ и $y \ge 0$ равна	1) 7; 2) $\frac{15}{7}$; 3) $7\frac{5}{7}$; 4) 27; 5) 30.
14	Прямые $3x+ay=4$ и $3x+2y=\frac{b}{2}$ перпендикулярны, если	1) $a=4{,}5$, $b=0$; 2) $a \ne 2$, $b \in \mathbf{R}$; 3) $a=-4{,}5$, $b \in \mathbf{R}$; 4) $a=0$, $b \in \mathbf{R}$; 5) $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	5	1	4	5	4	5	3
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	3	4	2	1	1	3	3

5 КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

5.1. Квадратичная функция

Функцию вида $y=ax^2+bx+c$, где a, b, c – действительные числа $(a \neq 0)$, называют *квадратичной*.

Графиком квадратичной функции является парабола.

Координаты вершины параболы.

1. Если квадратичная функция представлена в виде $y=ax^2+bx+c$, то координаты вершины параболы находят по формулам $x_0=\frac{-b}{2a}$, $y_0=f(x_0)$.

2. Если квадратичная функция представлена в виде $y=(x-a)^2+b$, то координаты вершины параболы равны a и b, причем $x_0=a$, $y_0=b$.

Расположение параболы $y=ax^2+bx+c$ на координатной плоскости зависит от значения дискриминанта квадратного трехчлена и знака коэффициента a.

Возможны следующие случаи:

а) $a>0$ и $D>0$ (рис. 5.1);

б) $a>0$ и $D=0$ (рис. 5.2);

в) $a>0$ и $D<0$ (рис. 5.3);

г) $a<0$ и $D>0$ (рис. 5.4);

д) $a<0$ и $D=0$ (рис. 5.5);

е) $a<0$ и $D<0$ (рис. 5.6).

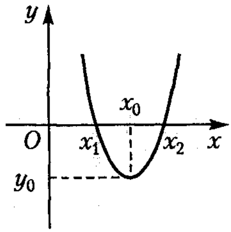


Рис. 5.1

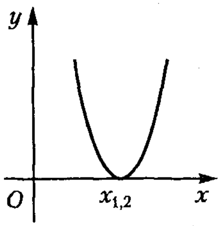


Рис. 5.2

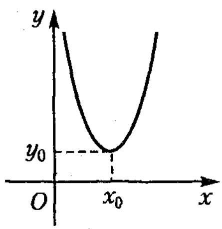


Рис. 5.3

Из рисунков 5.1, 5.2, 5.3 видим, что при условии, что $a>0$ наименьшим значением квадратичной функции является ордината вершины параболы, а область значений функции имеет вид: $E(f)=[y_0;\ +\infty)$.

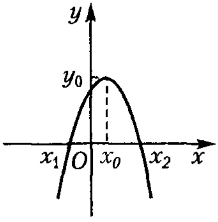


Рис. 5.4

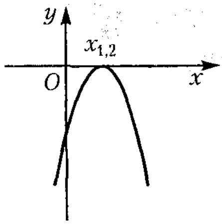


Рис. 5.5

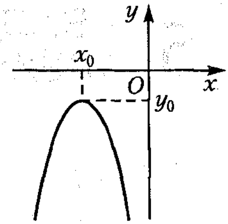


Рис. 5.6

Из рисунков 5.4, 5.5, 5.6 видим, что при условии $a<0$, наибольшим значением квадратичной функции является ордината вершины параболы, а область значений функции имеет вид:

$$E(f) = (-\infty;\ y_0].$$

5.2. Квадратные уравнения

Квадратным называют уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b и c – действительные числа и $a\neq 0$.

Квадратное уравнение вида $x^2+px+q=0$ называют приведенным. В приведенном уравнении коэффициент при x^2 равен единице.

Выражение $D=b^2-4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения.

Возможны три случая: $D>0$, $D=0$, $D<0$.

1. Если $D>0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня, определяемых по формуле:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

2. Если $D=0$, то квадратное уравнение имеет два равных действительных корня, определяемых по формуле:

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}.$$

3. Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Теорема Виета. Сумма корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ равна $-\frac{b}{a}$, а произведение корней этого уравнения равно $\frac{c}{a}$.

Теорема, ***обратная теореме Виета.*** Числа m и n являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$, если их сумма равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$.

Если имеем *приведенное квадратное уравнение* вида $x^2+px+q=0$, то сумма корней этого уравнения равна коэффициенту при переменной x, записанному с противоположным знаком, а произведение его корней равно свободному члену уравнения:

$$x_1+x_2=-p,\ x_1\cdot x_2=q.$$

Квадратный трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ можно ***разложить на линейные множители*** следующим образом:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где числа x_1 и x_2 – корни этого трехчлена.

Уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, где a, b и c – действительные числа и $a\neq 0$, называют биквадратным уравнением. С помощью подстановки $x^2=y$, это уравнение сводится к квадратному уравнению $ay^2+by+c=0$.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите правильный вариант ответа (1–5):

1. Если квадратичная функция представлена в виде $y=ax^2+bx+c$, то координаты x_0 и y_0 вершины параболы находят по формулам:

1) $x_0=\frac{-a}{2b}$, $y_0=f(x_0)$;

2) $x_0=\frac{b}{2a}$, $y_0=f(x_0)$;

3) $x_0=\frac{-b}{2a}$, $y_0=f(x_0)$;

4) $x_0=\frac{-b}{a}$, $y_0=f(x_0)$.

2. Если квадратичная функция представлена в виде $y=(x+a)^2+b$, то координаты x_0 и y_0 вершины параболы равны:

1) $x_0=a$, $y_0=b$;

2) $x_0=a$, $y_0=-b$;

3) $x_0=-a$, $y_0=b$;

4) $x_0=-a$, $y_0=-b$.

3. Областью значений квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является промежуток $[y_0;\ +\infty)$, если:

1) $a>0$ и $D>0$;

2) $a<0$ и $D=0$;

3) $a<0$ и $D<0$;

4) $a\neq 0$ и $D=0$.

4. Если числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$, то:

1) $x_1+x_2=-b$ и $x_1\cdot x_2=c$;

2) $x_1+x_2=b$ и $x_1\cdot x_2=c$;

3) $x_1+x_2=-\frac{b}{2a}$ и $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$;

4) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и. $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

5. Если числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$, то его разложение на линейные множители имеет вид:

1) $(x-x_1)(x-x_2)$;

2) $a(x-x_1)(x-x_2)$;

3) $a(x+x_1)(x+x_2)$;

4) $-a(x-x_1)(x-x_2)$.

Установите соответствие:

6. Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$:

ПРИ УСЛОВИИ	ИМЕЕТ КОРНИ
1) $a>0$ и $D<0$;	а) один;
2) $a<0$ и $D>0$;	б) два различных;
3) $a<0$ и $D=0$.	в) два равных;
	г) не имеет;
	д) более двух.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6
Вариант правильного ответа	3	3	1	4	2	1 – г, 2 – б, 3 – в

Примеры

Пример 1. Найдите значения параметра *a,* при которых наибольшее значение функции $y = 2ax^2 -4x+14a$ равно 12.

Решение. Функция может иметь наибольшее значение в случае, если она ограничена сверху, следовательно, данная функция не может быть линейной, и значит, *а^О.* Следовательно, имеем квадратичную функцию, графиком корой является парабола. Свое наибольшее значение квадратичная функция принимает в точке, которая является вершиной параболы, при условии, что ветви этой параболы направлены вниз, то есть, при условии, что $a <$ О (см. рис. 5.4).

По формулам * о = ^ ~ " *Уо = f(*o)* найдем координаты вершины параболы. Получим: x_0 =—• = — , z/₀ = 2а--у-—+14а,

г. *4а а* а а

w_0 = 14а— = —ᵃ ~ . Так как согласно условию задачи г/₀ = 12, то

14а -2 _|2 ; 7а² - 6а - 1 = 0, откуда $a_x = 1$, a_2 = ~ **4** - Учитывая, что $a <$ О, получим a = -$\frac{1}{}$.

1

Ответ: -—.

Пример 2. Найдите произведение целых значений параметра *a,* при которых вершина параболы $y = (x-27a)^2-a^2$ +6а+24 находится во второй четверти координатной плоскости.

Решение. Так как квадратичная функция представлена в виде y-$(x$-$a)^2$ *+Ь,* то запишем координаты вершины параболы:

$$x_Q = 21a\ ,\ y_0 - -a^2 + 6a + 24. \quad '$$

Так как вершина параболы находится во второй четверти координатной плоскости, то $x_0 < 0$ и $y_0 >$ О. Тогда

Г27а<0, Га<0,

\\-а²+6а+24>0; [а²-6а-24<0.

Поскольку решением первого неравенства системы является промежуток (-°**о;** 0), то решим второе неравенство системы на этом промежутке методом интервалов (см. п. 7.1).

1. Рассмотрим функцию / (а) = а² - 6а - 24.

2. Найдем нули функции, решая уравнение a^2 -6а - 24 = 0. Получим: a_1 = 3 - **V33,** a_2 = 3 + V33.

3. Нанесем нули функции на промежуток $(-\infty; 0)$ и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 5.7).

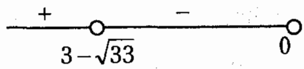


Рис. 5.7

4. Из рисунка 5.7 видим, что решением неравенства, а, следовательно, и системы неравенств, является интервал $(3-\sqrt{33}; 0)$. Этому интервалу принадлежит два целых числа -2 и -1, произведение которых равно 2.

Ответ: 2.

Пример 3. Составьте уравнение параболы с вершиной в точке $(-1; -1)$, если точка с координатами $(5; 0)$ принадлежит параболе.

Решение. Уравнение параболы имеет вид $y=ax^2+bx+c$. Согласно условию задачи абсцисса вершины параболы $x_0=-1$, следовательно, $-\frac{b}{2a}=-1$ и $b=2a$. Подставляя полученное значение b в уравнение $y=ax^2+bx+c$, будем иметь: $y=ax^2+2ax+c$. Зная, что точки $(-1; -1)$ и $(5; 0)$ принадлежат параболе, подставим их координаты в уравнение $y=ax^2+2ax+c$ и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} -1=a-2a+c, \\ 0=25a+10a+c; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=c+1, \\ c=-35a; \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-\frac{1}{36}, \\ c=\frac{35}{36}. \end{cases}$$

Запишем уравнение искомой параболы:

$$y=-\frac{1}{36}x^2-\frac{1}{18}x+\frac{35}{36}.$$

Ответ: $y=-\frac{1}{36}x^2-\frac{1}{18}x+\frac{35}{36}$.

Пример 4. Определите значение a, при котором нули квадратичной функции $y=(3-2a)x^2-ax-1$ имеют различные знаки и абсцисса вершины параболы положительна.

Решение. Рассмотрим квадратное уравнение $(3-2a)x^2-ax-1=0$, которое запишем в виде $x^2+\frac{a}{2a-3}x+\frac{1}{2a-3}=0$ при условии, что $2a-3\neq 0$.

Уравнение имеет два различных корня, если $D>0$, то есть $a^2+4(3-2a)>0$, $a^2-8a+12>0$, откуда $a\in(-\infty; 2)\cup(6; +\infty)$ (рис. 5.8).

Так как согласно условию задачи абсцисса вершины параболы положительна, то положительный корень уравнения $x^2+\frac{a}{2a-3}x+\frac{1}{2a-3}=0$ по абсолютной величине превосходит отрицательный. Тогда сумма корней этого уравнения положительна, а их произведение отрицательно.

По теореме Виета $x_1+x_2=-\frac{a}{2a-3}$, $x_1x_2=\frac{1}{2a-3}$.

Решим систему неравенств $\frac{a}{2a-3}<0$ и $\frac{1}{2a-3}<0$.

Рассмотрим решение каждого неравенства системы, учитывая, что $a\in(-\infty;\ 2)\cup(6;\ +\infty)$:

1) $\frac{a}{2a-3}<0$, откуда $a\in(0;\ 1{,}5)$ (рис. 5.9);

3) $\frac{1}{2a-3}<0$, откуда $a\in(-\infty;\ 1{,}5)$ (рис. 5.10).

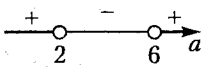


Рис. 5.8

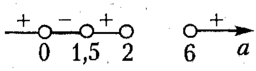


Рис. 5.9

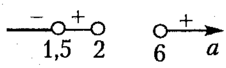


Рис. 5.10

Очевидно, что решением системы неравенств является промежуток $(0;\ 1{,}5)$. Следовательно, условия задачи выполняются при всех a, принадлежащих этому промежутку.

Ответ: $(0;\ 1{,}5)$.

Пример 5. Не решая уравнение $ax^2+bx+c=0$, найдите значение выражения $3^{-2}x_1^{-2}+3^{-2}x_2^{-2}$, где x_1 и x_2 – корни данного уравнения.

Решение. Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Согласно теореме Виета запишем: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Преобразуем выражение $3^{-2}x_1^{-2}+3^{-2}x_2^{-2}$. Получим:

$$\frac{1}{9x_1^2}+\frac{1}{9x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{9(x_1x_2)^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{9(x_1x_2)^2}.$$

Подставляя в полученное выражение значения $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$, будем иметь:

$$\frac{\left(\frac{-b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}}{9\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{9c^2}{a^2}}=\frac{\left(b^2-2ac\right)a^2}{9a^2c^2}=\frac{b^2-2ac}{9c^2}.$$

Ответ: $\frac{b^2-2ac}{9c^2}$.

Пример 6. Составьте квадратное уравнение с корнями $\frac{2}{x_1}$ и $\frac{2}{x_2}$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Решение. Рассмотрим уравнение $ax^2+bx+c=0$. По теореме Виета запишем: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Пусть искомое уравнение имеет вид $x^2+px+q=0$, а числа $\frac{2}{x_1}$ и $\frac{2}{x_2}$ – его корни. Тогда $\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2}=-p$ и $\frac{2}{x_1}\cdot\frac{2}{x_2}=q$.

Найдем коэффициенты p и q, учитывая, что $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$:

1) $p=-2\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=-2\cdot\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=-2\cdot\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=2\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}=\frac{2b}{c}$;

2) $q=\frac{2}{x_1}\cdot\frac{2}{x_2}=\frac{4}{x_1x_2}=\frac{4}{\frac{c}{a}}=\frac{4a}{c}$.

Подставим значения p и q в уравнение $x^2+px+q=0$ и получим: $x^2+\frac{2b}{c}x+\frac{4a}{c}=0$ или $cx^2+2bx+4a=0$.

Ответ: $cx^2+2bx+4a=0$.

Пример 7. Составьте квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен $\frac{6}{3+\sqrt{3}}$.

Решение. Согласно условию задачи $x_1=\frac{6}{3+\sqrt{3}}$ или $x_1=\frac{6\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}$, или $x_1=3-\sqrt{3}$. Тогда $x_2=3+\sqrt{3}$.

Пусть искомое уравнение имеет вид $x^2+px+q=0$. Тогда по теореме Виета $x_1+x_2=-p$, а $x_1x_2=q$. Так как $x_1+x_2=3-\sqrt{3}+3+$ $+\sqrt{3}=6$, а $x_1x_2=\left(3-\sqrt{3}\right)\left(3+\sqrt{3}\right)=6$, то $p=-6$ и $q=6$.

Запишем искомое уравнение: $x^2-6x+6=0$.

Ответ: $x^2-6x+6=0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите наименьшее значение функции $y=2x^2+6x-4$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y=15+2x-x^2$.

3. Найдите область значений функции $y=-2x^2+12x+14$.

4. Найдите все значения параметра a, при которых вершина параболы $y=(x-13a)^2-a^2+6a+16$ лежит во второй четверти координатной плоскости.

5. Составьте уравнение параболы с осью, параллельной оси ординат, если эта парабола проходит через точки $(-2;\ -3)$, $(-1;\ 2)$ и $(1;\ 0)$.

6. Найдите квадратичную функцию $y=ax^2+bx+c$, зная, что при $x=-0{,}75$ она принимает наибольшее значение 3,25, а при $x=0$ принимает значение равное 1.

7. При каком значении параметра a положительный корень уравнения $x^2-(a-3)x+a-4=0$ больше абсолютной величины отрицательного?

8. При каком значении a график функции $y=2x^2-2x+a(5x-2)$ симметричен относительно:

а) оси ординат;

б) прямой $x=2$?

9. Найдите значения параметра a, при котором уравнение $(2-a)x^2+\sqrt{24}x-a+1=0$ имеет:

а) один корень;

б) два равных корня.

10. Найдите все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $-x^2+2ax+1=0$ не превосходят по модулю 4.

11. Найдите сумму всех значений a, при которых уравнения $x^2-(6-2a)x-\left(7a-a^2-12\right)=0$ и $(-x)^2-\left(a^2-5a+6\right)(-x)=0$ равносильны.

12. Определите коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$, если известно, что его корни равны $-p$ и $-q$.

13. Найдите коэффициенты уравнения $x^2+px+q=0$, если известно, что числа p и q являются его корнями.

14. При каком целом значении b один из корней уравнения $4x^2-x(3b+2)+b^2=1$ в три раза больше другого?

15. Найдите общий корень уравнений $3x^2-4x+p=2$ и $x^2-2px=-5$ при условии, что p – целое число.

16. Найдите значение b, при котором корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+2x+2b=0$ удовлетворяют условию $3x_2+x_1=8$.

17. Найдите произведение тех значении c, при которых один корень уравнения $x^2-3x+8c^3=0$ равен квадрату другого.

18. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2-7ax+12a^2\geq 0$ выполняется при всех $x\in\mathbf{R}$.

19. Составьте уравнение второй степени, в котором:

а) один из корней равен нулю;

б) оба корня равны нулю;

в) корни равны по модулю, но противоположны по знаку.

20. Составьте квадратное уравнение, один из корней которого равен сумме, а другой – произведению корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

21. Составьте уравнение второй степени, корни которого были бы на единицу больше корней уравнения $ax^2+bx+c=0$.

22. Составьте квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, один из корней которого равен $-3-5\sqrt{3}$.

23. Найдите произведение всех значений k, при которых корни уравнения $x^2+(k+1)x+k^2=0$ относятся как 2 : 3.

24. Найдите произведение корней уравнения
$x^4-24x^2+144=0$.

25. Составьте биквадратное уравнение, если числа $\sqrt{2}-1$ и $\sqrt{2}+1$ являются двумя его корнями.

26. Пусть x_1 и x_2 корни уравнения $x^2-3{,}5x-1{,}5=0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа $x_1+x_2^{-1}$ и $x_2+x_1^{-1}$.

27. Не решая уравнение $x^2+2{,}(6)x-0{,}(3)=0$, найдите:

а) $x_1^2+x_2^2$; **б)** $x_1^4+x_2^4$; **в)** x_1-x_2.

Ответы: **1.** $-8{,}5$. **2.** 16. **3.** $(-\infty;\ 32]$. **4.** $(-2;\ 0)$. **5.** $y=-2x^2-x+3$. **6.** $y=-4x^2-6x+1$. **7.** $(3;\ 4)$. **8.** а) при $a=0{,}4$; б) при $a=-1{,}2$. **9.** а) 2; б) $\{-1;\ 4\}$. **10.** $\left[-\frac{15}{8};\ \frac{15}{8}\right]$. **11.** 7. **12.** $q=0$, $p\in\mathbf{R}$. **13.** $p_1=0,\ q_1=0;\ p_2=1,\ q_2=-2$. **14.** При $b=2$. **15.** $x=1$. **16.** $-17{,}5$. **17.** $-0{,}75$. **18.** При $a=0$. **19.** а) $ax^2+bx=0$, $a\neq 0$; б) $ax^2=0, a\neq 0$; в) $ax^2+c=0$, $ac<0$. **20.** $a^2x^2+(ab-ac)x-bc=0$. **21.** $ax^2+(b-2a)x+$ $+c+a=b$. **22.** $x^2+6x-66=0$. **23.** $-\frac{6}{19}$. **24.** 144. **25.** $x^4-6x^2+1=0$. **26.** $6x^2-7x-1=0$. **27.** а) $\frac{70}{9}$; б) $\frac{4882}{81}$; в) $\pm\frac{2\sqrt{19}}{3}$.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Если координаты вершины параболы $x_0=-1$ и $y_0=5$, то уравнение параболы имеет вид	1) $y=(x+1)^2+5$; 2) $y=(x-1)^2+5$; 3) $y=(x+1)^2-5$; 4) $y=(x-1)^2-5$; 5) $y=5-(x+1)^2$.
2	Сумма координат вершины параболы $y=-x^2-7x-8$ равна	1) $-\frac{4}{3}$; 2) $-\frac{21}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 0,24; 5) 1,7.
3	Наибольшее значение функции $y=-3x^2+3x-3$ равно	1) -3; 2) 3; 3) $-0{,}75$; 4) 0,2; 5) $-2{,}25$.
4	Осью симметрии графика функции $5y=2x^2-x+8$ является прямая	1) $y=2$; 2) $x=0{,}25$; 3) $x=5$; 4) $y=x$; 5) $x=-1$.

№	Задания	Варианты ответов
5	Значение выражения $ax^2+2ax-4$ не больше двух при условии, что	1) $a\in[-6;\ +\infty)$; 2) $a\in[2;\ +\infty)$; 3) $a\in[1;\ 2)$; 4) $a\in[-6;\ 0]$; 5) $a\notin[-6;\ 0]$
6	Количество целых значений a, при которых оба корня трехчлена $(a-1)x^2-(3-a)x-(2-a)$ положительны, равно	1) 0; 2) 2; 3) 4; 4) 5; 5) 9.
7	Если сумма квадратов корней уравнения $2^{-2}x^2-x+2^{-2}p=0$ равна 16, то значение p равно	1) −17; 2) 3; 3) 33; 4) 0; 5) 12.
8	Если один из корней квадратного уравнения равен $\frac{49}{21-\sqrt{98}}$, то уравнение имеет вид	1) $x^2+6x+7=0$; 2) $x^2-6x+17=0$; 3) $-x^2-6x+7=0$; 4) $x^2-6x-7=0$; 5) $x^2-6x+7=0$.
9	Квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $-x^2+2{,}5x-0{,}5=0$, имеет вид	1) $x^2-5x+2=0$; 2) $x^2-2x+2=0$; 3) $6x^2-x+5=0$; 4) $x^2-6x+20=0$; 5) $x^2+6x+2=0$.
10	Если $a+b<-c$, то уравнение $ax^2+bx=-c$ не имеет действительных корней при условии, что	1) $c<0$; 2) $c\geq0$; 3) $c>1$; 4) $c\leq17$; 5) $c<5$.
11	Сумма квадратов корней уравнения $-x^2+(a+2)x+3-a=0$ принимает наименьшее значение при условии, что a равно	1) 1; 2) −1; 3) 0; 4) 6; 5) 14.

№	Задания	Варианты ответов
12	Если остатки при делении квадратного трехчлена $-x^2-px-q$ на двучлены $p-x$ и $q-x$ соответственно равны p и q, то среднее арифметическое всех коэффициентов p и q равно	1) 0; 2) 2; 3) 0,5; 4) $\frac{1}{12}$; 5) $\frac{1}{6}$.
13	Уравнения $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$ имеют общий корень, если a принимает значение, равное	1) 0,1; 2) 1; 3) 2; 4) 12; 5) −2.
14	Если разность корней уравнения $x^2+px=-q$ равна 5, а разность кубов корней равна 35, то наименьшая сумма коэффициентов уравнения равна	1) −7; 2) −6; 3) 5; 4) −5; 5) 0.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	1	3	5	2	4	1	4
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	5	1	1	2	4	5	4

6 РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

6.1. Основные понятия и определения

Равенство, содержащее переменную, называют *уравнением*:

$$f(x)=g(x).$$

Значение переменной, при подстановке которого в уравнение, получаем верное равенство, называют корнем (решением) уравнения.

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что их нет.

Число $k\in\mathbf{N}$ называют кратностью корня x_1 уравнения $(x-x_1)^k(x-x_2)=0$, а число x_1 – k-кратным корнем этого уравнения. Если $k=1$, то говорят о простом корне уравнения. В нашем случае число x_2 – простой корень уравнения.

Уравнения являются равносильными, если они имеют равные корни (либо не имеют корней).

Составить уравнение – значит установить и выразить в математической форме связь между известными величинами задачи и искомыми величинами.

6.2. Преобразование уравнений в равносильные им уравнения

Равносильные уравнения получают в результате следующих преобразований:

1) при переносе слагаемых из одной части уравнения в другую с противоположным знаком;

2) при умножении или делении обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число;

3) при замене уравнения $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ равносильной системой уравнений $\begin{cases} f(x)=0,\\ g(x)\neq 0.\end{cases}$

Существует ряд преобразований, которые могут привести к уравнению, неравносильному данному. К таким преобразованиям относят:

1) возведение обеих частей уравнения в четную степень (в результате могут появиться посторонние корни);

2) умножение обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную (могут появиться посторонние корни);

3) деление обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную (может произойти потеря корней).

Чтобы избежать посторонних корней необходимо все преобразования проводить с учетом области допустимых значений переменной или выполнять проверку полученных корней подстановкой их в исходное уравнение.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все правильные варианты ответов (1–3):

1. Равносильные уравнения получают в результате следующих преобразований:

1) при переносе слагаемых из одной части уравнения в другую с противоположным знаком;

2) при умножении обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число;

3) при переносе слагаемых из одной части уравнения в другую с тем же знаком;

4) при делении обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число;

5) при умножении обеих частей уравнения на число нуль;

6) при делении обеих частей уравнения на число нуль.

2. Неравносильные уравнения могут быть получены в результате следующих преобразований:

1) при возведении обеих частей уравнения в четную степень;

2) при умножении обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную;

3) при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную;

4) при возведении обеих частей уравнения в нечетную степень;

5) при вычитании из обеих частей уравнения одного и того же числа;

6) при умножении обеих частей уравнения на число -1.

3. Уравнение $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ равносильно:

1) уравнению $f(x)=0$;

2) уравнению $g(x)\neq 0$;

3) совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0; \end{array}\right.$

4) совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0; \end{array}\right.$

5) системе уравнений $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0; \end{cases}$

6) системе уравнений $\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)\neq 0. \end{cases}$

Установите соответствие:

4. Уравнение $(x-x_1)(x-x_2)^3(x-x_3)^2=0$ имеет:

КОРЕНЬ	ВИД КОРНЯ
1) x_1;	а) простой;
2) x_2;	б) 2 – кратный;
3) x_3.	в) 3 – кратный;
	г) n – кратный;
	д) сложный.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Вариант правильного ответа	1, 2, 4	1, 2, 3	6	1 – а, 2 – в, 3 – б

Примеры

Пример 1. Найдите произведение всех действительных корней уравнения $0{,}2x^3-1{,}2x+1=0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $x^3-6x+5=0$. Если уравнение имеет целые корни, то эти корни найдем среди делителей свободного члена.

Запишем делители числа 5: ± 1; ± 5.

Подберем корень уравнения: если $x_1=1$, то $1-6+5=0$, следовательно, число 1 – корень этого уравнения. Разделим обе части уравнения на двучлен $(x-1)$:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3-6x+5 \\ x^3-x^2 \end{array} & \dfrac{x-1}{x^2+x-5} \\
\hline
-\begin{array}{l} x^2-6x+5 \\ x^2-x \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} -5x+5 \\ -5x+5 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Решим уравнение $x^2+x-5=0$. Так как дискриминант уравнения $D=21>0$, то это уравнение имеет два корня, произведение которых равно -5.

Найдем произведение всех корней уравнения $x^3-6x+5=0$:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 1 \cdot (-5) = -5.$$

Ответ: -5.

Пример 2. Найдите сумму всех корней уравнения

$$\frac{20x}{4x^2-8x+7}+\frac{15x}{4x^2-10x+7}=5.$$

Решение. Так как число нуль не является корнем этого уравнения, то выполним следующее преобразование:

$$\frac{\frac{20x}{5x}}{\frac{4x^2}{x}-\frac{8x}{x}+\frac{7}{x}}+\frac{\frac{15x}{5x}}{\frac{4x^2}{x}-\frac{10x}{x}+\frac{7}{x}}=\frac{5}{5}, \frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1.$$

В результате подстановки $4x+\frac{7}{x}-9=a$ уравнение примет вид:

$\frac{4}{a+1}+\frac{3}{a-1}=1$, $\frac{4a-4+3a+3}{a^2-1}=1$, $\frac{7a-1}{a^2-1}=1$ ($a \neq \pm 1$), $a^2-1=7a-1$, $a^2-7a=0$, откуда $a_1=0$, $a_2=7$.

Учитывая подстановку, решим два уравнения:

1) $4x+\frac{7}{x}-9=0$, $4x^2-9x+7=0$, а поскольку $D<0$, то $x \in \varnothing$;

2) $4x+\frac{7}{x}-9=7$, $4x^2-16x+7=0$, а поскольку $D>0$, то $x_1+x_2=\frac{16}{4}=4$.

Ответ: 4.

Пример 3. Решите уравнение $x^2+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{47}{4}$.

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\left(3x+\frac{3}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{47}{4} \text{ или } 12\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=47.$$

Выполним следующие преобразования выражение $x^2+\frac{1}{x^2}$:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}\right)-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.$$

Полагая $x+\frac{1}{x}=a$ и $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$, получим:

$$12a+4\left(a^2-2\right)=47,\ 4a^2+12a-55=0,$$

откуда $D=12^2+4\cdot4\cdot55=4^2\left(3^2+55\right)=4^2\cdot64=(4\cdot8)^2=32^2$;

$$a_1=\frac{-12-32}{8}=-\frac{11}{2},\ a_2=\frac{-12+32}{8}=\frac{5}{2}.$$

Учитывая подстановку, будем иметь:

1) $x+\frac{1}{x}=-\frac{11}{2}$, $2x^2+11x+2=0$, откуда $x_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$;

2) $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$, $2x^2-5x+2=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2};\ 2;\ \frac{-11-\sqrt{105}}{4};\ \frac{-11+\sqrt{105}}{4}\right\}$.

Пример 4. Найдите произведение наибольшего и наименьшего корней уравнения $(2x-1)(x+2)^3+(1-2x)(x-1)^3-18x+9=0$.

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$(2x-1)(x+2)^3+(2x-1)(1-x)^3-9(2x-1)=0,$$

$$(2x-1)\left((x+2)^3+(1-x)^3-9\right)=0.$$

Решим совокупность уравнений:

1) $2x-1=0$, откуда $x=0{,}5$;

2) $x^3+6x^2+12x+8+1-3x+3x^2-x^3-9=0$, $9x^2+9x=0$, откуда $x=0$ и $x=-1$.

Данное уравнение имеет три корня: $-1;\ 0;\ 0{,}5$.

Найдем произведение наибольшего и наименьшего корней этого уравнения: $0{,}5\cdot(-1)=-0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

Пример 5. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$\frac{2x^2+12x+16}{3x+12}=\frac{2}{3}x^2-2x-2.$$

Решение. Умножив обе части уравнения на число $\frac{3}{2}$, получим:

$$\frac{x^2+6x+8}{x+12}=x^2-3x-3.$$

Разложим квадратный трехчлен x^2+6x+8 на линейные множители и сократим дробь на $x+4\neq0$:

$$\frac{(x+4)(x+2)}{x+4}=x^2-3x-3,\ x+2=x^2-3x-3,\ x^2-4x-5=0,$$

откуда $x_1=5$, $x_2=-1$.

Найдем сумму квадратов корней данного уравнения:

$$x_1^2+x_2^2=25+1=26.$$

Ответ: 26.

Пример 6. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+\dfrac{x}{y}=9, \\ \dfrac{(x+y)x}{20y}=1 \end{cases}$.

Решение. Полагая $\begin{cases} x+y=a, \\ \dfrac{x}{y}=b, \end{cases}$ запишем данную систему уравнений в виде $\begin{cases} a+b=9, \\ a\cdot b=20. \end{cases}$

Легко заметить, что решением полученной системы уравнений являются пары чисел $a_1=4$, $b_1=5$ и $a_2=5$, $b_2=4$.

Учитывая подстановку, решим две системы уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=4, \\ \dfrac{x}{y}=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4, \\ x=5y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y=4, \\ x=5y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2}{3}, \\ x=\dfrac{10}{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=5, \\ \dfrac{x}{y}=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y=5, \\ x=4y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1, \\ x=4. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{10}{3};\frac{2}{3}\right)$, $(4;1)$.

Пример 7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=9, \\ x^2y^3-x^3y^2=3. \end{cases}$

Решение. Систему уравнений запишем в виде

$$\begin{cases} x^2y^2(y+x)=9, \\ x^2y^2(y-x)=3. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе:

$$\frac{x^2y^2(y+x)}{x^2y^2(y-x)}=\frac{9}{3},\ \frac{y+x}{y-x}=3.$$

По основному свойству пропорции запишем:

$$y+x=3y-3x \text{, откуда } y=2x.$$

Подставим значение $y=2x$ в первое уравнение системы и найдем значение переменной x:

$$x^2\cdot 8x^3+x^3\cdot 4x^2=9,\ 12x^5=9,\ x^5=0{,}75,\ x=\sqrt[5]{0{,}75}.$$

Найдем значение переменной y:

$$y=2,\ y=2\sqrt[5]{0{,}75}.$$

Ответ: $\left(\sqrt[5]{0{,}75};\ 2\sqrt[5]{0{,}75}\right)$.

Пример 8. Найдите $\frac{y_0}{x_0}$, если $(x_0;y_0)$ – координаты точки пересечения кривых $2^{-1}y^{-1}x-2^{-1}x^{-1}y=0{,}75$ и $x^6-16y^3+1=0$, причем абсцисса и ордината этой точки имеют противоположные знаки.

Решение. Координаты точек пересечения заданных кривых найдем, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{2y}-\frac{y}{2x}=\frac{3}{4}, \\ x^6-16y^3=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{3}{2}, \\ x^6-16y^3=-1. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы и применим подстановку $\frac{x}{y}=a$, где $a\neq 0$. Решая уравнение $a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$, получим:

$$2a^2-3a-2=0 \text{, откуда } a_1=-\frac{1}{2},\ a_2=2.$$

Учитывая подстановку $\frac{x}{y}=a$, запишем: $\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$ или $\frac{x}{y}=2$.

Так как согласно условию задачи $\frac{y_0}{x_0}<0$, то $\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$, откуда $y=-2x$.

Подставляя значение $y=-2x$ во второе уравнение системы, запишем: $x^6+16\cdot 8\cdot x^3-1=0$. Получили квадратное уравнение относительно x^3, дискриминант которого положителен, следовательно, это уравнение имеет корни, а заданные кривые имеют точку пересечения, абсцисса и ордината которой имеют противоположные знаки. А так как $\frac{x}{y}=-\frac{1}{2}$, то $\frac{y_0}{x_0}=-2$.

Ответ: -2.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения (1–19):

1. $\frac{2\sqrt{2}}{x^2-4}+\frac{\sqrt{2}}{2x-x^2}-\frac{\sqrt{32}-x\sqrt{2}}{x^2+2x}=0.$

2. $\frac{x^2+x-3}{x-4}-\frac{x^2-1}{x+3}=24.$

3. $\frac{3-x}{1-x}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{x+6}{x+2}-\frac{6-x}{x-2}.$

4. $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}+\frac{56}{30}=\frac{4-x}{3-x}+\frac{x+4}{x+3}.$

5. $(x-1)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)+(2x-1)\left(x^2+2\right)=3.$

6. $\frac{3{,}5(x-2)(x-3)(x-4)}{(7-2x)(x+2)(x-6)}=1.$

7. $x^4+2^{-3}x^3+8x+1=0.$

8. $(x+3)^3+(-x-1)^3=56.$

9. $\left(\frac{x^2+6}{x^2-4}\right)^2=\left(\frac{x}{0{,}8-0{,}2x^2}\right)^2.$

10. $21\left(3x+\frac{3}{x^2}\right)-21\left(7+\frac{7}{x}\right)=0.$

11. $x+1+x^{-2}+x^{-3}=4x^{-1}.$

12. $\frac{2x^2+x}{x^2}+\frac{3x}{2(2x+1)}=2{,}5.$

13. $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{6x}{2x^2+2x-10}=-4.$

14. $x^4-\frac{50x}{2x^5-7x}=14.$

15. $\dfrac{12}{x(x+2)}-\dfrac{12}{(x+1)^2}=1$.

16. $\dfrac{1}{x^3+2}-\dfrac{5}{5x^3+15}=\dfrac{1}{12}$.

17. $\dfrac{7}{x^2-4x+10}+\dfrac{4x}{3}=2+\dfrac{x^2}{3}$.

18. $0{,}2\left(x^2+27\right)^2=\left(x^2+27\right)\cdot\left(x^2+3\right)+1{,}2\left(x^2+3\right)^2$.

19. $x^2+5-2x=-4y-y^2$.

20. Найдите положительные корни уравнения

$$x^3+\frac{1}{x}+x\left(3x+\frac{3}{8}\right)=8x.$$

21. Найдите среднее арифметическое корней уравнения

$$x^2-4x+6=\frac{42}{2x^2-8x+20}.$$

22. Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $\dfrac{2x-6}{6x^2-x-2}-\dfrac{2-2x}{24x^2-34x+12}=\dfrac{10x}{4x^2-x-1{,}5}$.

23. Найдите произведение корней уравнения

$$x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{7x^2+7}{x}+8=0.$$

Решите системы уравнений (24–42):

24. $\begin{cases}(10x+2)^2+100(y+0{,}3)^2=100,\\ 10x+10y-9=0.\end{cases}$

25. $\begin{cases}x^{-4}+y^{-4}=82(xy)^{-4},\\ xy=3.\end{cases}$ 26. $\begin{cases}x^2y^{-2}+y^2=5y^{-2},\\ (xy)^2-2x=0.\end{cases}$

27. $\begin{cases}x^3+y^3=7,\\ (xy)^3+2^3=0.\end{cases}$ 28. $\begin{cases}\dfrac{x}{y-1}=\dfrac{x}{y+1}+1,\\ y^2=x+5.\end{cases}$

29. $\begin{cases}x+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{13y}{6},\\ x+y=5.\end{cases}$ 30. $\begin{cases}1+xy^{-1}=5x,\\ y^2x^{-2}+1=13y^2.\end{cases}$

31. $\begin{cases}xy(x+y)=6,\\ xy+x+y=5.\end{cases}$ 32. $\begin{cases}x^2-xy+y^2=7,\\ x+y=5.\end{cases}$

33. $\begin{cases} x^2+xy=15, \\ y^2+xy=10. \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{6}{x}+y=9, \\ x+\dfrac{6}{y}=3. \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{3x^2+3y^2}{10x+10y}=1, \\ \dfrac{4}{3x}+\dfrac{4}{3y}=1. \end{cases}$

36. $\begin{cases} (x+3)^2+(y+1)^2=10, \\ x+y=-8. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x^2y-xy^2=30, \\ (x+y)xy=120. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=\dfrac{13x}{4}, \\ x^2y+xy^2=20. \end{cases}$

39. $\begin{cases} (x-y)^2(x+y)=45, \\ x+y=5. \end{cases}$

40. $\begin{cases} 6x^2+6y^2-15xy=0, \\ x^3y-xy^3-6=0. \end{cases}$

41. $\begin{cases} x^2+y^2=2xy+4, \\ x+y=6. \end{cases}$

42. $\begin{cases} 24(x+y)^2+2x+2y=5, \\ 48(x-y)^2+8x-8y=1. \end{cases}$

43. Найдите произведение чисел x, y и z, если $(x;\ y;\ z)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} y-x=-1, \\ x-z=-1, \\ (y-1)^3-(2-x)^3+(z-3)^3=\left(\sqrt[3]{3}\right)^3. \end{cases}$

44. Найдите суму чисел, обратных числам x, y и z, если $(x;\ y;\ z)$ – решение системы уравнений $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{3}{2}$ и $\dfrac{yz}{y+z}=4$.

45. Найдите значение $|x_0-y_0|$, если $(x_0;\ y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} x^2-8y+16=0, \\ y^2+6x+9=0. \end{cases}$

Ответы: **1.** 3. **2.** $x_1=5;\ x_2=-\dfrac{55}{16}$. **3.** $x=0$. **4.** $x_{1,2}=\pm2$; $x_{3,4}=\pm\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$. 5. $x=1$. **6.** $\left\{0;\ 5;\ \dfrac{38}{11}\right\}$. **7.** $\{-2;\ -0{,}125\}$. 8. $\{-5;\ 1\}$.

9. $x_{1,2}=\pm 3$. **10.** $\left\{-1;\ \frac{1}{3};\ 3\right\}$. **11.** $x_1=x_2=1$; $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. **12.** $\{-2;\ -1\}$. **13.** $x_1=1; x_2=-5; x_{3,4}=-1\pm\sqrt{6}$. **14.** $x_{1,2}=\pm 2$; $x_{3,4}=\pm 0{,}5\sqrt[4]{24}$. **15.** $x_1=1;\ x_2=-3$. **16.** $x_1=1; x_2=-\sqrt[3]{6}$. **17.** $x_1=1$; $x_2=3$. **18.** $x_{1,2}=\pm 0{,}6\sqrt{5}$. **19.** $x=1$, $y=-2$. **20.** 1. **21.** 2. **22.** $\frac{17}{25}$. **23.** 1. **24.** $(0{,}6;\ 0{,}3)$; $(0{,}4;\ 0{,}5)$. **25.** $(1;\ 3)$, $(-1;\ -3)$, $(3;\ 1)$; $(-3;\ -1)$. **26.** $(2;\ 1)$; $(2;\ -1)$; $(1;\ \sqrt{2})$; $(1;\ -\sqrt{2})$. **27.** $(-1;\ 2)$, $(2;\ -1)$. **28.** $(4;\ 3)$; $(4;\ -3)$. **29.** $(2;\ 3)$; $(3;\ 2)$. **30.** $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)$; $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)$. **31.** $(1;\ 2)$; $(2;\ 1)$. **32.** $(2;\ 3)$; $(3;\ 2)$. **33.** $(3;\ 2)$; $(-3;\ -2)$. **34.** $(2;\ 6)$; $(1;\ 3)$. **35.** $(2;\ 4)$; $(4;\ 2)$. **36.** $(-4;\ -4)$; $(-6;\ -2)$. **37.** $(5;\ 3)$. **38.** $(4;\ 1)$. **39.** $(4;\ 1)$; $(1;\ 4)$. **40.** $(2;\ 1)$; $(-2;\ -1)$. **41.** $(2;\ 4)$; $(4;\ 2)$. **42.** $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{6}\right)$; $\left(\frac{1}{12};\ \frac{1}{3}\right)$; $\left(-\frac{5}{24};\ -\frac{7}{24}\right)$; $\left(-\frac{3}{8};\ -\frac{1}{8}\right)$. **43.** 24. **44.** $\frac{91}{120}$. **45.** 7.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Количество корней уравнения $(1-x)(2-x)^2(3-x)=12$ равно	1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 0; 5) 4.
2	Сумма корней уравнения $\frac{2x+1}{2x^2-0{,}5x}+\frac{7x+8}{0{,}5-8x^2}+\frac{1-x}{4x^2+x}=0$ равна	1) 14; 2) 0,5; 3) 2; 4) 7; 5) −7.
3	Произведение различных корней уравнения $\left(\frac{2x+1}{3x-4}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{4-3x}{2x+1}\right)^2$ равно	1) 3; 2) −3; 3) 5,6; 4) 56; 5) −2.

№	Задания	Варианты ответов
4	Утроенная сумма корней уравнения $\frac{3}{x^3+3x^2+6x+8}+\frac{2x+4}{x^3+6x^2+12x+8}=$ $=\frac{11}{x^2+x+4}$ равна	1) $-\frac{13}{3}$; 2) 3; 3) −23; 4) −13; 5) 21.
5	Среднее арифметическое корней уравнения $\frac{x^2+x+2}{x}+\frac{5x}{x^2+x+2}=6$ равно	1) −1; 2) 2; 3) −2; 4) 4; 5) −14.
6	Сумма корней уравнения $\left(x^2+2x\right)^2=(x+1)^2+55$ равна	1) 6; 2) −2; 3) −4; 4) 2; 5) −6.
7	Наименьший корень уравнения $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}+\left(x+\frac{1}{x}\right)=3$ равен	1) 0; 2) $2-\sqrt{3}$; 3) $-2-\sqrt{3}$; 4) $-2-0{,}3\sqrt{3}$; 5) $2+\sqrt{3}$.
8	Модуль разности корней уравнения $2x^4-4x^3+1{,}5x^2-4x=-2$ равен	1) 3; 2) 6; 3) 5,5; 4) 0,5; 5) 1,5.
9	Количество целых корней уравнения $0{,}75\left(x-\frac{1}{x}\right)+0{,}5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=1$ равно	1) 3; 2) 4; 3) 2; 4) 1; 5) 0.
10	Число решений системы уравнений $\begin{cases}x^2+y=5,\\x^2+y^2x=3x\end{cases}$ равно	1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 6; 5) 8.
11	Если $(x;\, y;\, z)$ – решение системы уравнений $\begin{cases}x+y=z,\\x+z=2+y,\\y+z=4+x,\end{cases}$ то значение выражения x^{y^z} равно	1) 9; 2) 1; 3) 8; 4) 16; 5) 27.

№	Задания	Варианты ответов
12	Квадрат расстояния между точками, координаты которых удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} 1+xy^{-1}=0, \\ x^{-2}+y^{-2}-2^3=0, \end{cases}$ равен	1) 3; 2) 7; 3) 9; 4) 4; 5) 2.
13	Система уравнений $3x+2y=k$ и $x^2+y^2=117$ имеет единственное решение, если k равно	1) 38; 2) −37; 3) 0; 4) 39 и −39; 5) 40 и −40.
14	Количество целочисленных решений системы уравнений $\left(x^2+y^2\right)\frac{x}{y}=6$ и $\left(y^2-x^2\right)\frac{y}{x}=-1$ равно	1) 0; 2) 1; 3) 4; 4) 3; 5) 2.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	2	2	1	4	2	2	3
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	5	1	3	2	5	4	1

7 РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

7.1. Метод интервалов

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x-x_3)(x-x_4)}$. Точки, в которых функция $f(x)$ обращается в нуль, называют нулями функции. В нашем случае это точки $x=x_1$ и $x=x_2$. Точки, в которых знаменатель функции обращается в нуль, называют точками разрыва функции. В нашем случае это точки $x=x_3$ и $x=x_4$.

Если все нули функции и точки ее разрыва отметить на координатной прямой, то они разобьют прямую на несколько промежутков. Так как внутри каждого из этих промежутков функция непрерывна и сохраняет свой знак, то для установления этого знака достаточно взять любую точку из интересующего нас промежутка и определить знак функции в этой точке. Следовательно, если в левой части неравенства рациональная, показательная, логарифмическая, тригонометрическая либо в общем случае произвольная функция, то можем решить неравенство методом интервалов.

Приведем алгоритм решения методом интервалов неравенства вида $f(x)<0$ $(>;\ \leq;\ \geq)$, где функция $f(x)$ может быть произвольной:

1) запишем функцию $f(x)$;

2) найдем область определения функции $D(f)$;

3) найдем нули функции, решая уравнение $f(x)=0$;

4) нанесем нули функции на ее область определения и определим знак функции на любом промежутке; определим знак функции на остальных промежутках по правилу: при переходе через каждый свой корень функция меняет знак (при этом учитываем кратность корней);

5) выпишем решение неравенства, учитывая его смысловой знак.

В процессе решения неравенств методом интервалов, для удобства корни четной кратности, будем наносить на координатную прямую дважды, нечетной кратности – один раз.

7.2. Решение рациональных неравенств

Целым рациональным неравенством называют неравенство вида $f(x)<0$ $(>, \le, \ge)$, где $f(x)$ – алгебраический многочлен.

Дробным рациональным неравенством называют неравенство вида $\frac{f(x)}{g(x)}<0$ $(>, \le, \ge)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – алгебраические многочлены. Очевидно, что множество решений дробно-рационального неравенства не должно содержать корней многочлена $g(x)$.

Решая ***целые рациональные неравенства*** методом интервалов, будем следовать алгоритму:

1) запишем неравенство в виде $f(x)<0$ $(>, \le, \ge)$ и рассмотрим функцию $f(x)$;

2) найдем нули функции, решая уравнение $f(x)=0$;

3) нанесем нули функции на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках;

4) запишем решение неравенства, учитывая при этом его смысловой знак.

Решая ***дробные рациональные неравенства*** методом интервалов, будем следовать алгоритму:

1) запишем неравенство в виде $\frac{f(x)}{g(x)}<0$ $(>, \le, \ge)$ и рассмотрим функцию $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$;

2) найдем нули и точки разрыва функции, решая уравнения $f(x)=0$ и $g(x)=0$;

3) нанесем нули и точки разрыва функции на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках;

4) запишем решение неравенства, учитывая при этом его смысловой знак.

При решении неравенств вида $\frac{f(x)}{g(x)}\le 0$ и $\frac{f(x)}{g(x)}\ge 0$ корни числителя будем отмечать на координатной прямой «зачерненными» кружочками, а корни знаменателя (точки разрыва функции, записанной в левой части неравенства) – «пустыми».

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все необходимые действия (1–2):

1. Чтобы решить целое рациональное неравенство вида $f(x) \le 0$ необходимо:

1) найти нули функции $f(x)$;

2) найти точки разрыва функции $f(x)$;

3) нанести нули функции $f(x)$ на координатную прямую и определить знаки функции на полученных промежутках;

4) нанести точки разрыва функции $f(x)$ на координатную прямую и определить знаки функции на полученных промежутках;

5) записать промежутки, на которых функция не положительна;

6) записать промежутки, на которых функция отрицательна;

7) записать промежутки, на которых функция положительна.

2. Чтобы решить дробное рациональное неравенство вида $\frac{f(x)}{g(x)} \ge 0$ необходимо:

1) найти нули функции $f(x)$;

2) найти нули функции $g(x)$;

3) отметить на координатной прямой нули функции $f(x)$ «зачерненными» кружочками, а нули функции $g(x)$ – «пустыми»;

4) отметить на координатной прямой нули функции $f(x)$ «пустыми» кружочками, а нули функции $g(x)$ – «зачерненными»;

5) отметить на координатной прямой нули функций $f(x)$ и $g(x)$ «зачерненными» кружочками;

6) записать промежутки, на которых функция $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ положительна;

7) записать промежутки, на которых функция $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ не отрицательна.

Установите соответствие:

3. Решение рациональных неравенств:

НЕРАВЕНСТВО

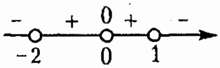
1) $x(x-1)(x+2) > 0$;

2) $x^3(x-1)^2(x+2)^4 \ge 0$;

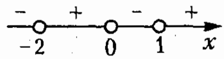
3) $\frac{x^2(1-x)}{(x+2)^5} < 0$;

4) $\frac{(x+2)^4}{x^2(1-x)} \le 0$.

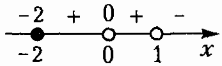
РИСУНОК



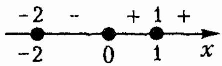
а)



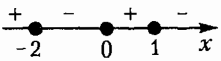
б)



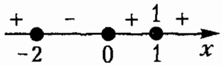
в)



г)



д)



е)

РЕШЕНИЕ (ОТВЕТ)

ж) $\{-2\}\cup(1;\ +\infty)$; з) $[-2;\ 0]\cup\{1\}$;

и) $(-2;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$; к) $\{-2\}\cup[0;\ +\infty)$;

л) $(-\infty;\ -2)\cup(1;\ +\infty)$; м) $[-2;\ 0]\cup[1;\ +\infty)$.

Ответы

Номер задания	1	2	3
Вариант правильного ответа	1, 3, 5	1, 2, 3, 7	1 – б – и, 2 – г – к, 3 – а – л, 4 – в – ж

Примеры

Пример 1. Решите неравенство $(2-x)^2(x+3)^3(x-7)<0$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=(2-x)^2(x+3)^3(x-7)$.

2. Найдем нули функции, решая уравнение

$$(2-x)^2(x+3)^3(x-7)=0.$$

Получим $x_{1,2}=2$, $x_{3,4,5}=-3$, $x_6=7$.

3. Корни нечетной кратности –3 и 7 нанесем на координатную прямую один раз, а корень четной кратности 2 – два раза (рис. 7.1). Определим знаки функции на любом промежутке, например, на промежутке $(-3;\ 2)$, найдя значение функции в точке $x=0$, принадлежащей этому промежутку:

$$f(0)=(-2)^2\cdot 3^3\cdot(-7)<0.$$

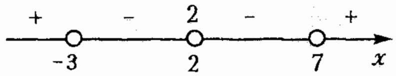


Рис. 7.1

Определим знаки функции на остальных промежутках, чередуя их при переходе через точки −3 и 7 и сохраняя знак (чередуя дважды) при переходе через точку 2.

4. Объединив промежутки, на которых функция $f(x) = (2-x)^2(x+3)^3(x-7)$ отрицательна, получим решение данного неравенства: $(-3;\ 2) \cup (2;\ 7)$.

Ответ: $(-3;\ 2) \cup (2;\ 7)$..

Пример 2. Решите неравенство $\dfrac{x^2(x+1)}{x^2-4} \geq 0$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)}{x^2-4}$.

2. Найдем нули функции, решая уравнение $x^2(x+1) = 0$. Получим $x_{1,2} = 0$, $x_3 = -1$. Найдем точки разрыва функции, решая уравнение $x^2 - 4 = 0$. Получим $x_4 = -2,\ x_5 = 2$.

3. Нанесем нули и точки разрыва функции на координатную прямую, при этом точки разрыва отметим на координатной прямой «пустыми» кружочками, а нули функции – «зачерненными» кружочками (рис. 7.2).

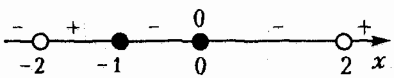


Рис. 7.2

Определим знаки функции на полученных промежутках.

4. Так как функция $f(x) = \dfrac{x^2(x+1)}{x^2-4}$ может быть как положительной, так и равной нулю (на это указывает смысловой знак неравенства $\geq$), то решением неравенства является объединение промежутков, на которых функция неотрицательна и изолированная точка 0: $(-2;\ 1] \cup (2;\ +\infty) \cup \{0\}$.

Ответ: $(-2;\ 1] \cup (2;\ +\infty) \cup \{0\}$.

Пример 3. Решите неравенство $x^8+9x^6+6x<6x^7+x^2+9$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$x^8-6x^7+9x^6-x^2+6x-9<0$$

и разложим его левую часть на множители:

$$x^6\left(x^2-6x+9\right)-\left(x^2-6x+9\right)<0,$$

$$\left(x^2-6x+9\right)\left(x^6-1\right)<0,\ (x-3)^2\left(x^6-1\right)<0.$$

1. Рассмотрим функцию $f(x)=(x-3)^2\left(x^6-1\right)$.

2. Найдем нули функции, решая уравнение $(x-3)^2\left(x^6-1\right)=0$, равносильное совокупности уравнений $(x-3)^2=0$ и $x^6-1=0$. Получим $x_{1,2}=3$, $x_{3,4}=\pm 1$.

3. Нанесем нули функции на координатную прямую (рис. 7.3) и определим знаки функции на полученных промежутках.

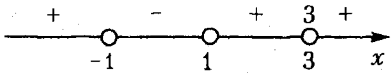


Рис. 7.3

4. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x)=(x-3)^2\left(x^6-1\right)$ отрицательна: $(-1;\ 1)$.

Ответ: $(-1;\ 1)$.

Пример 4. Решите неравенство $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}<0$.

Решение. Имеем неравенство вида $f(x)<0$.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}$.

2. Найдем нули функции, решая уравнение $x^4+x^2+1=0$. Поскольку $D<0$, то уравнение не имеет действительных корней. Найдем точки разрыва функции, решая уравнение $x^2-4x-5=0$, откуда $x_1=-1$ и $x_2=5$.

3. Нанесем числа -1 и 5 на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 7.4).

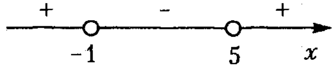


Рис. 7.4

4. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5}$ отрицательна: $(-1;\ 5)$.

Ответ: $(-1;\ 5)$.

Пример 5. Найдите целые решения неравенства

$$\left(\frac{-x}{x-5}\right)^2+\frac{-10x}{0,2(5-x)^2(x+5)}\le\frac{1}{0,2x+1}.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $f(x)\le 0$.

$$\frac{x^2}{(x-5)^2}-\frac{50x}{(x-5)^2(x+5)}-\frac{5}{(x+5)}\le 0,$$

$$\frac{x^2(x+5)-50x-5(x-5)^2}{(x-5)^2(x+5)}\le 0,\ \frac{x^3+5x^2-50x-5x^2+50x-125}{(x-5)^2(x+5)}\le 0,$$

$$\frac{x^3-125}{(x-5)^2(x+5)}\le 0.$$

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{x^3-125}{(x-5)^2(x+5)}$.

2. Найдем нули функции, решая уравнение $x^3-125=0$, откуда $x=5$. Найдем точки разрыва функции, решая уравнения $(x-5)^2=0$, откуда $x_{1,2}=5$ и $x+5=0$, откуда $x=-5$.

3. Нанесем полученные числа на координатную прямую (рис. 7.5) и определим знак функции $f(x)=\dfrac{x^3-125}{(x-5)^2(x+5)}$ на промежутке $(-5;\ 5)$, подставив в функцию любое число из указанного промежутка, например, число 0: $f(0)=-1<0$. Определим знак функции на остальных промежутках, чередуя их при переходе через точки 5 и -5 (числа 5 и -5 – корни нечетной кратности).

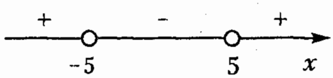


Рис. 7.5

4. Так как функция не положительна, то решением исходного неравенства является интервал $(-5;\ 5)$ (рис. 7.5).

Запишем целые решения неравенства:

$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Ответ: $\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Пример 6. Найдите среднее арифметическое целых решений неравенства $1<\dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}>1, \\ \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство системы методом интервалов, предварительно умножив эти неравенства на $x^2+1>0$.

1. Первое неравенство примет вид $3x^2-7x+8>x^2+1$ или $2x^2-7x+7>0$. Оно справедливо для любых $x\in\mathbf{R}$, так как график квадратичной функции $y=2x^2-7x+7$ не пересекает ось абсцисс ($D<0$) и ветви параболы направлены вверх.

2. Второе неравенство примет вид $x^2-7x+6<0$. Его решение: $x\in(1;6)$ (рис. 7.6).

Рис. 7.6

Поскольку решение второго неравенства является подмножеством решений первого, то интервал (1; 6) является решением исходной системы неравенств. Запишем целые решения системы неравенств: 2, 3, 4, 5. Найдем среднее арифметическое этих чисел:

$$(2+3+4+5):4=3{,}5.$$

Ответ: 3,5.

Пример 7. Найдите сумму целых решений системы неравенств $\dfrac{4}{x-2}<\dfrac{2}{x+1}\le\dfrac{2}{x}$, удовлетворяющих условию $0{,}04x^2\le1$.

Решение. Запишем неравенство $0{,}04x^2\le1$ в виде $x^2-25\le0$, $(x-5)(x+5)\le0$ и решим его методом интервалов.

Согласно рисунку 7.7 запишем его решение: $x\in[-5;\ 5]$.

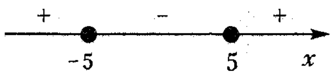


Рис. 7.7

Решим систему неравенств $\dfrac{2}{x-2}<\dfrac{1}{x+1}\le\dfrac{1}{2x}$ на отрезке $[-5;\ 5]$:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-2}<\dfrac{1}{x+1}, \\ \dfrac{1}{x+1}\le\dfrac{1}{2x}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{x+1}<0, \\ \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2x}\le0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x+4}{(x-2)(x+1)}<0, \\ \dfrac{x-1}{2x(x+1)}\le0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства системы показано на рисунке 7.8:

$$x \in [-5;\ -4) \cup (1;\ 2).$$

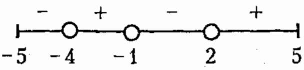


Рис. 7.8

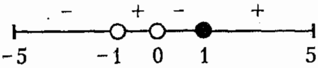


Рис. 7.9

Решение второго неравенства системы показано на рисунке 7.9:

$$x \in [-5;\ -1) \cup (0;\ 1].$$

Решение системы неравенств показано на рисунке 7.10:

$$x \in [-5;\ 4) \cup (0;\ 1].$$

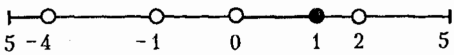


Рис. 7.10

Исходная система неравенств имеет два целых решения, удовлетворяющих условию $x^2 \le 25$.Найдем сумму этих решений: $-5+1=-4$.

Ответ: – 4.

Пример 8. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{16x-16-4x^2}{x-1}}+1.$$

Решение. Имеем иррациональную функцию четной степени корня. Следовательно, выражение, стоящее под знаком радикала, не должно быть отрицательным: $\frac{16x-16-4x^2}{x-1} \ge 0$ или $\frac{x^2-4x+4}{1-x} \ge 0$, $\frac{(x-2)^2}{1-x} \ge 0$.

Решим полученное неравенство методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{(x-2)^2}{1-x}$.

2. Найдем нули функции, решая уравнение $(x-2)^2=0$, откуда $x_{1,2}=2$. Найдем точки разрыва функции, решая уравнение $1-x=0$, откуда $x=1$.

3. Нанесем нули и точки разрыва функции на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 7.11).

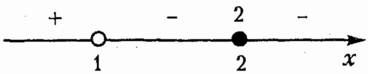


Рис. 7.11

4. Решением неравенства является промежуток $(-\infty;\ 0)$, на котором функция $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{1-x}$ положительна и изолированная точка 2, в которой функция обращается в нуль.

Следовательно, областью определения функции $y=\sqrt{\dfrac{16x-16-4x^2}{x-1}+1}$ будет промежуток $(-\infty;\ 0)$ и изолированная точка 2.

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup\{2\}$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства (1–21):

1. $(x+1)(x-3)(2-x)^2<0$. **2.** $x^6>9x^3-8$.

3. $x^4+3x^2>4x$. **4.** $a^4+a^3<a+1$.

5. $m^3+m^2>m+1$. **6.** $\dfrac{1}{3x-2-x^2}>\dfrac{3}{7x-4-3x^2}$.

7. $\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$. **8.** $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\le 0$.

9. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1}<0$. **10.** $\dfrac{4-x}{x-5}>\dfrac{1}{1-x}$.

11. $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$. **12.** $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1$.

13. $\dfrac{x^2-2x-3}{4x-11}\ge 1$. **14.** $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\ge 1$.

15. $\dfrac{1}{4+3x-x^2}>\dfrac{1}{15}$.

16. $\dfrac{(1-x)(2-x)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}>1$.

17. $\left(\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{3x}{4}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-x+\dfrac{(2-x)^2(x-1)}{(x+2)^2}\right)>0$.

18. $\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{4}{2x^2+7x+6}\le\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{4}{2x^3+3x^2-8x-12}$.

19. $-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-x+1}\ge\dfrac{2x-1}{x^3+1}$.

20. $x^2\left(x^4+36\right)<6\sqrt{3}\left(x^4+4\right)$.

21. $\left(x^2+4x+10\right)^2<7\left(x^2+4x+11\right)-7$.

Решите системы неравенств (22–23):

22. $x-4\le 0{,}2x^2\le 1{,}6x$.

23. $\dfrac{5x-7}{x-5}-4<-\dfrac{x}{5-x}+\dfrac{3x}{x^2-25}<0$.

24. Вычислите длину отрезка, на котором выполняется неравенство $x^2\le 6+x$.

25. Найдите целые решения неравенства $\dfrac{x^2+x+1}{-x^2+12x-35}>0$.

26. Укажите все целые значения x, для которых не выполняется неравенство $1<\dfrac{1-3x}{-2x-1}<2$.

27. Найдите произведение всех целых решений системы неравенств $\begin{cases}x^2-5x-6<0,\\-x^2+3x<0.\end{cases}$

28. Определите значения m, при которых неравенство $\dfrac{-x^2-mx+1}{2x^2-2x+3}>-1$ выполняется для любых x.

Найдите область определения функций (29–30):

29. $f(x)=\sqrt{9-\left(\dfrac{4x-22}{5-x}\right)^2}$.

30. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}-\dfrac{5}{x^2-49}$.

Ответы: **1.** $(-1;2)\cup(2;3)$. **2.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **3.** $x\in(-\infty;0)\cup\cup(1;+\infty)$. **4.** $(-1;1)$. **5.** $(1;+\infty)$. **6.** $(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{4}{3};2\right)$. **7.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup(3;5)\cup(5;+\infty)$. **8.** $(-8;1]$. **9.** $(-2;-1)\cup(-1;2)$. **10.** $(1;3)\cup(3;5)$. **11.** $(-4{,}5;-2)\cup(3;+\infty)$. **12.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **13.** $x\in\{[2;2{,}75)\cup[4;+\infty)\}$. **14.** $(-\infty;-2)\cup(-1;0]$. **15.** $(-1;4)$. **16.** $(-\infty;-3)\cup(-2;-1)$. **17.** $x\in\{(-2;0)\cup(0;1)\}$. **18.** $(-2;-1{,}5)\cup\cup[1;2)\cup[5;+\infty)$. **19.** $(-\infty;-1)\cup(-1;2]$. **20.** $\left(-\sqrt[4]{12};\sqrt[4]{12}\right)$.

21. $(-3;-1)$. **22.** $[0;\ 8]$. **23.** $(-8;-6{,}5)\cup(0;5)$. **24.** 5. **25.** 6. **26.** $\{-3;-2;-1;0;1;2\}$. **27.** 20. **28.** $m\in(-6;\ 2)$. **29.** $\left[\frac{37}{7};\ 7\right]$. **30.** $(-\infty;\ -7)\cup(-7;\ -2]\cup(1;\ 7)\cup(7;\ 8]\cup(11;\ +\infty)$.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Наименьшее целое решение неравенства $\left(1-x\sqrt{2}\right)^2+\left(2-x\sqrt{7}\right)^2\le(1-3x)^2$ равно	1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) −2; 5) −3 .
2	Количество целых отрицательных чисел, не являющихся решениями неравенства $\frac{(x+3)^2}{-(2x+5)}>0$, равно	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 5; 5) 6.
3	Среднее арифметическое целых чисел, не удовлетворяющих условию $\left(x^2+3x+1\right)\left(x^2+3x-3\right)\ge5$, равно	1) −1,5; 2) −3; 3) 3; 4) 4,5; 5) 18.
4	Длина отрезка, являющегося решением неравенства $x^4+3x^3+2x^2+3x\le-1$, равна	1) 3; 2) 6; 3) $6-2\sqrt{5}$; 4) $2\sqrt{5}$; 5) $\sqrt{5}$.
5	Среднее арифметическое неположительных решений неравенства $x^3+4\ge x^2+4x$ равно	1) −3; 2) −1,5; 3) −1; 4) −2; 5) −0,5.
6	Количество отрицательных решений неравенства $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>\frac{6}{x^3}$ равно	1) 14; 2) 11; 3) 3; 4) 1; 5) 2.

№	Задания	Варианты ответов
7	Количество целых решений неравенства $-\frac{15}{x^2}-\frac{16}{x^4}<-1$ равно	1) 6; 2) 7; 3) 4; 4) 2; 5) 14.
8	Количество целых неотрицательных решений неравенства $x^3+2>2x^2+x$ равно	1) 2; 2) 1; 3) 13; 4) 4; 5) 11.
9	Решением системы неравенств $\begin{cases}(x^2+1)(3-2x)<0,\\ -3x>6+3x\end{cases}$ является множество чисел	1) **R**; 2) $(0;\ +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty;\ 0]$; 5) $[-2;\ 2]$.
10	Неравенство $\frac{2a}{a^2-2a+4}\le 1$ обращается в равенство, если число a принадлежит промежутку	1) $(-\infty;\ -3)$; 2) $(2;\ 5)$; 3) $[-3;\ -0{,}5]$; 4) $(3;\ +\infty)$; 5) $[1;\ 3)$.
11	Если $4\le x\le 5$, $2\le y\le 4$, то все значения выражения $\frac{2y-x}{y}$ принадлежат промежутку	1) $[0{,}5;\ 20]$; 2) $(0;\ 8)$; 3) $(-\infty;\ 0)$; 4) $[-0{,}5;\ 1]$; 5) $(-2;\ 0]$.
12	Количество целых неотрицательных чисел, не принадлежащих области определения функции $y=\sqrt{\frac{3-x}{-1+3x-2x^2}}$, равно	1) 8; 2) 4; 3) 1; 4) 3; 5) 2.

№	Задания	Варианты ответов
13	Количество целых чисел, не принадлежащих области определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x-10}{x^4-9x^2}}$, равно	1) 6; 2) 5; 3) 4; 4) 3; 5) 10.
14	Областью определения функции $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{x-2}-1}+\dfrac{1}{x^2+x-6}+$ $+\sqrt{x^2-3,24}$ является промежуток	1) $[1,8;\ 2)$; 2) $[-1,8;\ 2)$; 3) $(2;\ 3)$; 4) $[-1,8;\ 1,8]$; 5) $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер правильного ответа	2	3	1	5	3	5	1
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	2	3	5	4	4	3	1

8 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Иррациональным называют уравнение, содержащее переменную под знаком радикала.

Областъ допустимых значений иррационального уравнения состоит из тех значений переменной, при которых неотрицательны все выражения, стоящие под знаками радикалов четной степени.

Для решения иррациональных уравнений в простейших случаях используют: метод замены переменной, метод «уединения» радикала, метод приведения к смешанной системе уравнений и неравенств.

8.1. Уравнения четной степени корня

Рассмотрим метод «уединения» радикала, который состоит в том, что, оставляя радикал в одной части уравнения, возводят обе части этого уравнения в соответствующую степень до тех пор, пока не получат уравнение, не содержащее радикалов. При возведении уравнения в четную степень необходимо помнить, что обе его части не должны быть отрицательными.

Методы решений уравнений:

1. Если уравнение имеет вид $\sqrt{f(x)}=g(x)$, то ОДЗ: $f(x)\geq 0$.

Возведя обе части уравнения в квадрат (в общем случае в любую четную степень), при условии, что $g(x)\geq 0$, получим:

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)^2=g^2(x),\ f(x)=g^2(x).$$

2. Если уравнение имеет вид $\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{\varphi(x)}$, то

$$\text{ОДЗ: }\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ g(x)\geq 0, \\ \varphi(x)\geq 0. \end{cases}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат: $\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)^2=$ $=\left(\sqrt{\varphi(x)}\right)^2$, «уединим» радикал, приведем подобные слагаемые и снова возведем обе части полученного уравнения в квадрат при условии, что обе части уравнения не отрицательны.

3. Если уравнение имеет вид $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\sqrt{\varphi(x)}$, то

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0. \end{cases}$$

Перенесем отрицательное слагаемое в правую часть уравнения $\sqrt{f(x)} = \sqrt{\varphi(x)} + \sqrt{g(x)}$ и дважды возведем обе его части в квадрат, при условии, что обе части уравнений не отрицательны.

8.2. Уравнения нечетной степени корня

Методы решений уравнений:

1. Если уравнение имеет вид $\sqrt[3]{f(x)} = \varphi(x)$, то, возведя обе части этого уравнения в куб, получим равносильное ему уравнение

$$f(x) = \varphi^3(x).$$

2. Если уравнение имеет вид $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x)$, то выполним следующие действия:

1) перенесем один радикал в правую часть уравнения:

$$\sqrt[3]{f(x)} = \varphi(x) - \sqrt[3]{g(x)};$$

2) возведем обе части уравнения в куб:

$$f(x) = \left(\varphi(x) - \sqrt[3]{g(x)}\right)^3;$$

3) применим подстановку $\sqrt[3]{g(x)} = a$ и получим уравнение, не содержащее переменную под знаком радикала.

Заметим, что уравнение $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x)$ можно решить иначе:

1) возведем обе части уравнения в куб:

$$\left(\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}\right)^3 = \varphi^3(x);$$

2) согласно формуле $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a+b)$ запишем:

$$f(x) + g(x) + 3\varphi(x)\sqrt[3]{f(x)g(x)} = \varphi^3(x);$$

3) «уединим» радикал и снова возведем обе части уравнения в куб. В результате получим уравнение, не содержащее переменную под знаком радикала.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите правильный вариант ответа (1–4):

1. Уравнение $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно:

1) $\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$

3) $\left[\begin{array}{l} f(x) = g^2(x), \\ f(x) > 0; \end{array}\right.$

4) $\left[\begin{array}{l} f(x) = g^2(x), \\ g(x) > 0; \end{array}\right.$

5) $\begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

2. Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно уравнению:

1) $f(x) = g(x)$;

2) $|f(x)| = |g(x)|$;

3) $f^2(x) = g^2(x)$;

4) $f(x) = g(x)$ при условии, что $f(x) < 0$ и $g(x) < 0$;

5) $f(x) = g(x)$ при условии, что $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$;

3. Уравнение $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$ равносильно уравнению:

1) $f(x) = g^3(x)$;

2) $f(x) = g^3(x)$ при условии, что $g(x) \geq 0$;

3) $f(x) = g^3(x)$ при условии, что $f(x) \geq 0$;

4) $f(x) = g^6(x)$;

5) $|f(x)| = g^3(x)$.

4. Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt[5]{g(x)}$ равносильно уравнению:

1) $f^5(x) = g^2(x)$;

2) $f^2(x) = g^5(x)$;

3) $f^{10}(x) = g^{10}(x)$;

4) $f^{10}(x)=g^{10}(x)$ при условии, что $g(x)\geq 0$;

5) $f^{10}(x)=g^{10}(x)$ при условии, что $f(x)\geq 0$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Номер правильного ответа	2	5	1	4

Примеры

Пример 1. Решите уравнение $\sqrt[5]{(5x+2)^3}-6=\dfrac{16}{\sqrt[5]{(5x+2)^3}}$.

Решение. Полагая, что $\sqrt[5]{(5x+2)^3}=a$ ($a\neq 0$), получим:

$$a-6-\frac{16}{a}=0,\ a^2-6a-16=0,\ \text{откуда } a_1=-2 \text{ и } a_2=8.$$

Учитывая подстановку $\sqrt[5]{(5x+2)^3}=a$, решим два уравнения:

1) $\sqrt[5]{(5x+2)^3}=-2$, $(5x+2)^{\frac{3}{5}}=-2$, $5x+2=(-2)^{\frac{5}{3}}$, $5x+2=$ $=-2\cdot(-2)^{\frac{2}{3}}$, $5x=-2\sqrt[3]{4}-2$, $5x=-2\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$, $x=-0{,}4\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$;

2) $\sqrt[5]{(5x+2)^3}=8$, $(5x+2)^{\frac{3}{5}}=2^3$, $5x+2=2^5$, $x=6$.

Ответ: $x_1=-0{,}4\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$, $x_2=6$.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}-6=0$.

Решение. Полагая $\sqrt[4]{x^3+8}=a$ и $\sqrt{x^3+8}=a^2$, получим $a^2+a-6=0$, откуда $a_1=-3$, $a_2=2$. Учитывая подстановку $\sqrt[4]{x^3+8}=a$ решим уравнение $\sqrt[4]{x^3+8}=2$. Тогда $x^3+8=16$, откуда $x=2$.

Ответ: 2.

Пример 3. Решите уравнение $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}=\sqrt[5]{x\sqrt{x}}+56$.

Решение. Применим свойства степеней и запишем уравнение в виде $x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{10}}-x^{\frac{1}{5}}x^{\frac{1}{10}}-56=0$ или $x^{\frac{6}{10}}-x^{\frac{3}{10}}-56=0$.

Полагая $x^{\frac{3}{10}}=a$, получим $a^2-a-56=0$, откуда $a_1=-7$, $a_2=8$.

Учитывая подстановку $x^{\frac{3}{10}}=a$ ($a\geq 0$) найдем значение x:

$$x^{\frac{3}{10}}=2^3,\ x^{\frac{1}{10}}=2,\ x=2^{10},\ x=1024.$$

Ответ: 1024.

Пример 4. Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{3}{4}$.

Решение. Уравнение запишем в виде $\dfrac{\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{x^2}}=\dfrac{3}{4}$.

Полагая $\sqrt[6]{x}=a$ ($a>0$), получим:

$$\frac{a^3+a^2}{a^3-a^2}=\frac{3}{4},\ \frac{a^2(a+1)}{a^2(a-1)}=\frac{3}{4},\ \frac{a+1}{a-1}=\frac{3}{4},\ 4a+4=3a-3,\ a=-7.$$

Уравнение $\sqrt[6]{x}=-7$ корней не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 5. Найдите сумму корней уравнения

$$0{,}5x^2-2x-3=0{,}5\sqrt{2x^2-8x+12}.$$

Решение. Умножив обе части уравнения на 4, получим:

$$2x^2-8x-12=2\sqrt{2x^2-8x+12}.$$

Полагая $\sqrt{2x^2-8x+12}=a$, запишем:

$$2x^2-8x+12=a^2,\ 2x^2-8x=a^2-12.$$

Тогда исходное уравнение примет вид $a^2-12-12=2a$ или $a^2-2a-24=0$, откуда $a_1=6$, $a_2=-4$.

Поскольку $a\geq 0$, то решим уравнение $\sqrt{2x^2-8x+12}=6$. Тогда $2x^2-8x+12=36$, $x^2-4x-12=0$, откуда по теореме Виета $x_1+x_2=4$.

Ответ: 4.

Пример 6. Решите уравнение $1+\sqrt{1+x\sqrt{x-4}}=x$.

Решение. ОДЗ: $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$.

1. «Уединим» радикал: $\sqrt{1+x\sqrt{x-4}}=x-1$.

2. Возведем обе части уравнения в квадрат. Поскольку правая часть этого уравнения положительна на ОДЗ, получим:

$$1+x\sqrt{x-4}=x^2-2x+1,\ x\sqrt{x-4}=x^2-2x.$$

Так как число 0 не является корнем уравнения, то разделим обе его части на x и запишем: $\sqrt{x-4}=x-2$.

3. Поскольку правая часть уравнения $\sqrt{x-4}=x-2$ положительна на ОДЗ, то возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$x-4=x^2-4x+4,\ x^2-5x+8=0, \text{ откуда } x\in\varnothing.$$

Ответ: $\varnothing$.

Пример 7. Определите число корней уравнения

$$\sqrt{2x-9}+\sqrt{x-8}=\sqrt{x+5}.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}2x-9\ge 0,\\ x-8\ge 0,\\ x+5\ge 0;\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 8.$

1. Возведем обе части уравнения в квадрат и «уединим» радикал:

$$\left(\sqrt{2x-9}+\sqrt{x-8}\right)^2=\left(\sqrt{x+5}\right)^2,$$

$$2x-9+2\sqrt{(2x-9)(x-8)}+x-8=x+5,$$

$$2\sqrt{(2x-9)(x-8)}=-2x+22,\ \sqrt{(2x-9)(x-8)}=11-x.$$

2. Снова возведем обе части полученного уравнения в квадрат при условии, что его правая часть неотрицательна, то есть $x\le 11$:

$$(2x-9)(x-8)=x^2-22x+121,\ x^2-3x-49=0,$$

$$\text{откуда, } x_1=\frac{3+\sqrt{205}}{2},\ x_2=\frac{3-\sqrt{205}}{2}.$$

Так как $x_2=\dfrac{3-\sqrt{205}}{2}$ – посторонний корень уравнения, то данное уравнение имеет единственный корень $x_1=\dfrac{3+\sqrt{205}}{2}$.

Ответ: 1.

Пример 8. Найдите модуль разности корней уравнения

$$\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}3x+7\ge 0,\\ x+1\ge 0;\end{cases} \Leftrightarrow x\ge -1.$

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3x+7}=\sqrt{x+1}+2$ и возведем обе его части в квадрат:

$$3x+7=x+1+4\sqrt{x+1}+4,\ 4\sqrt{x+1}=2x+2,\ 2\sqrt{x+1}=x+1.$$

Полагая $\sqrt{x+1}=a$, получим $a^2=2a$, $a(a-2)=0$, откуда $a_1=0$, $a_2=2$.

Тогда $\sqrt{x+1}=0$, откуда $x=-1$ или $\sqrt{x+1}=2$, откуда $x=3$.

Найдем модуль разности корней уравнения: $|-1-3|=4$.

Ответ: 4.

Пример 9. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{x-1}}+\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}-3=0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{x-1}}=3-\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}$$

и возведем обе его части в куб. Получим:

$$(\sqrt[3]{6+\sqrt{x-1}})^3=(3-\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}})^3,$$

$$6+\sqrt{x-1}=27-27\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}+9(\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}})^2-3+\sqrt{x-1},$$

$$\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}\right)^2-3\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}+2=0.$$

Применим подстановку $\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}=a$.

Решая уравнение $a^2-3a+2=0$, получим $a_1=1$, $a_2=2$.

Учитывая подстановку $\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}=a$, решим два уравнения:

1) $\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}=1$, $(\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}})^3=1^3$, $3-\sqrt{x-1}=1$, $\sqrt{x-1}=2$, $x-1=4$, $x=5$;

2) $\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}=2$, $(\sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}})^3=2^3$, $3-\sqrt{x-1}=8$, $\sqrt{x-1}=-5$, $x\in\varnothing$.

Ответ: 5.

Пример 10. Решите уравнение $\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{3x+2}$.

Решение. Полагая $\sqrt{x+2}=a$ и $\sqrt[3]{3x+2}=b$, получим:

$$a^2=x+2,\ 3a^2=3x+6,\ b^3=3x+2.$$

Тогда $3a^2-b^3=3x+6-3x-2=4$.

Заменим уравнение $\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{3x+2}=0$ равносильной ему системой уравнений $\begin{cases}a-b=0,\\3a^2-b^3=4.\end{cases}$

Поскольку $a=b$, то второе уравнение системы примет вид $3a^2-a^3=4$ или $a^3-3a^2+4=0$. Очевидно, что число -1 является корнем этого уравнения.

Выполним деление многочлена a^3-3a^2+4 на двучлен $a+1$:

$$\begin{array}{r|l} -\;a^3-3a^2+4 & a+1 \\ \underline{a^3+a^2} & \overline{a^2-4a+4} \\ -\;-4a^2+4 & \\ \underline{-4a^2-4a} & \\ -\;4a+4 & \\ \underline{4a+4} & \\ 0 & \end{array}$$

Запишем $(a+1)(a^2-4a+4)=0$ или $(a+1)(a-2)^2=0$, откуда $a_1=-1$ (этот корень уравнения был уже найден) и $a_{2,3}=2$.

Поскольку $\sqrt{x+2}=a\geq 0$, то $\sqrt{x+2}=2$, $x+2=4$ и $x=2$.

Ответ: 2.

Пример 11. Определите значение a, при котором уравнение $(x+3a)\sqrt{x-4}=0$ имеет один корень.

Решение. Запишем ОДЗ: $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$.

Найдем корни уравнения, решая совокупность уравнений $\sqrt{x-4}=0$, откуда $x_1=4$ и $x+3a=0$, откуда $x_2=-3a$. Очевидно, что $x_1=4$ – корень уравнения. Поскольку согласно условию задачи уравнение имеет один корень, то $x_2=-3a$ – посторонний корень, то есть он не принадлежит области допустимых значений уравнения. В таком случае $-3a<4$ и $a>-\frac{4}{3}$.

Ответ: $a>-\frac{4}{3}$.

Пример 12. Найдите произведение корней уравнения

$$\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(2-\sqrt{2x+3}\right)=-x.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+1\geq 0, \\ 2x+3\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1, \\ x\geq -1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow x\geq -1.$

Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}-2-x=0$$

и разложим его левую часть на множители:

$$\left(\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+3}\right)-\left(\sqrt{x+1}+1\right)-\left(\sqrt{x+1}+x+1\right)=0,$$

$$\sqrt{2x+3}\left(\sqrt{x+1}+1\right)-\left(\sqrt{x+1}+1\right)-\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)=0,$$

$$\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+3}-1-\sqrt{x+1}\right)=0.$$

Поскольку $\left(\sqrt{x+1}+1\right)>0$, то данное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{2x+3}-1-\sqrt{x+1}=0$ или уравнению $\sqrt{2x+3}=1+\sqrt{x+1}$, возводя обе части которого в квадрат, получим:

$$2x+3=1+2\sqrt{x+1}+x+1,\ x+1-2\sqrt{x+1}=0,\ \sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-2\right)=0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений $\sqrt{x+1}=0$, откуда $x=-1$ и $\sqrt{x+1}=2$, откуда $x=3$.

Так как оба корня принадлежат области допустимых значений уравнения, то найдем их произведение: $-1\cdot 3=-3$.

Ответ: –3.

Пример 13. Решите уравнение

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=6.$$

Решение. Преобразуем выражения, записанные под знаками радикалов:

$$x-4\sqrt{x-4}=x-4-4\sqrt{x-4}+4=\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2;$$

$$x+4\sqrt{x-4}=x-4+4\sqrt{x-4}+4=\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2.$$

Данное уравнение примет вид:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2}+2\sqrt{\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2}=6 \text{ или}$$

$$\left|\sqrt{x-4}-2\right|+2\left|\sqrt{x-4}+2\right|=6.$$

Запишем ОДЗ уравнения: $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\in[4;\ +\infty)$.

Тогда $\left|\sqrt{x-4}+2\right|=\sqrt{x-4}+2$ (см. п. 10.2) и получим $\left|\sqrt{x-4}-2\right|+2\sqrt{x-4}-2=0$. Решим это уравнение методом интервалов согласно алгоритму, приведенному в п. 10.3.

1. Найдем нули функции, стоящей под знаком модуля, решая уравнение $\sqrt{x-4}-2=0$, откуда $x=8$.

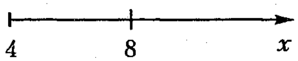


Рис. 8.1

2. Нанесем число $x=8$ на ОДЗ уравнения (рис. 8.1) и рассмотрим полученные промежутки:

1) если $x \in [4; 8]$, то $\sqrt{x-4}-2<0$, следовательно,

$\left|\sqrt{x-4}-2\right| = -\sqrt{x-4}+2$ и уравнение примет вид

$-\sqrt{x-4}+2+2\sqrt{x-4}-2=0$ или $\sqrt{x-4}=0$, откуда $x=4$;

2) если $x \in (8; +\infty)$, то $\sqrt{x-4}-2>0$, следовательно,

$\left|\sqrt{x-4}-2\right| = \sqrt{x-4}-2$ и уравнение примет вид

$\sqrt{x-4}-2+2\sqrt{x-4}-2=0$ или $\sqrt{x-4}=\frac{4}{3}$, откуда $x=5\frac{7}{9}$.

Так как число $5\frac{7}{9}$ не принадлежит рассматриваемому промежутку, то $x=5\frac{7}{9}$ – посторонний корень уравнения.

Ответ: 4.

Пример 14. Найдите произведение корней уравнения

$$\frac{\sqrt[3]{x+3}}{x}+\frac{\sqrt[3]{x+3}}{3}=\frac{16\sqrt[3]{x}}{3}.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\frac{(x+3)^{\frac{1}{3}}}{x}+\frac{(x+3)^{\frac{1}{3}}}{3}=\frac{16x^{\frac{1}{3}}}{3}$$

и умножим обе его части на выражение $3x \neq 0$. Получим:

$$3(x+3)^{\frac{1}{3}}+x(x+3)^{\frac{1}{3}}=16x^{\frac{4}{3}},\ (x+3)^{\frac{1}{3}}(x+3)=16x^{\frac{4}{3}},$$

$$(x+3)^{\frac{4}{3}}=2^4x^{\frac{4}{3}},\ (x+3)^4=2^{12}x^4.$$

Тогда $x+3=8x$, откуда $x=\frac{3}{7}$ или $x+3=-8x$, откуда $x=-\frac{1}{3}$.
Найдем произведение корней уравнения: $-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}=-\frac{1}{7}$.
Ответ: $-\frac{1}{7}$.

Пример 15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{-x}+\sqrt[3]{-y}=-3,\\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3.\end{cases}$$

Решение. Полагая $\sqrt[3]{x}=a$, $\sqrt[3]{y}=b$ систему уравнений запишем в виде $\begin{cases}a+b=3,\\ a^2-ab+b^2=3.\end{cases}$

Преобразуем второе уравнение системы:

$$a^2+2ab+b^2-3ab=3,\ (a+b)^2-3ab=3.$$

Поскольку $a+b=3$, то получим $9-3ab=3$, $ab=2$ и запишем:

$$\begin{cases} a+b=3, \\ ab=2. \end{cases}$$

Очевидно, что решением системы являются две пары чисел:

$$a_1=1,\ b_1=2 \text{ и } a_2=2,\ b_2=1.$$

Учитывая подстановку $\sqrt[3]{x}=a$, $\sqrt[3]{y}=b$, получим:

1) $\sqrt[3]{x}=1$, $\sqrt[3]{y}=2$, откуда $x=1,\ y=8$;

2) $\sqrt[3]{x}=2$, $\sqrt[3]{y}=1$, откуда $x=8,\ y=1$.

Ответ: $(1;\ 8)$; $(8;\ 1)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения (1–29):

1. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}-\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{x-5}}-2=0$.

2. $\left(\dfrac{x+5}{16x}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{\frac{1}{2}}=1$.

3. $0{,}5\sqrt{x^2+32}-\sqrt[4]{x^2+32}-1{,}5=0$.

4. $\sqrt[3]{-x}-2{,}5\sqrt[6]{x}+9=0$.

5. $2\sqrt[4]{3x+10^{-1}}+1=3\sqrt{3x+10^{-1}}$.

6. $\dfrac{5}{2x+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}=0{,}6$.

7. $0{,}25x\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{(-x)^2}+1=0$.

8. $\dfrac{1}{2^{-1}\sqrt[3]{x}+1}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{10}=1$.

9. $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{-x}-1}=4$.

10. $2^{-3}x\sqrt[3]{x}+2=\sqrt[3]{x^2}$, $x>0$.

11. $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}=22\sqrt[30]{x^{14}}$.

12. $x^2+4\sqrt{x^2+3x-6}=18-3x$.

13. $2{,}1\sqrt{2{,}1x+1}+3{,}1=2{,}1x+1$.

14. $\sqrt{42-x}-\sqrt{6-x}=2$.

15. $\dfrac{\sqrt{x^2+x+4}-2x+2}{x-1}=0$.

16. $\sqrt{x+6}-\sqrt{3x-26}-\sqrt{x-6}=0$.

17. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}-2\sqrt[6]{x^3}=0$.

18. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}-\sqrt{16}=0$.

19. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}-\sqrt{2}\sqrt{x-6}=0$.

20. $\sqrt{5+x^{\frac{1}{3}}}+\sqrt{5-x^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[3]{x}$.

21. $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}-9}-\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=-4$.

22. $\sqrt[3]{24+x^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{5+x^{\frac{1}{2}}}+1$.

23. $\sqrt[3]{x+34}+\sqrt[3]{3-x}=1$.

24. $\sqrt[3]{5x+7}+\sqrt[3]{12-5x}-1=0$.

25. $\sqrt{x+2}=\sqrt[9]{(3x+2)^3}$.

26. $\dfrac{\sqrt{4x+16}+2\sqrt{x-4}+24}{4}=x+\sqrt{x^2-16}$.

27. $\sqrt{3x^2-2x+15}=7-\sqrt{3(-x)^2-2x+8}$.

28. $\dfrac{(5-x)^{\frac{3}{2}}+(x-3)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}}=2$.

29. $\dfrac{\sqrt{3}}{x-\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x+\sqrt{x^2-x}}+3$.

Решите системы уравнений (30–38):

30. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=91, \\ 2x+2(xy)^{0,5}+2y=26. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4, \\ \sqrt{2x+2y}-\sqrt{2x-2y}=\sqrt{128}. \end{cases}$

32. $\begin{cases} (x+y)^{\frac{1}{2}}+(x-y)^{\frac{1}{3}}=6, \\ \sqrt[18]{(x+y)^9(x-y)^6}=2^3. \end{cases}$

33. $\begin{cases}\sqrt{yx^{-1}}-2\sqrt{xy^{-1}}=1,\\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4.\end{cases}$

34. $\begin{cases}x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{2}}=12,\\ xy=2^6.\end{cases}$

35. $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=2^2,\\ 2^{-2}x+2^{-2}y-7=0.\end{cases}$

36. $\begin{cases}y\sqrt{x}-x\sqrt{y}=3\sqrt{2},\\ xy^2-x^2y=30.\end{cases}$

37. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{8}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{12}}=7,\\ \sqrt{\dfrac{x+y}{8}}-\sqrt{\dfrac{x-y}{12}}=3.\end{cases}$

38. $\begin{cases}3\left(2-(x-y)^{0,5}\right)^{-1}+10\left(2+\sqrt{x+y}\right)^{-1}=5,\\ 8\left(2-(x-y)^{0,5}\right)^{-1}-10\left(2+\sqrt{x+y}\right)^{-1}=6.\end{cases}$

39. Найдите произведение модулей корней уравнения

$$\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}-\sqrt[5]{\frac{1-x}{16x}}=\frac{5}{2}.$$

40. Найдите произведение квадратов корней уравнения

$$1{,}5\sqrt[3]{x}-2{,}5\sqrt[3]{x^{-1}}-x^{-1}=0.$$

41. Найдите сумму квадратов корней уравнения

$$x^2-20+\sqrt{x^2+20}=2.$$

42. Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $\sqrt[3]{x-3}-\sqrt{6+x}+3=0$.

43. Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $\sqrt{4x+1}-\sqrt[3]{-2(5x+2)}-9=0$.

44. Определите количество корней уравнения

$$\sqrt[15]{(x+7)^5}=\sqrt{x+3}.$$

Ответы: **1.** $x=1$. **2.** $x=\frac{5}{3}$. **3.** $x_{1,2}=\pm 7$. **4.** $x=64$. **5.** $x=0{,}3$. **6.** $x=12$. **7.** $x_{1,2}=\pm 2\sqrt{2}$. **8.** $x_1=8;\ x_2=27$. **9.** $x=8$. **10.** $x=8$.

11. $x_1=0;\ x_2=4$. **12.** $x_1=-5$; $x_2=2$. **13.** $x=4{,}1$. **14.** $x=-58$.
15. $x=3$. **16.** $x=10$. **17.** $x=4$. **18.** $x=5$. **19.** $x_1=8;\ x_2=7$.
20. $x=64$. **21.** $x=0$. **22.** $x=9$. **23.** $x_1=-61;\ x_2=30$. **24.** $x_1=4;\ x_2=-3$.
25. $x=2$. **26.** $x=5$. **27.** $x_1=1;\ x_2=-\frac{1}{3}$. **28.** $x_1=3;\ x_2=5$. **29.** $x=4$.
30. $(1;\ 9);\ (9;\ 1)$. **31.** $(41;\ 40)$. **32.** $(12;\ 4);\ (34;\ -30)$. **33.** $(1;\ 4)$.
34. $(1;\ 64);\ (64;\ 1)$. **35.** $(1;\ 27);\ (27;\ 1)$. **36.** $(0{,}5;\ 8)$. **37.** $(124;\ 76)$.
38. $(5;\ 4)$. **39.** $\frac{2}{511}$. **40.** 64. **41.** 32. **42.** 28. **43.** 6. **44.** 1.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $\frac{x}{x+1}-3=\sqrt{\frac{4x+4}{x}}$	1) $\frac{31}{6}$; 2) $\frac{17}{9}$; 3) $\frac{23}{3}$; 4) $-\frac{4}{3}$; 5) -3.
2	Разность наибольшего и наименьшего корней уравнения $4\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+4\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=17$ равна	1) $\frac{13}{27}$; 2) $\frac{9843}{431}$; 3) $\frac{514}{255}$; 4) $\frac{40}{51}$; 5) $-2\frac{4}{25}$.
3	Корень уравнения $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+24}=14$ заключен между целыми числами, сумма которых равна	1) 10; 2) 20; 3) -4; 4) 8; 5) 80.
4	Корень уравнения $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}+1=x$ принадлежит промежутку	1) $[1;\ 3]$; 2) $[2;\ 4]$; 3) $(-5;\ 0)$; 4) $(3;\ 6]$; 5) $[10;\ 11)$.

№	Задания	Варианты ответов
5	Если k – количество корней уравнения $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{1-x}=0$, а x_0 – его отрицательный корень, то значение выражения k^3x^2 равно	1) 16; 2) 332; 3) 77; 4) 1; 5) 8.
6	Среднее арифметическое корней уравнения $(x+4)(x+1)-6=3\sqrt{x^2+5x+2}$ равно	1) 2,5; 2) 3; 3) −2,5; 4) −4,5; 5) 13.
7	Сумма корней уравнения $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{2x^2+2x+9}$ равна	1) 10; 2) −1; 3) 11; 4) 1,3; 5) 3.
8	Среднее арифметическое корней уравнения $\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2-x}=-\sqrt[3]{3-2x}$ равно	1) 1,5; 2) 1,25; 3) 1; 4) 1,75; 5) 4.
9	Разность большего и меньшего корней уравнения $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3=1$ равна	1) 19; 2) −4; 3) 2; 4) 4,5; 5) 9.
10	Найдите произведение корней (или корень, если он единственный) уравнения $\sqrt{x+2\sqrt{x+7}+8}+\sqrt{x-\sqrt{x+7}+1}=4$	1) 1; 2) 10,5; 3) −1,2; 4) 2; 5) 2,2.
11	Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $2^{-1}\sqrt{x}+\dfrac{x+2^{-1}}{x+2}=2^0$	1) 1; 2) −12; 3) 4,3; 4) 8,2; 5) 15,5.
12	Если $(x;\ y)$ – решение системы уравнений $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=0{,}5\sqrt{xy},\\ 0{,}2x+0{,}2y=1,\end{cases}$ то сумма чисел x и y равна	1) 0,1; 2) 1,4; 3) −5; 4) 5; 5) −17.

№	Задания	Варианты ответов
13	Если $(x;\, y)$ – решение системы уравнений $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4,\end{cases}$ то значение выражения $\sqrt[4]{xy}$ равно	1) 3; 2) 1; 3) 2; 4) 1,5; 5) 5.
14	Если $(x;\, y)$ – решение системы уравнений $\begin{cases}x^{\frac{-1}{2}}\sqrt[3]{x}+y^{\frac{-1}{2}}\sqrt[3]{y}=1{,}5,\\ xy=64,\end{cases}$ то значение выражения $\lvert x-y\rvert$ равно	1) 60; 2) 64; 3) 63; 4) 65; 5) 3.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер правильного ответа	4	3	5	1	4	3	2
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	1	3	4	1	4	1	3

9 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

9.1. Методы решения неравенств

Иррациональными называют неравенства, содержащие переменную под знаком радикала.

При решении иррациональных неравенств необходимо помнить:

а) если обе части неравенства на ОДЗ принимают только неотрицательные значения, то, возводя обе его части в квадрат, (или в любую четную степень) и сохранив знак исходного неравенства, получим неравенство, равносильное данному неравенству (на ОДЗ);

б) возводя обе части неравенства в одну и ту же нечетную степень, всегда получим неравенство, равносильное данному неравенству.

1. Рассмотрим неравенство вида $\sqrt{f(x)} \le g(x)$.

Так как выражение, стоящее под знаком радикала и правая часть неравенства не могут быть отрицательными, то, возводя обе части неравенства в квадрат, получим $f(x) \le g^2(x)$. Учитывая систему ограничений $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \end{cases}$ найдем решение неравенства.

2. Рассмотрим неравенство вида $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$. Так как $g(x)$ может принимать как неотрицательные, так и отрицательные значения, то возможны два случая:

1) если правая часть неравенства не отрицательна, то есть $g(x) \ge 0$, то решаем систему неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge g^2(x); \end{cases}$

2) если правая часть неравенства отрицательна, то есть $g(x) < 0$, то решаем систему неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Решением исходного неравенства является объединение решений, полученных в каждом случае.

Заметим, что неравенства $\sqrt{f(x)} \le g(x)$ и $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ можно решить методом интервалов (см. п. 7.1).

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите правильный вариант ответа (1–3):

1. Неравенство $\sqrt{f(x)} \le g(x)$ равносильно:

1) неравенству $f(x) \le g^2(x)$;

2) неравенству $f(x) \le g^2(x)$, при условии, что $f(x) \ge 0$;

3) неравенству $f(x) \le g^2(x)$ при условии, что $g(x) \ge 0$ и $f(x) \ge 0$;

4) неравенству $f(x) \le g^2(x)$ при условии, что $g(x) \ge 0$;

5) неравенству $f(x) \le g^2(x)$ при условии, что $g(x) < 0$, и $f(x) \ge 0$.

2. Если $g(x) \ge 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ равносильно:

1) неравенству $f(x) \ge g^2(x)$;

2) неравенству $f(x) \ge g^2(x)$ при условии, что $f(x) \ge 0$;

3) неравенству $f(x) \ge g(x)$ при условии, что $f(x) \ge 0$;

4) неравенству $|f(x)| \ge g^2(x)$;

5) системе неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

3. Если $g(x) < 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ равносильно:

1) неравенству $f(x) \ge g^2(x)$;

2) неравенству $f(x) \ge g^2(x)$ при условии, что $f(x) \ge 0$;

3) системе неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0; \end{cases}$

4) системе неравенств $\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0, \\ f(x) \ge g^2(x); \end{cases}$

5) совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{array}\right.$

Укажите все необходимые действия:

4. Чтобы решить неравенство $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$ методом интервалов, необходимо:

1) записать неравенство в виде $\sqrt{f(x)} - g(x) \ge 0$;

2) найти нули функций $f(x)$ и $g(x)$;

3) найти нули функции $F(x) = \sqrt{f(x)} - g(x)$;

4) найти область определения функций $f(x)$ и $g(x)$;

5) найти область определения функции $F(x) = \sqrt{f(x)} - g(x)$;

6) нанести нули функции на ее область определения;

7) установить знаки функции на полученных промежутках;

8) записать все промежутки, на которых рассматриваемая функция положительна;

9) записать все промежутки, на которых рассматриваемая функция не отрицательна.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Вариант правильного ответа	3	2	3	1, 3, 5, 6, 7, 9

Примеры

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt{2x - 15 + x^2} > -1$.

Решение. Так как выражение, стоящее под знаком радикала не может быть отрицательным, то запишем ОДЗ неравенства:

$$x^2 + 2x - 15 \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -5] \cup [3;\ +\infty) \text{ (рис. 9.1).}$$

Рис. 9.1

Поскольку левая часть неравенства неотрицательна, а правая – всегда отрицательна на ОДЗ, то решением неравенства является любое число из промежутков $(-\infty;\ -5]$ и $[3;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -5] \cup [3;\ +\infty)$.

Пример 2. Найдите целые решения неравенства

$$5 > \sqrt{x+1} + x.$$

Решение. Способ 1. Запишем неравенство в виде

$$\sqrt{f(x)} < g(x):\ \sqrt{x+1} < 5 - x.$$

Так как выражение, стоящее под знаком радикала и правая часть неравенства не могут быть отрицательными, то запишем систему ограничений:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ 5-x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x \leq 5; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;\ 5].$$

Возводя обе части неравенства $\sqrt{x+1} < 5-x$ в квадрат, получим: $(\sqrt{x+1})^2 < (5-x)^2$, $x+1 < 25-10x+x^2$, $x^2-11x+24>0$.

Решим это неравенство методом интервалов (рис. 9.2). Очевидно, что решением неравенства является промежуток $[-1;\ 3)$.

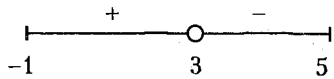


Рис. 9.2

Запишем целые решения неравенства: $\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

Способ 2. Запишем неравенство в виде $\sqrt{x+1}-5+x<0$ и решим его методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x+1}-5+x$.

2. $D(f): x \geq -1$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\sqrt{x+1}=5-x$ при условии, что $x \leq 5$. Получим: $x+1=25-10x+x^2$, $x^2-11x+24=0$, откуда $x_1=3$, $x_2=8$, причем $x_2=8$ – посторонний корень уравнения, так как он не удовлетворяет условию $x \leq 5$.

4. Нанесем число 3 на область определения функции и установим ее знаки на полученных промежутках (рис. 9.3).

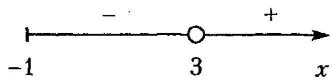


Рис. 9.3

5. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x)=\sqrt{x+1}-5+x$ отрицательна: $x \in [-1;\ 3)$.

Ответ: $\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

Пример 3. Найдите сумму целых решений неравенства $\sqrt{x^2-4x} > x-3$, удовлетворяющих условию $\sqrt[4]{(1-x)^4} \leq \left(-\sqrt{2}\right)^4$.

Решение. Способ 1. Имеем неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$. Рассмотрим два случая.

1. Если правая часть неравенства неотрицательна, то запишем систему ограничений: $\begin{cases} x^2-4x\ge 0, \\ x-3\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow x\in[4;+\infty)$ (рис. 9.4).

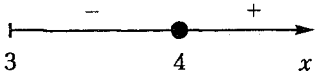


Рис. 9.4

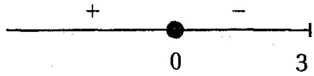


Рис. 9.5

Возведем обе части неравенства в квадрат и получим:

$$x^2-4x>x^2-6x+9,\ 2x>9,\ x>4{,}5.$$

Учитывая систему ограничений, запишем: $x\in(4{,}5;\ +\infty)$.

2. Если правая часть неравенства отрицательна, то решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2-4x\ge 0, \\ x-3<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4)\ge 0, \\ x<3; \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;0] \text{ (рис. 9.5)}.$$

Решением исходного неравенства является объединение решений, полученных в первом и во втором случаях:

$$x\in(-\infty;\ 0]\cup(4{,}5;\ +\infty).$$

Рассмотрим дополнительное ограничение $\sqrt[4]{(1-x)^4}\le\left(-\sqrt{2}\right)^4$ и запишем его в виде $|x-1|\le 4$. Это неравенство равносильно системе неравенств: $\begin{cases} x-1\le 4, \\ x-1\ge -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5, \\ x\ge -3; \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-3;\ 5]$.

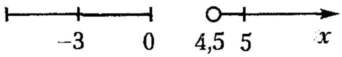


Рис. 9.6

Запишем решение задачи (рис. 9.6): $x\in[-3;\ 0]\cup(4{,}5;\ 5]$.

Найдем сумму целых решений задачи: $-3-2-1+0+5=-1$.

Способ 2. Запишем неравенство в виде $\sqrt{x^2-4x}-x+3>0$ и решим его методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x^2-4x}-x+3$.

2. $D(f): x^2-4x\ge 0$. Поскольку решения неравенства должны удовлетворять условию $|x-1|\le 4 \Leftrightarrow x\in[-3;\ 5]$, то решим неравенство $x^2-4x\ge 0$ на отрезке $[-3;\ 5]$ и согласно рисунку 9.7 запишем: $x\in[-3;\ 0]\cup[4;\ 5]$.

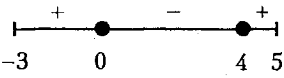


Рис. 9.7

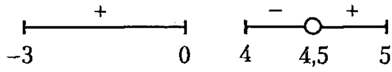


Рис. 9.8

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\sqrt{x^2-4x}=x-3$, при условии, что $x-3\geq 0$. Получим: $x^2-4x=x^2-6x+9$, откуда $x=4{,}5$.

4. Нанесем число 4,5 на область определения функции и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 9.8).

5. Решением неравенства является объединение промежутков, на которых функция $f(x)=\sqrt{x^2-4x}-x+3$ положительна:

$$x\in[-3;\,0]\cup(4{,}5;\,5].$$

Этим промежуткам принадлежит 5 целых решений неравенства, сумма которых равна -1.

Ответ: -1.

Пример 4. Найдите среднее арифметическое целых решений неравенства $\sqrt[11]{-x^2+5x+6}\cdot\sqrt[10]{4-x}>0$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt[11]{-x^2+5x+6}\cdot\sqrt[10]{4-x}$.

2. $D(f)$: $4-x\geq 0$, $x\leq 4$.

3. Найдем нули функции, решая уравнения $-x^2+5x+6=0$ и $4-x=0$. Получим: $x_1=6$, $x_2=-1$, $x_3=4$.

4. Нанесем числа -1 и 4 на область определения функции и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 9.9).

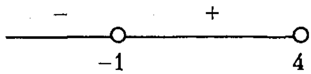


Рис. 9.9

5. Согласно рисунку 9.9 решением неравенства является интервал $(-1;\,4)$, на котором функция $f(x)=\sqrt[11]{-x^2+5x+6}\cdot\sqrt[10]{4-x}$ положительна.

Найдем среднее арифметическое целых решений неравенства:

$$(0+1+2+3):4=1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Пример 5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}-(x+3)}{x+3}>-1.$$

Решение. Преобразуем данное неравенство:

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}-\frac{x+3}{x+3}>-1,\ \frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}-1>-1,$$

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0.$$

Решим это неравенство методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}$.

2. Найдем область определения функции. Поскольку выражение, стоящее под знаком радикала не должно быть отрицательным, то $17-15x-2x^2\geq 0 \Leftrightarrow 2x^2+15x-17\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-8{,}5;\ 1]$ (рис. 9.10). Исключив из отрезка $[-8{,}5;\ 1]$ точку -3 (точку разрыва функции), окончательно получим: $x\in[-8{,}5;\ -3)\cup(-3;\ 1]$.

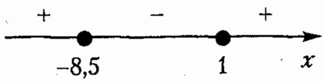


Рис. 9.10

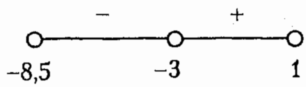


Рис. 9.11

3. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 9.11).

4. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}$ положительна: $x\in(-3;\ 1)$.

Ответ: $(-3;\ 1)$.

Пример 6. Решите неравенство $x-12\leq\sqrt{x}$.

Решение. Запишем неравенство в виде $x-\sqrt{x}-12\leq 0$ и решим его методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=x-\sqrt{x}-12$.

2. $D(f): x\geq 0$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $x-\sqrt{x}-12=0$.

По теореме Виета получим: $\sqrt{x}=4$, откуда $x=16$ и $\sqrt{x}=-3$, откуда $x\in\varnothing$.

4. Нанесем число 16 на область определения функции и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 9.12).

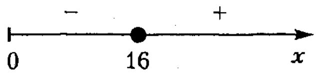


Рис. 9.12

5. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x)=x-\sqrt{x}-12$ не положительна: $x\in[0;\ 16]$.

Ответ: $[0;\ 16]$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства (1–13):

1. $\sqrt[3]{3}\sqrt{x^3+3x+4}>-\sqrt[3]{9}$.

2. $\sqrt{x+5}-1<-x$.

3. $\sqrt{3x-x^2}+x<4$.

4. $-\sqrt{x^2-x-12}>-x$.

5. $\sqrt{9x-20}-x<0$.

6. $\sqrt{x^2-4x}+3>x$.

7. $2^{-1}\sqrt{-x^2+6x-5}-2^2+2^0x>0$.

8. $(1-x)\cdot\sqrt{x^2-x-20}\le 0$.

9. $\sqrt{x-2}+\sqrt{3-x}+\sqrt{6-x}>\sqrt{x-1}$.

10. $\sqrt{3x^2+5x+8}\le\sqrt{3x^2+5x+1}+1$.

11. $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x}{x}-\dfrac{3}{x}\ge 2$.

12. $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$.

13. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\dfrac{x-3}{\sqrt{x-3}}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

14. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt[4]{x^2-2x+1}\cdot\sqrt[3]{x+3}\le 0.$$

15. Найдите количество целых решений неравенства

$$\sqrt[3]{x^2-4}\cdot\sqrt{x+8}<0.$$

16. Найдите координату середины отрезка, на котором выполняется неравенство $1{,}5\sqrt[6]{x+1}-1\ge-0{,}5\sqrt[3]{-x-1}$.

17. Найдите длину отрезка, на котором выполняется неравенство $-\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}+6\ge 0$.

18. Найдите наименьшее значение x, при котором справедливо неравенство $\frac{3-x}{2} \le \frac{\left(\sqrt{x}-5\right)^2}{6-x}$.

19. Найдите наибольшее значение x, при котором верно неравенство $1+x \le 2{,}5\sqrt{x}$.

20. Сколько целых чисел входит в область определения функции $y=\sqrt{\left(4-x^2\right)\sqrt{2x-8}}+\sqrt{17}$?

21. Найдите сумму целых решений системы неравенств

$$\sqrt{x^2-9x+20} \le \sqrt{x-1} \le \sqrt{x^2-13}.$$

Ответы: **1.** $[-1;\ +\infty)$. **2.** $x\in[-5;-1)$. **3.** $[0;\ 3]$. **4.** $[4;\ +\infty)$. **5.** $\left[\frac{20}{9};\ 4\right)\cup(5;\ +\infty)$. **6.** $(-\infty;\ 0]\cup(4{,}5;\ +\infty)$. **7.** $x\in(3;\ 4]$. **8.** $\{-4\}\cup\cup[5;\ +\infty)$. **9.** $[2;\ 3]$. **10.** $\left(-\infty;\ -\frac{8}{3}\right)\cup[1;\ +\infty)$. **11.** $(-\infty;\ 0)\cup[1;\ 2]$. **12.** $(-\infty;\ 0{,}75)\cup(4;\ 7)$. **13.** $(5;\ +\infty)$. **14.** 1. **15.** 3. **16.** 31,5. **17.** 16. **18.** 5. **19.** 4. **20.** 1. **21.** 22.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Количество целых решений неравенства $\sqrt{x+2}\cdot(3-x)>0$ равно	1) 6; 2) 4; 3) 5; 4) 7; 5) 11.
2	Число неотрицательных решений неравенства $\sqrt{3-x}\cdot(x+2)\le 0$ равно	1) 3; 2) 9; 3) 1; 4) 2; 5) 12.
3	Наибольшее целое решение неравенства $\sqrt{x^2-3x+2}+5>2x$ равно	1) 0; 2) −1; 3) 2; 4) 4; 5) 3.
4	Длина промежутка, который образуют все решения неравенства $\sqrt{3x-x^2}<4-x$, равна	1) 3; 2) 1,5; 3) 6; 4) 9; 5) 10,5.

№	Задания	Варианты ответов
5	Множество всех решений неравенства $\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$ имеет вид	1) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; 2) $(-0{,}5;\ 0)\cup(0;\ 0{,}5)$; 3) $[-0{,}5;\ 0{,}5]$; 4) $(-0{,}5;\ 0{,}5)$; 5) $[-0{,}5;0)\cup(0;0{,}5]$.
6	Наименьшее целое решение неравенства $\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}>35-12x$ равно	1) -1; 2) 1; 3) 0; 4) 2; 5) 4.
7	Наименьшее целое решение неравенства $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}<0$ равно	1) 3; 2) 2; 3) 4; 4) -2; 5) 7.
8	Множество решений неравенства $\sqrt{5x-4}-3+\sqrt{3x+1}<0$ имеет вид	1) $\left[\frac{2}{3};\ 3\right]$; 2) $\left[\frac{1}{3};\ 2\right]$; 3) $[0{,}8;\ 1)$; 4) $(0{,}8;\ 1)$; 5) $(0{,}8;\ 11)$.
9	Наибольшее целое отрицательное решение неравенства $\sqrt{x^2+3x+2}<\sqrt{x^2-x+1}+1$ равно	1) -2; 2) -1; 3) -23; 4) -7; 5) -13.
10	Количество целых решений неравенства $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}+2x<35$ равно	1) 6; 2) 2; 3) 3; 4) 11; 5) 7.
11	Количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{1+2^{-1}\sqrt{4-x^2}}+\frac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\frac{x^2}{x^3}$, равно	1) 10; 2) 3; 3) 4; 4) 1; 5) 12.

№	Задания	Варианты ответов
13	Неравенство $\sqrt{4-4x^3+x^6}+\sqrt[6]{4}>x$ не выполняется если	1) $x\in\left(-\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{2}\right)$; 2) $x\in\left(0;\ \sqrt[3]{2}\right]$; 3) $x=\sqrt[3]{2}$; 4) $x=\sqrt{2}$; 5) $x\in\left[\sqrt[3]{2};\ \sqrt{2}\right]$.
13	Среднее арифметическое целых значений x, при которых не выполняется неравенство $-\sqrt{x^4-2x^2+1}<x-1$, равно	1) 1,25; 2) –0,5; 3) –2; 4) 5,4; 5) 1,24.
14	Количество целых решений системы неравенств $\begin{cases}-\sqrt{4x-7}>-x,\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{5-x}-4>0\end{cases}$ равно	1) 2; 2) 1; 3) 7; 4) 3; 5) 4.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	2	3	5	1	5	4	3
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	3	2	1	3	3	2	1

10 УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

10.1. Определение модуля числа

Модулем (абсолютной величиной) числа a называется число a, если оно неотрицательно, и противоположное ему число, если a отрицательно: $|a|=a$, если $a\ge 0$ и $|a|=-a$, если $a<0$.

Геометрический смысл модуля. Модуль числа – это расстояние от начала отсчета до точки на координатной прямой, соответствующей этому числу (рис. 10.1)

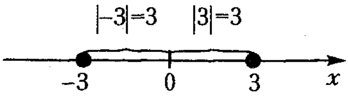


Рис. 10.1

Свойства модуля

$\lvert a\rvert\ge 0$;	(10.1)	$\lvert a+b\rvert\le\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$;	(10.5)
$\lvert a\rvert^2=a^2$;	(10.2)	$\lvert a-b\rvert\ge\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$;	(10.6)
$\lvert ab\rvert=\lvert a\rvert\lvert b\rvert$;	(10.3)	$\lvert x\rvert\le a\Leftrightarrow -a\le x\le a$;	(10.7)
$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert=\frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$;	(10.4)	$\lvert x\rvert\ge a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge a,\\ x\le -a.\end{array}\right.$	(10.8)

10.2. Раскрытие модуля

1. Если под знаком модуля положительная величина, то модуль просто опускаем.

Например, $|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$.

2. Если под знаком модуля отрицательная величина, то модуль опускаем и меняем знак выражения, стоящего под модулем.

Например, $|1-\sqrt{2}|=-1+\sqrt{2}$.

3. Если под знаком модуля переменная величина, то применяем метод промежутков.

Например, рассмотрим выражение $|x-1|$. Найдем нули функции, стоящей под знаком модуля: $x=1$. Рассмотрим промежутки $(-\infty;\ 1]$, $(1;\ +\infty)$ и раскроем модуль на каждом из них:

1) если $x \in (-\infty;\ 1]$, то $|x-1| = 1-x$;

2) если $x \in (1;\ +\infty)$, то $|x-1| = x-1$.

10.3. Методы решений уравнений

1. Если уравнение имеет вид $|f(x)| = g(x)$ и $g(x) \geq 0$, то

$$|f(x)| = g(x) \iff \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

2. Если уравнение содержит несколько модулей, например, имеет вид $|f_1(x)| \pm |f_2(x)| = g(x)$, то применяем метод интервалов:

1) находим нули функций, стоящих под знаком модуля, решая уравнения $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$;

2) наносим нули функций на ОДЗ уравнения;

3) раскрываем модули на каждом промежутке;

4) решаем полученные уравнения;

5) производим отбор корней на каждом промежутке, оставляя корни, принадлежащие рассматриваемому промежутку.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите правильный вариант ответа (1–2):

1. Модулем числа a называется:

1) число a, если $a \geq 0$;

2) число $-a$, если $a < 0$;

3) число a, если $a < 0$;

4) число $-a$, если $a \geq 0$;

5) число a, если $a \geq 0$ и число $-a$, если $a < 0$.

2. Свойства модуля:

1) $|a| > 0$;

2) $|a| \geq 0$;

3) $|a|^2 = a^2$;

4) $|a|^3 = a^3$;

5) $|x| \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a, \\ x \geq -a; \end{cases}$

6) $|x| \leq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq a, \\ x \geq -a; \end{array}\right.$

7) $|x| \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a, \\ x \leq -a; \end{array}\right.$

8) $|x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a, \\ x \leq -a. \end{cases}$

Установите соответствие:

3. Раскрытие модуля

УСЛОВИЕ	РЕЗУЛЬТАТ
1) $\lvert a-b\rvert$, $a>b$;	а) $a-b$;
2) $\lvert a-b\rvert$, $a<b$;	б) $a+b$;
3) $\lvert a-b\rvert$, $a>0$, $b>0$;	в) $b-a$;
4) $\lvert a+b\rvert$, $a>0$, $b>0$.	г) $-a-b$;
	д) если $a>b$, то $a-b$, если $a<b$, то $b-a$;
	е) если $a>b$, то $b-a$, если $a<b$, то $a-b$.

Установите правильную последовательность:

4. Если уравнение имеет вид $|f_1(x)|\pm|f_2(x)|=g(x)$, то:
а) находим нули функций под знаками модулей;
б) раскрываем модули на каждом промежутке;
в) решаем уравнения на промежутках;
г) наносим нули функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на ОДЗ уравнения;
д) производим отбор корней на каждом промежутке, оставляя корни, принадлежащие рассматриваемому промежутку.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Правильный вариант ответа	5	2, 3, 5, 7	1 – а, 2 – в, 3 – д, 4 – б	а, г, б, в, д

Примеры

Пример 1. Найдите квадрат произведения корней уравнения

$$x^2+|x|-20=0.$$

Решение. Учитывая, что $x^2=|x|^2$, уравнение запишем в виде:

$$|x|^2+|x|-20=0.$$

По теореме Виета получим $|x|=4$, тогда $x=\pm4$ и $|x|=-5$, тогда $x\in\varnothing$. Найдем квадрат произведения корней уравнения:

$$(-4\cdot4)^2=256.$$

Ответ: 256.

Пример 2. Найдите произведение корней уравнения

$$|x+\sqrt{5}|=\sqrt{5}|x-\sqrt{5}|.$$

Решение. Учитывая, что обе части уравнения положительны и $|a|^2=a^2$, запишем:

$$\left(|x+\sqrt{5}|\right)^2=\left(\sqrt{5}|x-\sqrt{5}|\right)^2,\ \left(x+\sqrt{5}\right)^2=5\left(x-\sqrt{5}\right)^2,$$

$$x^2+2\sqrt{5}x+5-5x^2+10\sqrt{5}x-25=0,\ 4x^2-12\sqrt{5}x+20=0,$$

$x^2-3\sqrt{5}x+5=0$, откуда по теореме Виета $x_1\cdot x_2=5$.

Ответ: 5.

Пример 3. Решите уравнение $|||x-5|-5|-5|=5$.

Решение. Решая данное уравнение, будем помнить, что уравнение $|f(x)|=a$ при $a\geq 0$ равносильно совокупности уравнений $f(x)=a$ и $f(x)=-a$, а при $a<0$ решений не имеет.

Поскольку правая часть уравнения $|||x-5|-5|-5|=5$ положительна, то, оно равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}||x-5|-5|-5=5,\\ ||x-5|-5|-5=-5;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}||x-5|-5|=10,\\ ||x-5|-5|=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x-5|-5=10,\\ |x-5|-5=-10,\\ |x-5|-5=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x-5|=15,\\ |x-5|=-5,\\ |x-5|=5;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-5=15,\\ x-5=-15,\\ x-5=5,\\ x-5=-5;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=20,\\ x=-10,\\ x=10,\\ x=0.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-10;\ 0;\ 10;\ 20\}$.

Пример 4. Найдите модуль разности квадратов корней уравнения $|x^2-4x-2|=4x+18$.

Решение. Уравнение имеет решение при условии, что

$$4x+18\geq 0 \text{ или } x\geq -3{,}6.$$

Заменим данное уравнение совокупностью уравнений

$$\left[\begin{array}{l}x^2-4x-2=4x+18,\\ x^2-4x-2=-4x-18;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-8x-20=0,\\ x^2=-16;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=10.\end{array}\right.$$

Найдем модуль разности квадратов корней уравнения:

$$|x_1^2-x_2^2|=|4-100|=96.$$

Ответ: 96.

Пример 5. Решите уравнение $|x-6|-|x+4|=10$.

Решение. Найдем нули функций, записанных под знаками модулей, решая уравнения $x-6=0$, откуда $x=6$ и $x+4=0$, откуда $x=-4$.

Нанесем числа -4 и 6 на координатную прямую (рис. 10.2). Рассмотрим полученные промежутки и раскроем модули на каждом из них.

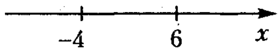


Рис. 10.2

1. На промежутке $(-\infty; -4]$ уравнение $|x-6|-|x+4|=10$ примет вид $-x+6+x+4=10$ или $10=10$. Следовательно, любое число, принадлежащее промежутку $(-\infty; -4]$, является решением уравнения.

2. На промежутке $(-4; 6]$ получим $-x+6-x-4=10$, $-2x=8$, $x=-4$. Поскольку число -4 не принадлежит промежутку $(-4; 6]$, то оно не является решением уравнения на этом промежутке.

3. На промежутке $(6;+\infty)$ получим $x-6-x-4=10$, или $-10=10$. Следовательно $x\in\varnothing$.

Ответ: $(-\infty; -4]$.

Пример 6. Решите уравнение $\dfrac{4-|2x+1|-|3-2x|}{\sqrt{x^2-5x-6}}=0$.

Решение. Запишем ОДЗ уравнения:

$$x^2-5x-6>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty; -1)\cup(6; +\infty) \text{ (рис. 10.3).}$$

Рис. 10.3

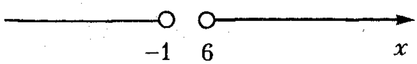


Рис. 10.4

Решим уравнение методом интервалов. Найдем нули функций под знаками модулей, решая уравнения $2x+1=0$, откуда $x=-0{,}5$ и $3-2x=0$, откуда $x=1{,}5$. Поскольку числа $-0{,}5$ и $1{,}5$ не принадлежат области допустимых значений уравнения (рис. 10.4), то решим уравнение на двух промежутках: $(-\infty; -1)$ и $(6; +\infty)$.

1. Если $x\in(-\infty; -1)$, то уравнение примет вид $-2x-1+2x-3-4=0$ или $-8=0$, следовательно $x\in\varnothing$.

2. Если $x\in(6; +\infty)$, то уравнение примет вид $2x+1-2x+3-4=0$ или $0=0$, следовательно $x\in(6; +\infty)$.

Ответ: $(6; +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения (1–11):

1. $-\left|5x-x^2-6\right|=5x-x^2-6.$ **2.** $\left|6x-x^2-7\right|=x-1.$

3. $\left|x^2-3|-x|+1\right|=1.$ **4.** $|2-|1-|x|||=1.$

5. $|x|+|1-x|-1=0.$ **6.** $|x+1|+|4-2x|-|x+3|+6=2x.$

7. $|3-x|=-|y-2x|.$ **8.** $\dfrac{\left|x^2-4x\right|+3}{|x|^2+|5-x|}=1.$

9. $|1-2x|=\sqrt{16+16x}-3.$ **10.** $|3-x|+|2+x|=3+|4-x|.$

11. $4(|x+1|-2)^{-1}=|1+x|.$

Решите системы уравнений (12–15):

12. $\begin{cases} x+0{,}5y=3{,}5, \\ |y-x|=2. \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} ||-x|+2|-y|=3, \\ 3{,}5x+2{,}5y=1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} y=1-x, \\ |y|=1+x. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5-|2x+3y|=0, \\ |3y-2x|-1=0. \end{cases}$

16. Найдите квадрат разности корней уравнения

$$2x^2+\sqrt{(-2x)^2}-6=0.$$

17. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{5(x-2)^2}=\sqrt{(x-5)^2}$.

18. Найдите среднее арифметическое корней уравнения

$$\sqrt[3]{|x+1|^3}=\sqrt[6]{|x+1|^2}.$$

19. Найдите сумму корней уравнения $|-x|^3+|1-x|^3-9=0.$

20. Найдите $-|x|$, если $|4-x|+5x+8=0$.

21. Найдите рациональные корни уравнения

$$\frac{\sqrt{3x+6}}{|-x|}+\frac{\sqrt{3}|x|}{\sqrt{x+2}}=4.$$

22. Укажите наибольшее целое решение уравнения

$$\left|\frac{(-x)^3}{x^2-1}\right|-\frac{x^3}{1-x^2}=0.$$

23. Найдите сумму положительных корней уравнения

$$||x|-1|=\sqrt{|x-1|}.$$

24. Найдите произведение всех ординат точек пересечения кривых $|x+y|=5$ и $\sqrt{xy^{-1}+2+yx^{-1}}=2{,}5$.

Ответы: 1. $x\in(-\infty;\ 2]\cup[3;\ +\infty)$. **2.** $\left\{2;\ 3;\ \frac{7\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$. **3.** $\{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. **4.** $\{-4;\ -2;\ 0;\ 2;\ 4\}$. **5.** $x\in[0;\ 1]$. **6.** $x\geq 2$. **7.** $x=3$; $y=6$. **8.** $\left\{-\frac{2}{3};\ \frac{1}{2};\ 2\right\}$. **9.** $\{0;\ 3\}$. **10** .$\{-6;\ 2\}$. **11.** $\{-2-\sqrt{5};\ \sqrt{5}\}$. **12.** $(3;\ 1)$, $\left(\frac{5}{3};\ \frac{11}{3}\right)$. **13.** $\left(-\frac{11}{19};\ \frac{23}{19}\right)$, $(1;\ -1)$. **14.** $(0;\ 1)$. **15.** $\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{2}{3}\right)$; $\left(\frac{3}{2};\ \frac{2}{3}\right)$;$(-1;\ -1)$;$(1;\ 1)$. **16.** $\left(\sqrt{13}-1\right)^2$. **17.** 2,5. **18.** –1. **19.** 1. **20.** –3. **21.** $\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$; **22.** 0. **23.** 3. **24.** 16.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Сумма корней уравнения $3x^2+\lvert x\rvert-2x=0$ равна	1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{5}{3}$; 3) 6; 4) $-\frac{1}{3}$; 5) $-\frac{2}{3}$.
2	Корни уравнения $(3x)^2=-\frac{3^4x}{\lvert x\rvert}$ принадлежат промежутку	1) $(0;\ 10]$; 2) $(2;\ 15)$; 3) $(-22;\ -10]$; 4) $(-5;\ 0)$; 5) $(-2;\ 5)$.
3	Среднее арифметическое корней уравнения $\left\lvert\lvert x\rvert^2+3\right\rvert+4x=0$ равно	1) 4; 2) –4; 3) –2; 4) 43; 5) 25.
4	Произведение наибольшего и наименьшего корней уравнения $\left\lvert\lvert -x\rvert^2+3\right\rvert=\lvert -4x\rvert$ равно	1) –1; 2) 0; 3) –3; 4) 6; 5) –9.

№	Задания	Варианты ответов
5	Удвоенное произведение корней уравнения $\left\|\left\|-\sqrt{3}x\right\|^2+6x+4\right\|=\left\|\left\|-x\right\|^2+x+2\right\|$ равно	1) 0; 2) 2; 3) 4; 4) 0,5; 5) −12.
6	Квадрат суммы корней уравнения $1{,}5x^2+\|0{,}5x-1\|=1$ равен	1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 1 5) 0.
7	Модуль среднего арифметического корней уравнения $(x+4)^2+1=\frac{1+\|x+4\|}{\|x+4\|}$ равен	1) 18; 2) 23; 3) 2; 4) 4; 5) 28.
8	Число корней уравнения $\left\|\left\|\left\|1-x\right\|+2\right\|-1\right\|+1\right\|=2$ равно	1) 6; 2) 4; 3) 3; 4) 2; 5) 1.
9	Наименьший корень уравнения $2\|-x-6\|-\|x\|-\|x-6\|-18=0$ принадлежит промежутку	1) $(2;\ 7)$; 2) $(-4;\ 5)$; 3) $(-1;\ 6)$; 4) $[-2;\ 5]$; 5) $(-\infty;\ 0)$.
10	Количество целых значений x, для которых не выполняется равенство $\left\|\frac{x^2-10x+16}{x^2-10x+24}\right\|=\frac{\|x\|^2-10x+16}{\|x\|^2-10x+24}$ равно	1) 3; 2) 4; 3) 2; 4) 6; 5) 7.
11	Если k – количество различных корней уравнения $9-\left\|x^3+2\|x\|^2-9\right\|=(-x)^3$, а x_0 – наибольший корень этого уравнения, то значение выражения $0{,}5x_0k$ равно	1) 4,5; 2) 3; 3) 6; 4) 42; 5) 1.

№	Задания	Варианты ответов
12	Куб среднего арифметического корней уравнения $\sqrt{-2\|x\|^2+8x-6}\cdot(1-\|x-1\|)=0$ равен	1) 2; 2) −3; 3) 27; 4) 8; 5) 1.
13	Модуль суммы корней уравнения $-\|x-1\|\cdot(\|-x\|+\|2-x\|)=8(1-x)$ равен	1) 6; 2) 16; 3) 28; 4) 4; 5) 51.
14	Если $(x_0;\ y_0)$ – решение системы уравнений $\begin{cases}2^{-1}y=1-2^{-1}x,\\ \|y-3x\|=1\end{cases}$ и $3^{-1}x_0y_0>2$, то значение выражения $-12\|y_0-x_0\|$ равно	1) 1; 2) 12; 3) −12; 4) 22; 5) −6.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер правильного ответа	1	4	3	5	2	1	4
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	5	1	2	1	4	1	5

11 НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

11.1. Методы решений неравенств

1. Если неравенство имеет вид $|f(x)| \le g(x)$, то оно равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x). \end{cases}$

2. Если неравенство имеет вид $|f(x)| \ge g(x)$, то оно равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{array}\right.$

3. Если неравенство содержит несколько модулей, например, имеет вид $|f_1(x)|+|f_2(x)| \le g(x)$, $(\ge, <, >)$, то применяем метод интервалов (см. п. 10.3).

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все правильные варианты ответов (1–2):

1. Если неравенство имеет вид $|f(x)| \le g(x)$, то оно равносильно:

1) неравенству $f^2(x) \le g^2(x)$;

2) совокупности неравенств $f(x) \le g(x)$ и $f(x) \ge -g(x)$;

3) системе неравенств $f(x) \le g(x)$ и $f(x) \ge -g(x)$;

4) $\left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x); \end{array}\right.$

5) $\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x) \end{cases}$

2. Решением неравенства вида $|f(x)| \ge g(x)$ является:

1) пересечение множеств решений неравенств $f(x) \ge g(x)$ и $f(x) \le -g(x)$;

2) объединение множеств решений неравенств $f(x) \ge g(x)$ и $f(x) \le -g(x)$;

3) решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x); \end{array}\right.$

4) решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x); \end{array}\right.$

5) решение системы неравенств $\begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ f(x) \le -g(x). \end{cases}$;

Укажите все необходимые действия:

3. Чтобы найти решение неравенства вида $|f_1(x)| - |f_2(x)| \ge g(x)$, необходимо:

1) найти нули функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$;

2) найти нули функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $g(x)$;

3) нанести нули функций на координатную прямую и записать все полученные промежутки;

4) нанести нули функций на ОДЗ неравенства и записать все полученные промежутки;

5) на каждом промежутке раскрыть модули и решить полученные неравенства;

6) записать решение исходного неравенства, находя пересечение множеств решений неравенств на всех промежутках;

7) записать решение исходного неравенства, объединив решения неравенств на всех промежутках.

Ответы

Номер задания	1	2	3
Вариант правильного ответа	3	2, 3	1, 4, 5, 7

Примеры

Пример 1. Решите неравенство $\left|\dfrac{6x+1}{3-x}\right| < 6$.

Решение. Имеем неравенство вида $f(x) < 0$, следовательно, данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{6x+1}{3-x} < 6, \\ \dfrac{6x+1}{3-x} > -6; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{6x+1-18+6x}{3-x} < 0, \\ \dfrac{6x+1+18-6x}{3-x} > 0; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{12x-17}{3-x} < 0, \\ \dfrac{19}{3-x} > 0. \end{cases}$$

Поскольку второе неравенство системы выполняется при $3-x>0$, то есть при $x<3$, то первое неравенство системы решим методом интервалов на промежутке $(-\infty; 3)$.

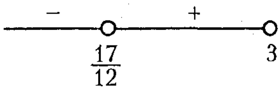


Рис. 11.1

Согласно рисунку 11.1 запишем решение системы неравенств, а, следовательно, и решение исходного неравенства: $x \in \left(-\infty;\ \frac{17}{12}\right)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty;\ \frac{17}{12}\right)$.

Пример 2. Решите неравенство $\left|2-|x-1|\right| \ge 30$.

Решение. Имеем неравенство вида $|f(x)| \ge g(x)$, следовательно, данное неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 2-|x-1| \ge 30, \\ 2-|x-1| \le -30; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-1| \le -28, \\ |x-1| \ge 32. \end{array}\right.$$

Решим каждое неравенство совокупности:

1) поскольку левая часть неравенства $|x-1| \le -28$ всегда положительна, а правая его часть всегда отрицательна и положительное число больше отрицательного, то неравенство не имеет решений;

2) $|x-1| \ge 32 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 \ge 32, \\ x-1 \le -32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 33, \\ x \le -31; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -31] \cup [33;\ +\infty)$.

В таком случае решением совокупности неравенств является решение второго неравенства совокупности.

Ответ: $(-\infty;\ -31] \cup [33;\ +\infty)$.

Пример 3. Найдите сумму целых решений системы неравенств

$$\begin{cases} |10x+3| \le 33, \\ |10x+3| \ge 33. \end{cases}$$

Решение. Способ 1. Найдем решение каждого неравенства системы: 1) $|10x+3| \le 33 \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+3 \le 33, \\ 10x+3 \ge -33; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3, \\ x \ge -3{,}6; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-3{,}6;\ 3]$;

2) $|10x+3| \ge 33 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10x+3 \ge 33, \\ 10x+3 \le -33; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 3, \\ x \le -3{,}6; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty;\ -3{,}6] \cup [3;\ +\infty)$.

Очевидно, что решением системы неравенств являются числа $-3{,}6$ и 3, сумма которых равна $-0{,}6$.

Способ 2. Заменим систему неравенств $\begin{cases}|10x+3|\le 33,\\ |10x+3|\ge 33\end{cases}$ равносильным уравнением

$$|10x+3|=33 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}10x+3=33,\\ 10x+3=-33;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=-3{,}6.\end{array}\right.$$

Ответ: $-0{,}6$.

Пример 4. Найдите наименьшее целое положительное решение неравенства $8x^2+8\sqrt{x^2}-3>0$.

Решение. Поскольку $\sqrt{x^2}=|x|$ и $x^2=|x|^2$, то неравенство примет вид $8|x|^2+8|x|-3>0$, решать которое будем методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=8|x|^2+8|x|-3$.
2. $D(f): x\in \mathbf{R}$.
3. Найдем нули функции, решая уравнение $8|x|^2+8|x|-3=0$. Получим $|x|=\frac{-2-\sqrt{10}}{4}$, откуда $x\in\varnothing$ и $|x|=\frac{-2+\sqrt{10}}{4}$, откуда $x_1=\frac{-2+\sqrt{10}}{4}$ и $x_2=\frac{2-\sqrt{10}}{4}$.
4. Нанесем полученные числа на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 11.2).

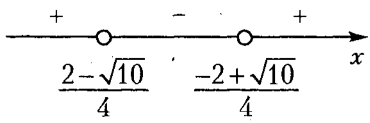


Рис. 11.2

5. Решением неравенства является объединение промежутков, на которых функция $f(x)=8|x|^2+8|x|-3$ положительна:

$$\left(-\infty;\ \frac{2-\sqrt{10}}{4}\right)\cup\left(\frac{-2+\sqrt{10}}{4};\ +\infty\right).$$

Так как $\frac{2-\sqrt{10}}{4}<0$, а $\frac{-2+\sqrt{10}}{4}\approx 0{,}29$, то число 1 является наименьшим целым положительным решением неравенства.

Ответ: 1.

Пример 5. Найдите сумму квадратов целых решений неравенства $\big||x|-6\big|>\left|x^2-5|x|+9\right|$.

Решение. Поскольку обе части неравенства положительны, то, возводя их в квадрат и учитывая, что $|a|^2 = a^2$, запишем $(|x|-6)^2 > \left(|x|^2-5|x|+9\right)^2$ или $(|x|-6)^2-\left(|x|^2-5|x|+9\right)^2 > 0$.

Разложим левую часть неравенства на множители, применяя формулу разности квадратов:

$$\left(|x|-6-|x|^2+5|x|-9\right)\left(|x|-6+|x|^2-5|x|+9\right) > 0,$$

$$\left(|x|^2-6|x|+15\right)\left(|x|^2-4|x|+3\right) < 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\left(|x|^2-6|x|+15\right)\left(|x|^2-4|x|+3\right)$.

2. $D(f): x \in \mathbf{R}$.

3. Найдем нули функции, решая совокупность уравнений $|x|^2-6|x|+15=0$, откуда $x \in \varnothing$ и $|x|^2-4|x|+3=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=3$ и $x_4=-3$.

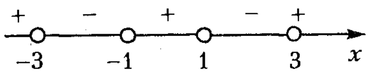


Рис. 11.3

4. Нанесем числа −1, 1, −3 и 3 на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 11.3).

5. Решением неравенства является объединение промежутков, на котором функция $f(x)=\left(|x|^2-6|x|+15\right)\left(|x|^2-4|x|+3\right)$ отрицательна: $(-3;\ -1) \cup (1;\ 3)$.

Найдем сумму квадратов целых решений неравенства:

$$(-2)^2+2^2=8.$$

Ответ: 8.

Пример 6. Найдите сумму целых решений из области определения функции $y=\sqrt{|x-2|-|2x+4|}-2x^2-2x+4$.

Решение. Так как выражение, стоящее под знаком радикала, не может быть отрицательным, то $|x-2|-|2x+4| \geq 0$.

Решим неравенство методом интервалов:

1. Найдем нули функций, стоящих под знаком модуля, решая уравнения $x-2=0$, откуда $x=2$ и $2x+4=0$, откуда $x=-2$.

2. Нанесем числа 2 и -2 на координатную прямую и рассмотрим полученные промежутки (рис. 11.4).

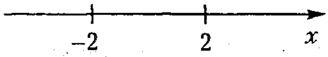


Рис. 11.4

Раскроем модули на каждом промежутке и решим неравенства:

а) если $x \in (-\infty; -2]$, то $2-x+2x+4 \geq 0$, $x \geq -6$ и $x \in [-6; -2]$;

б) если $x \in (-2; 2]$, то $2-x-2x-4 \geq 0$, $-3x \geq 2$, $x \leq -\dfrac{2}{3}$ и $x \in \left[-2;\ -\dfrac{2}{3}\right]$;

в) если $x \in (2; +\infty)$, то $-2+x-2x-4 \geq 0$, $-x \geq 6$, $x \leq -6$ и $x \in \varnothing$.

Решением неравенства является объединение полученных решений: $x \in \left[-6;\ -\dfrac{2}{3}\right]$. Найдем сумму целых решений неравенства:

$$-6-5-4-3-2-1=-21.$$

Заметим, что неравенство $|x-2|-|2x+4| \geq 0$ можно решить иначе. Запишем неравенство в виде $|2-x| \geq |2x+4|$ и возведем обе его части в квадрат. Получим $(x-2)^2 \geq (2x+4)^2$ или $(x-2-2x-4)(x-2+2x+4) \geq 0$, $(3x+2)(x+6) \leq 0$.

Согласно рисунку 11.5 запишем решение неравенства:

$$x \in \left[-6;\ -\frac{2}{3}\right].$$

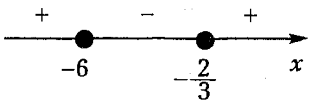


Рис. 11.5

Ответ: -21.

Пример 7. Решите неравенство $\dfrac{|x|^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} > 0$.

Решение. Решим неравенство методом интервалов. Найдем нули функции $f(x)=x$, стоящей под знаком модуля: $x=0$.

1. Если $x \leq 0$, то неравенство примет вид $\dfrac{x^2+7x+10}{(x-3)^2} > 0$, $\dfrac{(x+5)(x+2)}{(x-3)^2} > 0$. Его решение показано на рисунке 11.6:

$$x \in (-\infty;\ -5) \cup (-2;\ 0].$$

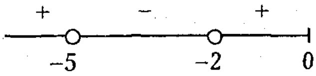


Рис. 11.6

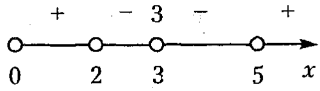


Рис. 11.7

2. Если $x>0$, то неравенство примет вид $\frac{x^2-7x+10}{(x-3)^2}>0$,
$\frac{(x-5)(x-2)}{(x-3)^2}>0$. Его решение показано на рисунке 11.7:

$$x\in(0;\ 2)\cup(5;\ +\infty).$$

Решением исходного неравенства является объединение решений, полученных в первом и втором случаях:

$$x\in(-\infty;\ -5)\cup(-2;\ 2)\cup(5;\ +\infty).$$

Ответ: $(-\infty;\ -5)\cup(-2;\ 2)\cup(5;\ +\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства (1–14):

1. $|x(x-4)|-5<0$. **2.** $\left|8-x^2+2x\right|>2x$. **3.** $\left|\frac{x+2}{3-x}\right|-2>0$.

4. $\left|\frac{x^2-5x+4}{4-x^2}\right|\le 1$. **5.** $\left||x|^2-|x|\right|<0{,}25$. **6.** $|1-x|-|x|>0$.

7. $|x|^2-4|x|>-3$. **8.** $|x-1|+|2-x|>3+x$. **9.** $\frac{1}{1-|x+3|}<\frac{1}{3}$.

10. $\frac{1{,}5|x|-7}{3-x}\ge 2$. **11.** $\frac{|x|^2-5x+6}{-|x|-7}>0$. **12.** $\frac{|-x-2|-|-x|}{\sqrt{4-x^3}}>0$.

13. $|1-x|-1+|2x+3|>|x|+(2x+3)$.

14. $|x-1|-|x-2|-|x+2|-|x|>-|x+1|-3$.

Решите системы неравенств (15–16):

15. $\begin{cases}\left||-x|^2+5x\right|<6,\\ |x+1|-1\le 0.\end{cases}$ **16.** $\begin{cases}|x(x-4)|<5,\\ |x+1|-3<0.\end{cases}$

17. Найдите число целых решений неравенства

$$\frac{|x-2|-|x+4|}{|2-x|-|-x|}\le 0.$$

18. Найдите длину интервала, который образуют все решения неравенства $\dfrac{|3-x|+x^2-5x+6}{x^2-5x+6}>3$.

19. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $|x-1|+|2-x|>3+x$.

20. Найдите среднее арифметическое целых решений системы неравенств $\begin{cases}|2x+5|-|4x-7|\ge 0,\\ |x|-2|4-x|<x-2.\end{cases}$

Ответы: **1.** $(-1;\ 5)$. **2.** $(-\infty;\ 2\sqrt{2})\cup(2+2\sqrt{3};\ +\infty)$. **3.** $\left(\frac{4}{3};\ 3\right)\cup$ $\cup(3;\ 8)$. **4.** $[0;\ 1{,}6]\cup[2{,}5;\ +\infty)$. **5.** $\left(-\frac{\sqrt{2}+1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$. **6.** $(-\infty;\ 0{,}5)$. **7.** $(-\infty;-3)\cup(-1;1)\cup(3;+\infty)$. **8.** $(-\infty;\ 0)\cup$ $\cup(6;+\infty)$. **9.** $(-\infty;-4)\cup(-2;+\infty)$. **10.** $\left(3;\ 3\frac{5}{7}\right]$. **11.** $(2;3)$. **12.** $(-1;\sqrt[3]{4})$. **13.** $\left(-\infty;\frac{-3}{2}\right)$. **14.** $(-3;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(1;\ 3)$. **15.** $(-2;\ 0]$. **16.** $(-1;\ 2)$. **17.** 2. **18.** 0,5. **19.** −1. **20.** 3.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Число натуральных решений неравенства $\left\|x^2-36\right\|\cdot(x-5)\le 0$ равно	1) 2; 2) 9; 3) 7; 4) 5; 5) 6.
2	Среднее арифметическое целых неотрицательных решений неравенства $\|2-x\|\cdot(4-5x)\ge 0$ равно	1) 1; 2) 2; 3) 2,5; 4) 1,25; 5) 4.
3	Наименьшее целое решение неравенства $\left\|16-x^2\right\|\cdot(x-1{,}25)>0$ равно	1) 3; 2) −6; 3) 2; 4) 1; 5) 5.

№	Задания	Варианты ответов
4	Количество целых отрицательных решений неравенства $\frac{\lvert x\rvert + x + 3}{x+3} > 1$ равно	1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 10; 5) 12.
5	Наибольшее решение неравенства $\frac{\lvert -x\rvert}{-x-3} \geq 0$ равно	1) −10; 2) −0,5; 3) −3; 4) 0; 5) −2.
6	Наименьшее целое решение неравенства $\left\lvert \frac{x-0,5}{x-1} \right\rvert > 1$ равно	1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) −2; 5) −4.
7	Множество решений системы неравенств $\begin{cases} \lvert 1-x\rvert \leq 3, \\ -\lvert -x-2\rvert < -1 \end{cases}$ имеет вид	1) $(-\infty;\ 4]$; 2) $(0;\ 4{,}5]$; 3) $(-1;\ 4)$; 4) $(-1;\ 4]$; 5) $(-1;\ +\infty)$.
8	Число целых решений неравенства $1 \leq \lvert x-0,5\rvert < 1,5$ равно	1) 6; 2) 5; 3) 0; 4) 3; 5) 1.
9	Число целых неотрицательных решений неравенства $\lvert 3-\lvert 2-x\rvert\rvert - 1 < 0$ равно	1) 6; 2) 4; 3) 2; 4) 3; 5) 1.
10	Неравенство $\lvert 2-x\rvert + \lvert x-3\rvert - 2x < 5$ выполняется при условии, что	1) $x > 0$; 2) $x \leq 0$; 3) $x > 2$; 4) $x > 3$; 5) $x \in \mathbf{R}$.
11	Число натуральных решений неравенства $\frac{-\lvert x\rvert^2 + \lvert x\rvert + 12}{3-x} - 2x \geq 0$ равно	1) 8; 2) 5; 3) 3; 4) 2; 5) 1.
12	Количество целых решений неравенства $\frac{\lvert -x\rvert^2 + x - 2}{(3-\lvert 3-x\rvert)^2} \leq 0$ равно	1) 1; 2) 5; 3) 4; 4) 2; 5) 3.

№	Задания	Варианты ответов
13	Среднее арифметическое целых чисел, принадлежащих области определения функции $y=\sqrt{3-\lvert x-2\rvert}+\left(\sqrt{x-1}-1\right)^{-1}$, равно	1) 3; 2) 3,25; 3) 5; 4) 3,5; 5) 5,75.
14	Число целых неотрицательных решений неравенства $\lvert x-x^9\rvert+\lvert x^7-x^8\rvert-\lvert x^9-x^8+x^7-x\rvert\le 0$ равно	1) 2; 2) 1; 3) 5; 4) 9; 5) 17.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	5	1	3	1	4	2	4
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	3	5	1	4	5	2	1

12 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Логарифмом числа $b>0$ по основанию a $(a>0,\ a\neq 1)$ называют показатель степени c, в которую необходимо возвести a, чтобы получить b:

$$\log_a b = c \ \Leftrightarrow\ b = a^c.$$

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b. \tag{12.1}$$

12.1. Свойства логарифмов

Свойства логарифмов следуют из соответствующих свойств степеней при условии, что основание логарифмов положительное и отличное от единицы действительное число; числа a, b, c – положительны; числа m и n – отличны от нуля.

$$\log_a a = 1; \tag{12.2}$$

$$\log_a 1 = 0; \tag{12.3}$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c; \tag{12.4}$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c; \tag{12.5}$$

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b; \tag{12.6}$$

$$\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b; \tag{12.7}$$

$$\log_a^m b^n = n^m \log_a^m b; \tag{12.8}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \tag{12.9}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \tag{12.10}$$

$$a^{\log_b x} = x^{\log_b a}. \tag{12.11}$$

Приняты следующие записи:

1) $\log_{10} b = \lg b$ – десятичный логарифм числа b;

2) $\log_e b = \ln b$ – натуральный логарифм числа b, где e – иррациональное число и $e = 2{,}718281828459045...$

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите правильный вариант ответа:

1. Логарифмом числа b по основанию a является:

ЗАПИСЬ	ПРИ УСЛОВИИ
1) $\log_b a$;	а) $a>0$, $b>0$;
2) $\log_a b$;	б) $a\ge 0$, $b\ge 0$;
3) a^b;	в) $a>0$, $b>0$, $a\ne 1$;
4) b^a.	г) $a\ge 0$, $b\ge 0, b\ne 1$;
	д) $a>0$, $b\ge 0$, $a\ne 1$;
	е) $a\ge 0$, $b\ge 0$, $a\ne 1$.

Установите соответствие:

2. Свойства логарифмов:

1) $\log_a xy$;	а) 0;
2) $\log_a \dfrac{x}{y}$;	б) 1;
3) $\dfrac{\log_a x}{\log_a y}$;	в) x;
4) $\log_a^{-1} x$;	г) n;
5) $\log_a x \cdot \log_x a$;	д) $\dfrac{1}{n}$;
6) $a^{\log_a x}$;	е) n^n;
7) $a^{\log_b x}$;	ж) n^{-n}:
8) $\log_{a^n} x^n$;	з) $\log_a x$;
9) $\log_a a^n$;	и) $\log_x a$;
10) $\log_{a^n}^n a$.	к) $\log_y x$;
	л) $\log_a x - \log_a y$;
	м) $\log_a x + \log_a y$;
	н) $x^{\log_b a}$.

Ответы

Номер задания	1	2
Вариант правильного ответа	2 – в	1 – м, 2 – л, 3 – к, 4 – и, 5 – б, 6 – в, 7 – н, 8 – з, 9 – г, 10 – ж

Примеры

Пример 1. Упростите выражение $-\log_3^2\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

Решение. Применяя свойства логарифмов 12.6 и 12.2, получим:

$$-\log_3^2\log_3 3^{\frac{1}{9}}=-\log_3^2\frac{1}{9}\log_3 3=-\left(\log_3 3^{-1}\cdot 1\right)^2=-(-1)^2=-1.$$

Ответ: -1.

Пример 2. Упростите $9^{\frac{2}{\log_5 3}}+27^{\log_9 36}+\sqrt{9}^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

Решение. Применяя свойства логарифмов 12.10, 12.6, 12.7 и основное логарифмическое тождество 12.1, получим:

$$3^{4\log_3 5}+3^{3\log_{3^2}6^2}+3^{4\log_{3^2}7}=3^{\log_3 5^4}+3^{\frac{3}{2}\log_3 6^2}+3^{\frac{4}{2}\log_3 7}=$$

$$=5^4+3^{\log_3 6^3}+3^{\log_3 7^2}=5^4+6^3+7^2=890.$$

Ответ: 890.

Пример 3. Упростите $a^{\frac{2}{\log_b a}+1}b+a^{\log_a b+1}b^{\log_b a+1}-ab^{\frac{2}{\log_a b}+1}$.

Решение. Запишем ОДЗ: $\begin{cases}a>0,\ a\neq 1;\\ b>0,\ b\neq 1.\end{cases}$

Применяя свойство степеней 2.3 и свойства логарифмов 12.10, 12.6, 12.1, получим:

$$a^{2\log_a b}\cdot a\cdot b+a^{\log_a b}\cdot a\cdot b^{\log_b a}\cdot b-a\cdot b^{2\log_b a}\cdot b=a^{\log_a b^2}\cdot a\cdot b+b\cdot a\cdot a\cdot b-$$

$$-a\cdot b^{\log_b a^2}\cdot b=ab^3+a^2b^2-a^3b=ab\left(b^2+ab-a^2\right).$$

Ответ: $ab\left(b^2+ab-a^2\right)$, где $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1$.

Пример 4. Упростите $\dfrac{3\log_{b^3}b-\log_a^3 b}{(\log_a b+\log_b a+1)\log_a\frac{a}{b}}$.

Решение. Запишем ОДЗ: $\begin{cases}a>0,\ a\neq 1;\\ b>0,\ b\neq 1.\end{cases}$

На основании свойств логарифмов выполним следующие преобразования:

1) $3\log_{b^3}b=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\log_b b=1$;

2) $\log_a\frac{a}{b}=\log_a a-\log_a b=1-\log_a b$.

Полагая $\log_a b = x$, $\log_b a = \frac{1}{x}$, запишем:

$$\frac{1-x^3}{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)(1-x)} = \frac{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}{\frac{\left(x^2+1+x\right)(1-x)}{x}} = x.$$

Ответ: $\log_a b$.

Пример 5. Вычислите $5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt{3+\sqrt{3}}} + 5^{\log_{25}(\sqrt{3}-3)^2}$.

Решение. Применяя последовательно свойства логарифмов 12.7, 12.6, 12.1 и правило раскрытия модуля числа, получим:

$$5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt{3+\sqrt{3}}} + 5^{\log_{25}(\sqrt{3}-3)^2} = 5^{2\log_5\sqrt{3+\sqrt{3}}} + 5^{\log_5\left|\sqrt{3}-3\right|} = \left|3+\sqrt{3}\right| +$$
$$+\left|\sqrt{3}-3\right| = 3+\sqrt{3}-\sqrt{3}+3 = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 6. Вычислите $4^{\sqrt{\log_4 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 4}} - 3^{\lg 25}\cdot 4^{\lg 3}$.

Решение. Рассмотрим разность $4^{\sqrt{\log_4 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 4}} = A$.

Полагая $\sqrt{\log_4 3} = a$, запишем:

$$\log_4 3 = a^2,\ 3 = 4^{a^2},\ \sqrt{\log_3 4} = \frac{1}{a}.$$

Получим: $A = 4^a - \left(4^{a^2}\right)^{\frac{1}{a}} = 4^a - 4^{\frac{a^2}{a}} = 4^a - 4^a = 0$.

Рассмотрим произведение $3^{\lg 25}\cdot 4^{\lg 3}$ и применим формулы 2.3, 12.4, 12.6, 12.2. Получим: $3^{\lg 25}\cdot 4^{\lg 3} = 3^{\lg 25}\cdot 3^{\lg 4} = 3^{\lg 25+\lg 4} = 3^{\lg 25\cdot 4} = 3^{\lg 100} = 3^{\lg 10^2} = 3^2 = 9$.

Сложим результаты двух действий: $0-9=-9$.

Ответ: -9.

Пример 7. Вычислите $-\log_{\sqrt[4]{ab}}\left(\frac{b^5}{a^{16}}\right)^{-1}$, если $\log_{b^2} a = 2^{-2}$.

Решение. ОДЗ: $a>0$, $b>0$, $ab\neq 1$.

На основании свойства 12.6 запишем:

$$-\log_{\sqrt[4]{ab}}\left(\frac{b^5}{a^{16}}\right)^{-1} = \log_{\sqrt[4]{ab}}\left(\frac{b^5}{a^{16}}\right).$$

Преобразуем выражение $\log_{b^2} a = 2^{-2}$. Получим:

$$\frac{1}{2}\log_b a = \frac{1}{4},\ \log_b a = \frac{1}{2}.$$

Преобразуем выражение $\log_{\sqrt[4]{ab}} \frac{b^5}{a^{16}} = x$. Применяя формулы 12.7, 12.9, 12.5, 12.4,12.6, 12.2, получим:

$$\log_{(ab)^{\frac{1}{4}}} \frac{b^5}{a^{16}} = 4\log_{ab}\frac{b^5}{a^{16}} = 4\frac{\log_b \frac{b^5}{a^{16}}}{\log_b ab} = 4\frac{\log_b b^5 - \log_b a^{16}}{\log_b a + \log_b b} =$$

$$= \frac{4(5\log_b b - 16\log_b a)}{\log_b a + 1} = \frac{4(5 - 16\log_b a)}{\log_b a + 1}.$$

Подставив значение $\log_b a = \frac{1}{2}$ в последнее выражение, найдем

искомое число x: $x = \dfrac{4\left(5 - 16\cdot\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}+1} = \dfrac{4(5-8)}{\frac{3}{2}} = \dfrac{-12}{\frac{3}{2}} = -\dfrac{12\cdot 2}{3} = -8$.

Ответ: -8.

Пример 8. Найдите a^c, если $\log_b 81 = a$, $b^c = 729$ и $a = \log_a \sqrt[3]{121}$.

Решение. Если $\log_b 81 = a$, то $\log_b 3^4 = a$, $4\log_b 3 = a$ и $\log_b 3 = \frac{a}{4}$. Если $b^c = 729$, то $c = \log_b 3^6$, $6\log_b 3 = c$ и $\log_b 3 = \frac{c}{6}$. Тогда $\frac{a}{4} = \frac{c}{6}$ и $a = \frac{2c}{3}$. Равенство $a = \log_a \sqrt[3]{121}$ запишем в виде $a^a = 11^{\frac{2}{3}}$, или $a^{\frac{2c}{3}} = 11^{\frac{2}{3}}$, или $a^c = 11^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}$ и получим $a^c = 11$.

Ответ: 11.

Пример 9. Вычислите:

$$\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} 30° + \log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} 31° + \log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} 32° + \ldots + \log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg} 59°.$$

Решение. Применим формулу 12.4 и получим:

$$\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{tg} 30°\cdot\operatorname{tg} 31°\cdot\operatorname{tg} 32°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg} 45°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg} 58°\cdot\operatorname{tg} 59°) =$$

$$= \log_{\sqrt{3}}(\operatorname{tg} 30°\operatorname{tg} 45°(\operatorname{tg} 31°\operatorname{tg} 59°\cdot\operatorname{tg} 32°\operatorname{tg} 58°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg} 44°\operatorname{tg} 46°)).$$

Зная, что $\operatorname{tg} 45° = 1$, а $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и что $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, а $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$, найдем значение исходного выражения:

$$\log_{\sqrt{3}}\left(1\cdot\sqrt{3^{-1}}\cdot\operatorname{tg}31^\circ\operatorname{ctg}31^\circ\cdot\operatorname{tg}32^\circ\operatorname{ctg}32^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}44^\circ\operatorname{ctg}44^\circ\right)=$$

$$=\log_{\sqrt{3}}\left(1\cdot\sqrt{3^{-1}}\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot1\right)=-\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}=-1.$$

Ответ: -1.

Задачи для самостоятельного решения

Упростите (1–11):

1. $-\log_2^3\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$.

2. $\sqrt{5^{\frac{2}{\log_6 5}}+7^{\frac{2}{\log_8 7}}}$.

3. $\dfrac{\left(27^{\frac{1}{\log_2 3}}+5^{\log_5 49}\right)\left(81^{\frac{1}{\log_4 9}}-8^{\log_4 9}\right)}{5^{\frac{1}{\log_{27}125}}+5^{\frac{1}{\log_{16}25}}\cdot5^{\log_5 3}}$.

4. $\dfrac{81^{\frac{1}{\log_5 9}}+3^{\frac{3}{\log_{\sqrt{6}}3}}}{4\cdot49^{\log_7 10}+7^{2\log_7 3}}\left(\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{\log_{25}7}}-125^{\log_{25}6}\right)$.

5. $36^{\log_6 5}+10^{1-\lg 2}-3^{\log_9 36}-6\cdot3^{\log_{\sqrt{3}}2}$.

6. $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot49^{\log_7 2}\cdot5^{\log_{0,2}19}$.

7. $\left(a^{\frac{1}{\log_2 a}}\cdot a^{\frac{1}{\log_4 a}}\cdot a^{\frac{1}{\log_8 a}}\cdot\ldots\cdot a^{\frac{1}{\log_{512}a}}\right)^{15^{-1}}$

8. $\left(2^{\log_{\sqrt[4]{2}}a}-3^{\log_{27}\left(a^2+1\right)^3}-2a\right):\left(7^{4\log_{49}a}-5^{0,5\log_{\sqrt{5}}a}-a^{\lg 1}\right)$.

9. $\dfrac{\log_a\sqrt{a^2-1}\cdot\log_{\frac{1}{a}}^2\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}\left(a^2-\log_a a\right)\cdot\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2+\log_{\frac{1}{a}}a}}$.

10. $\dfrac{\left(25^{\frac{1}{2\log_{49}25}}+2\log_2\log_2\log_2 a^{2\log_a 4}\right)\cdot4^{\frac{-2}{\log_3 4}}-a^2}{(-a)^{\ln 1}-(-a)^{\ln e^2}}$.

11. $\left(\log_a b+\log_b a+\log_b b^2\right)(\log_a b-\log_{ab} b)\log_b a-\log_b b$.

Вычислите (12–22):

12. $5\log_{\sqrt[3]{7}} 7\cdot\log_{7^{-1}}\left(\sqrt[5]{7}\cdot 7^{-2}\cdot 5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt[3]{49}}\right)$.

13. $\ln\operatorname{tg} 1^\circ+\ln\operatorname{tg} 2^\circ+\ln\operatorname{tg} 3^\circ+\ldots+\ln\operatorname{tg} 89^\circ$.

14. $\lg\operatorname{ctg} 1^\circ\cdot\lg\operatorname{ctg} 2^\circ\cdot\lg\operatorname{ctg} 3^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{ctg} 89^\circ$.

15. $a^{\log_b c}-c^{\log_b a}$.

16. $b^{\sqrt{\log_b a}}-a^{\sqrt{\log_2 b}}$.

17. $32^{\frac{4}{(\log_2 16)}}\cdot\left(2^{-1}\right)^{\frac{4}{(\log_2 16)}}$.

18. $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2}+3^{\log_9(\sqrt{3}+2)^2}+2^{\log_{\sqrt{3}+1}(\sqrt{3}+1)^3}$.

19. $\dfrac{\log_{6\sqrt[6]{2}}\sqrt{28}}{\log_{32^2} 4}-\dfrac{\log_{5\sqrt[5]{4}} 49}{\log_{64} 4}$.

20. $\lg 5\cdot\lg 10\cdot\lg 20+(\lg 2)^2+(\lg 1)^2$.

21. $4\cdot 9^{\log_{81}\frac{1}{25}}\left(9^{\log_3 1}+9^{\log_3 8}\right)^{\log_{65} 5}$.

22. $\dfrac{\log_9 225}{\log_{225} 9}+\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} 45}{\log_{\sqrt[3]{5}}\sqrt[3]{3}}$.

Определите знаки чисел (23–25):

23. $\log_{1,7}(0,5(1-\log_7 3))$.

24. $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)$.

25. $\dfrac{\log_3 5-\log_5 3}{\log_{0,3} 4-\log_{0,3} 3}$.

26. Найдите квадрат основания логарифма, при котором число a равно своему логарифму.

27. Вычислите $\log_{0,5} 28$, если $\log_4 49=a^{-1}$.

28. Найдите $\lg^2\sqrt{x}$, если $\log_{x^2} 100=0,5a$.

29. Найдите $\log_9 2,97$, если $\log_5 3=a\log_5 10$ и $\lg 11=b$.

30. Вычислите $\log_2 36$, если $\ln 12 = \frac{\ln 9}{m}$.

31. Зная, что $\lg 2 = 0{,}301$, найдите значение выражения $\log_2 1 \cdot \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9$.

32. Вычислите $\log_{a^6 b^9}\left(\sqrt{a^{11}} \cdot b^{-3}\right)^3$, если $\log_{\sqrt{a}} b^3 = a^{\log_b 1}$.

33. Найдите $\lg 12$, если $\ln 3 = \frac{a}{\lg e}$, $\lg 5 = b$.

34. Найдите b^{-a}, если $\log_b 64 = c$, $\log_a 625 = a$ и $a^c = 125$.

Ответы: **1.** 27. **2.** 10. **3.** −11. **4.** 1. **5.** 0. **6.** 1. **7.** 8. **8.** a^2+a+1, где $a>0,\ a \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **9.** $\log_a \sqrt{a^2-1}$, где $a>1,\ a \neq \sqrt{2}$. **10.** 1, где $a>0,\ a \neq 1$. **11.** $\log_a b$, где $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1$ и $ab \neq 1$. **12.** 7. **13.** 0. **14.** 0. **15.** 0. **16.** 0. **17.** 16. **18.** 12. **19.** 30. **20.** 1. **21.** 4. **22.** 1. **23.** Минус. **24.** Минус. **25.** Минус. **26.** $a^{\frac{2}{a}}$, где $a > 0$ и $a \neq 1$. **27.** $-\frac{1+2a}{a}$. **28.** $\frac{1}{a^2}$. **29.** $\frac{b+3a-2}{2a}$. **30.** $\frac{2(2+m)}{2-m}$. **31** 0. **32.** 2. **33.** $a-2b+2$. **34.** $\frac{1}{256}$.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Результат вычисления выражения $\left(e^2\right)^{\frac{1}{3}\ln 8 + 2\ln 3}$ равен	1) e; 2) 1; 3) 24; 4) 324; 5) 256.
2	Значение выражения $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)^{\log_{\sqrt{3}+1} 3} + 4^{\frac{1}{\log_{25} 16}} + \log_5 3 \cdot \log_9 25$ равно	1) 9; 2) 7; 3) 8; 4) 1; 5) 10.

№	Задания	Варианты ответов
3	Результат вычисления выражения $\dfrac{\lg 7}{\log_{1000} 7} - 10^{\log_{100} 49}$ равен	1) 10; 2) −4; 3) 11; 4) 7; 5) 21.
4	В результате преобразования выражения $\dfrac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \dfrac{\log_3 216}{\log_8 3}$ получим	1) 0; 2) 23; 3) 24; 4) 2; 5) 1.
5	Результат вычисления выражения $\left(\sqrt{5}+1\right)^{\log_{\frac{4}{\sqrt{5}-1}} \frac{2}{3}} + 3^{2\log_9 \frac{1}{3}}$ равен	1) 8; 2) 4; 3) 1; 4) $\dfrac{2}{3}$; 5) $\dfrac{4}{3}$.
6	Результат упрощения выражения $\dfrac{\log_2 5 \cdot \log_3 5}{\log_2 5 + \log_3 5}$ равен	1) $\log_{12} 5$; 2) $\log_5 6$; 3) $\log_6 5$; 4) 1; 5) 5.
7	Результат вычисления выражения $\left(3^{\frac{\log_{100} 2}{\lg 2}} \cdot 2^{\frac{\log_{100} 3}{\lg 3}}\right)^{2\log_6 5}$ равен	1) 1; 2) 6; 3) 5; 4) 0,2; 5) 25.
8	В результате вычисления выражения $\left(\left(\log_2^4 0{,}5 + \log_{0{,}5}^4 2 + 2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\right)^{\frac{1}{2}} - \log_{0{,}5} 2 -$ $- \log_2 0{,}5$ получим	1) 0,5; 2) 0,25; 3) −1; 4) −2; 5) 4.

№	Задания	Варианты ответов
9	Результат упрощения выражения $a^{1+\frac{1}{2\log_4 a}}+8^{\frac{1}{3\log_a^2 2}}+\log_2 a\log_a 2$ равен	1) $(a+1)^2$; 2) a^2; 3) $1-a^2$; 4) $(a+2)^2$; 5) $(a-1)^2$.
10	В результате преобразований выражения $\dfrac{\left(\log_a b-0{,}5\log_{\frac{\sqrt{a}}{b^3}} b\right)\log_{a^3 b^{-12}} b}{\log_{\frac{a}{b^4}} b-\log_{\frac{a}{b^6}} b}$ получим	1) 1; 2) $\log_a b$; 3) $\log_b a$; 4) $\log_a b+1$; 5) $\log_a b^2$.
11	В результате упрощения выражения $\sqrt{6(\log_9 2\cdot\log_4 9+1)+\log_2 9^{-6}+\log_2^2 9}$ получим	1) $3-\log_2 9$; 2) $\log_2 9$; 3) 9; 4) $\log_2 3-9$; 5) $\log_2 9-3$.
12	Результат преобразования выражения $\left(\log_a b+\log_a b^{0{,}5\log_b a^2}\right)\log_{ab} a$ равен	1) 2; 2) $\log_b a$; 3) 1; 4) 0; 5) $\log_a b$.
13	Результат упрощения выражения $\dfrac{(\log_2 5-\lg 5)\left(5^{2\log_5\log_2 5}-1\right)}{\log_2^2 5}$ равен	1) $\log_2^2 5-1$; 2) $\log_2 5-1$; 3) $\log_2 5$; 4) 5; 5) 10.

№	Задания	Варианты ответов
14	Если $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$, $\log_c x = 4$, $\log_d x = 5$, то значение выражения $\log_{abcd} x$ равно	1) $\frac{60}{77}$; 2) $\frac{77}{60}$; 3) 120; 4) 1; 5) 0.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	4	1	2	4	3	3	3
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	5	1	2	5	3	2	1

13 ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

13.1. Показательные уравнения

Показательным называют уравнение, содержащее переменную в показателе степени, то есть уравнение вида $a^{f(x)}=b^{g(x)}$, где a и b – действительные числа, причем $a>0,\ a\neq 1$ и $b>0,\ b\neq 1$.

Показательно-степенным уравнением называют уравнение вида $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{\varphi(x)}$ (случай $f(x)<0$ нами рассматриваться не будет).

Методы решений уравнений:

1. Если уравнение имеет вид $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, то оно равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

2. Если уравнение имеет вид $a^{f(x)}=b$, то равносильно уравнению $f(x)=\log_a b$.

3. Если уравнение имеет вид $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{\varphi(x)}$, то решаем три уравнения:

1) $g(x)=\varphi(x)$ при $f(x)>0$ и $f(x)\neq 1$;

2) $f(x)=1$;

3) $f(x)=0$. В этом случае необходима проверка полученных корней уравнения подстановкой их в исходное уравнение, так как можем получить неопределенность вида 0^0 или $0^{-n}=\dfrac{1}{0}$.

Объединив корни трех уравнений, получим решение уравнения $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{\varphi(x)}$.

13.2. Логарифмические уравнения

Логарифмическим называют уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, то есть уравнение вида $\log_{g(x)} f(x)=\varphi(x)$, где $f(x)>0$, $g(x)>0$, $g(x)\neq 1$.

Методы решений уравнений:

1. Если уравнение имеет вид $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то оно равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при условии, что $a > 0$ и $a \neq 1$; $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

2. Если уравнение имеет вид $\log_a f(x) = g(x)$, то оно равносильно уравнению $f(x) = a^{g(x)}$ при условии, что $a > 0$ и $a \neq 1$; $f(x) > 0$.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все варианты правильных ответов (1–4):

1. Показательным называют уравнение вида:

1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ при $a \in \mathbf{R}$;

2) $a^{f(x)} = b$ при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b \in \mathbf{R}$;

3) $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, $b \neq 1$;

4) $a^b = f(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$ и $f(x) > 0$;

5) $a^{f(x)} = -b$ при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b < 0$;

6) $-a^{f(x)} = -b$ при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$.

2. Показательно-степенным уравнением называют уравнение вида:

1) $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ при $f(x) > 0$ и $f(x) \neq 1$;

2) $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ при $f(x) > 1$;

3) $(f(x))^a = (f(x))^b$ при $f(x) > 0$ и $f(x) \neq 1$;

4) $(f(x))^{g(x)} = a$ при $f(x) > 0$ и $f(x) \neq 1$;

5) $a^{f(x)} = g(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$ и $g(x) > 0$;

6) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ при $a > 0$, $a \neq 1$.

3. Логарифмическим называют уравнение вида:

1) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$; $f(x) > 0$, $g(x) > 0$;

2) $\log_a f(x) = g(x)$ при $f(x) > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;

3) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ при $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $a > 0$;

4) $\log_a f(x) = g(x)$ при $f(x) \geq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$;

5) $\log_{g(x)} f(x) = \varphi(x)$ при $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$;

6) $\log_a b = f(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

4. Чтобы найти решение уравнения $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$, необходимо:

1) объединить корни уравнений $g(x) = \varphi(x)$, $f(x) = 1$, $f(x) = 0$;

2) объединить корни уравнений $g(x) = \varphi(x)$, $f(x) = 1$, $f(x) = 0$ и выполнить проверку полученных корней;

3) решить систему уравнений $g(x) = \varphi(x)$, $f(x) = 1$, $f(x) = 0$ и выполнить проверку полученных корней;

4) решить совокупность уравнений $g(x) = \varphi(x)$, $f(x) = 1$, $f(x) = 0$ и выполнить проверку полученных корней.

Установите соответствие:

5. Равносильность уравнений:

УРАВНЕНИЕ	РАВНОСИЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ	ПРИ УСЛОВИИ
1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$;	а) $f(x) = b$;	ж) $a > 0$, $a \neq 1$, $b < 0$;
2) $a^{f(x)} = -b$;	б) $f(x) = g(x)$;	з) $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$;
3) $(-a)^{f(x)} = b$;	в) $f(x) = \log_a b$;	и) $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$;
4) $\log_a f(x) = \log_a b$;	г) $f(x) = a^{g(x)}$;	к) $a < 0$, $a \neq -1$, $b > 0$;
5) $\log_a f(x) = g(x)$.	д) $f(x) = \log_a(-b)$;	л) $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, $b > 0$;
	е) $f(x) = \log_{-a} b$.	м) $a > 0$, $a \neq 1$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5
Вариант правильного ответа	3, 5, 6	1, 4	1, 5	2, 4	1 – б – м, 2 – д – ж, 3 – е – к, 4 – а – л, 5 – г – и

Примеры

Пример 1. Найдите сумму корней уравнения

$$0{,}5\left(\sqrt{2}\right)^{2x+4} \cdot 3^{x+1} = 36 \cdot \left(\sqrt{6}\right)^{\frac{2x+6}{x}}.$$

Решение. Применяя свойства степеней 2.8, 2.10, 2.3, 2.6, получим: $2^{-1}\cdot 2^{\frac{1}{2}\cdot(2x+4)}\cdot 3^x\cdot 3=36\cdot 6^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+6}{x}}$, $2^x\cdot 2\cdot 3^x\cdot 3=36\cdot 6^{\frac{x+3}{x}}$,

$2^x\cdot 3^x=6\cdot 6^{\frac{x+3}{x}}$, $6^x=6^{\frac{x+3}{x}+1}$.

Показательное уравнение $6^x=6^{\frac{x+3}{x}+1}$ равносильно уравнению $x=\dfrac{x+3}{x}+1$, $x^2=x+3+x$ или $x^2-2x-3=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=3$.

Найдем сумму корней уравнения: $-1+3=2$.

Ответ: 2.

Пример 2. Решите уравнение $\left(2^3\right)^{\frac{x-3}{3x-7}}\sqrt[3]{\sqrt{0,25^{\frac{3x-1}{x-1}}}}=(-1{,}0(3))^0$.

Решение. Представим числа 0,25 и $(-1{,}0(3))^0$ в виде степеней числа 2: $0,25=\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2^2}=2^{-2}$, $(-1{,}0(3))^0=1=2^0$.

Применяя свойства 2.5, 2.9 и 2.3, запишем:

$\left(2^3\right)^{\frac{x-3}{3x-7}}\cdot 2^{-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3x-1}{x-1}}=2^0$, $2^{\frac{3\cdot(x-3)}{3x-7}}\cdot 2^{-\frac{3x-1}{3\cdot(x-1)}}=2^0$, $2^{\frac{3x-9}{3x-7}-\frac{3x-1}{3x-3}}=2^0$.

Получили уравнение вида $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, равносильное уравнению $f(x)=g(x)$. Следовательно, $\dfrac{3x-9}{3x-7}-\dfrac{3x-1}{3x-3}=0$ или $\dfrac{3x-9}{3x-7}=\dfrac{3x-1}{3x-3}$. Применяя основное свойство пропорции, получим:

$(3x-9)(3x-3)=(3x-7)(3x-1)$, $9x^2-36x+27=9x^2-24x+7$,

$12x=20$, откуда $x=\dfrac{20}{12}=\dfrac{5}{3}$.

Ответ: $\dfrac{5}{3}$.

Пример 3. Решите уравнение

$$2\cdot 5^{x+6}-2\cdot 3^{x+7}-86\cdot 5^{x+4}+38\cdot 3^{x+5}=0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$5^{x+6}-43\cdot 5^{x+4}=3^{x+7}-19\cdot 3^{x+5}.$$

В левой и правой части уравнения вынесем степени с показателем $x+4$. Получим:

$$5^{x+4}\left(5^2-43\right)=3^{x+4}\left(3^3-19\cdot 3^1\right),\ 5^{x+4}(-18)=3^{x+4}(-30),$$

$$3\cdot 5^{x+4}=5\cdot 3^{x+4}.$$

Разделим обе части уравнения на 3 и на 3^{x+4}:

$$\frac{3\cdot 5^{x+4}}{3\cdot 3^{x+4}}=\frac{5\cdot 3^{x+4}}{3\cdot 3^{x+4}}.\ \text{Запишем}\ \frac{5^{x+4}}{3^{x+4}}=\frac{5}{3}\ \text{или}\ \left(\frac{5}{3}\right)^{x+4}=\left(\frac{5}{3}\right)^{1},$$

откуда $x+4=1$, $x=-3$.

Ответ: –3.

Пример 4. Найдите десятичный логарифм удвоенного произведения корней уравнения $2^{2\sqrt{x+5}}+2^{\lg 100}=2^{\sqrt{x+5}+2}+2^{\sqrt{x+5}}$.

Решение. ОДЗ: $x+5\ge 0$.

Запишем уравнение в виде $2^{2\sqrt{x+5}}+4=2^{\sqrt{x+5}}\cdot 2^2+2^{\sqrt{x+5}}$ и применим подстановку $2^{\sqrt{x+5}}=a>0$. Тогда исходное уравнение примет вид $a^2+4=4a+a$. Решив квадратное уравнение $a^2-5a+4=0$, получим $a_1=4$, $a_2=1$. Этим значениям а соответствуют два уравнения:

1) $2^{\sqrt{x+5}}=4$, $2^{\sqrt{x+5}}=2^2$, $\sqrt{x+5}=2$, $x+5=4$, $x=-1$;

2) $2^{\sqrt{x+5}}=1$, $2^{\sqrt{x+5}}=2^0$, $\sqrt{x+5}=0$, $x+5=0$, $x=-5$.

Поскольку числа –5 и –1 принадлежат ОДЗ уравнения, то найдем десятичный логарифм удвоенного произведения полученных корней уравнения: $\lg(2\cdot(-1)\cdot(-5))=\lg 10=1$.

Ответ: 1.

Пример 5. Найдите модуль разности корней уравнения

$$9\cdot 3^{2x}-13\cdot 6^x+2^{2x+2}=0.$$

Решение. Запишем уравнение в виде $9\cdot 9^x+4\cdot 4^x=13\cdot 6^x$ и разделим обе его части на $6^x\ne 0$:

$$\frac{9^x\cdot 9}{6^x}+\frac{4^x\cdot 4}{6^x}=\frac{13\cdot 6^x}{6^x},\ 9\left(\frac{9}{6}\right)^x+\left(\frac{4}{6}\right)^x=13,\ 9\left(\frac{3}{2}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x=13.$$

В результате подстановки $\left(\frac{3}{2}\right)^x=a>0$ уравнение примет вид:

$$9a+\frac{4}{a}=13,\ 9a^2-13a+4=0,\ \text{откуда}\ a_1=\frac{4}{9},\ a_2=1.$$

Учитывая подстановку $\left(\frac{3}{2}\right)^x=a$, решим два уравнения:

1) $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{4}{9}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$, откуда $x=-2$;

2) $\left(\frac{3}{2}\right)^x=1$, $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^0$, откуда $x=0$.

Найдем модуль разности корней уравнения: $|-2-0|=2$.

Ответ: 2.

Пример 6. Найдите значение $1{,}5^a$, если

$$\frac{0{,}4\cdot 3^{2a+1}-0{,}2\cdot 6^a-3\cdot 4^a}{5{,}4\cdot 9^{a-1}+0{,}2\cdot 6^a-2^{2a+1}}=1{,}6.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\frac{(0{,}4\cdot 3^{2a+1}-0{,}2\cdot 6^a-3\cdot 4^a)\cdot 5}{(5{,}4\cdot 9^{a-1}+0{,}2\cdot 6^a-2^{2a+1})\cdot 5}=\frac{16}{10},\ \frac{2\cdot 3^{2a+1}-6^a-15\cdot 4^a}{27\cdot 9^{a-1}+6^a-5\cdot 2^{2a+1}}=\frac{8}{5}.$$

Согласно свойствам 2.3, 2.5 и 2.4 (см. п. 2.3) преобразуем следующие выражения: 1) $3^{2a+1}=3\cdot 3^{2a}$; 2) $4^a=2^{2a}$; 3) $9^{a-1}=\frac{9^a}{9}=\frac{1}{9}\cdot 3^{2a}$; 4) $6^a=2^a\cdot 3^a$; 5) $2^{2a+1}=2\cdot 2^{2a}$.

Исходное уравнение примет вид:

$$\frac{2\cdot 3\cdot 3^{2a}-2^a\cdot 3^a-15\cdot 2^{2a}}{27\cdot\frac{1}{9}\cdot 3^{2a}+2^a\cdot 3^a-5\cdot 2\cdot 2^{2a}}=\frac{8}{5},\ \frac{6\cdot 3^{2a}-2^a\cdot 3^a-15\cdot 2^{2a}}{3\cdot 3^{2a}+2^a\cdot 3^a-10\cdot 2^{2a}}=\frac{8}{5}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби, записанной в левой части уравнения на 2^{2a} и применим свойство 2.7:

$$\frac{6\cdot\frac{3^{2a}}{2^{2a}}-\frac{2^a\cdot 3^a}{2^{2a}}-15\cdot\frac{2^{2a}}{2^{2a}}}{3\cdot\frac{3^{2a}}{2^{2a}}+\frac{2^a\cdot 3^a}{2^{2a}}-10\cdot\frac{2^{2a}}{2^{2a}}}=\frac{8}{5},\ \frac{6\cdot(1{,}5)^{2a}-(1{,}5)^a-15}{3\cdot(1{,}5)^{2a}+(1{,}5)^a-10}=\frac{8}{5}.$$

Полагая $(1{,}5)^a=x$, последнее уравнение запишем в виде $\frac{6x^2-x-15}{3x^2+x-10}=\frac{8}{5}$. Поскольку знаменатель дроби не должен обращаться в нуль, то $3x^2+x-10\neq 0$ и $x_1\neq -2$, а $x_2\neq\frac{5}{3}$.

Применим основное свойство пропорции и получим: $30x^2-5x-75=24x^2+8x-80$, $6x^2-13x+5=0$, откуда $x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{5}{3}$.

Так как $x_2=\frac{5}{3}$ – посторонний корень уравнения, то $(1{,}5)^a=0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Пример 7. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x+\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x=12.$$

Решение. Пусть $\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x=a$, тогда $\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x=\frac{1}{a}$, поскольку в результате умножения левых и правых частей этих равенств получим:

$$\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x=a\cdot\frac{1}{a},\ \left(\sqrt{\left(6+\sqrt{35}\right)\left(6-\sqrt{35}\right)}\right)^x=1,$$

$$\left(\sqrt{36-35}\right)^x=1,\ 1^x=1,\ 1=1.$$

Рассмотрим уравнение $a+\frac{1}{a}=12$ или $a^2-12a+1=0$, откуда $D=12^2-4=4(36-1)=4\cdot35$, $a_{1,2}=\frac{12\pm2\sqrt{35}}{2}=6\pm\sqrt{35}$.

Учитывая подстановку $\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x=a$, решим уравнения:

1) $\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x=6+\sqrt{35}$, $\left(6+\sqrt{35}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(6+\sqrt{35}\right)^1$, откуда $\frac{x}{2}=1$, $x=2$;

2) $\left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x=6-\sqrt{35}$, $\left(6+\sqrt{35}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(6+\sqrt{35}\right)^{-1}$, откуда $\frac{x}{2}=-1$, $x=-2$.

Ответ: $\{-2;2\}$.

Пример 8. Найдите число корней уравнения

$$|1-x|^{x^2-5x-3}=|x-1|^{-7x}.$$

Решение. Поскольку $|1-x|=|x-1|$, то имеем уравнение вида

$$(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{\varphi(x)}.$$

Решим три уравнения:

1) $x^2-5x-3=-7x$, $x^2+2x-3=0$, откуда $x_1=-3$, $x_2=1$;

2) $|x-1|=1$, откуда $x-1=1$, тогда $x=2$ или $x-1=-1$, тогда $x=0$;

3) $|x-1|=0$, откуда $x=1$. Выполним проверку: подставим значение $x=1$ в исходное уравнение и получим $0^{1-5-3}=0^{-7}$. Так как имеем неопределенность вида 0^{-n}, то число 1 не является корнем исходного уравнения.

Уравнение $|1-x|^{x^2-5x-3}=|x-1|^{-7x}$ имеет три корня: -3, 0 и 2.

Ответ: 3.

Пример 9. Найдите квадрат десятичного логарифма суммы корней (или корня, если он единственный) уравнения

$$\lg 8-\lg\sqrt{x+6}=\lg 16-\lg(x-2).$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+6>0, \\ x-2>0; \end{cases} \Leftrightarrow x>2$.

Согласно свойству 12.5 получим:

$$\lg\frac{8}{\sqrt{x+6}}=\lg\frac{16}{x-2},\ \frac{8}{\sqrt{x+6}}=\frac{16}{x-2},\ \frac{1}{\sqrt{x+6}}=\frac{2}{x-2}.$$

Применим основное свойство пропорции и запишем:

$$2\sqrt{x+6}=x-2,\ \left(2\sqrt{x+6}\right)^2=(x-2)^2,\ 4x+24=x^2-4x+4,$$

$x^2-8x-20=0$, откуда $x_1=10$, $x_2=-2$, причем число -2 – посторонний корень уравнения.

Тогда $\lg^2 10=1$.

Ответ: 1.

Пример 10. Решите уравнение

$$\log_{3x-10}(10x^2-61x+94)=10^{\lg_{0,1}0,5}.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 10x^2-61x+94>0, \\ 3x-10>0, \\ 3x-10\neq 1. \end{cases}$

Выполним преобразования правой части уравнения:

$$10^{\lg_{0,1}0,5}=10^{\lg_{10^{-1}}2^{-1}}=10^{\lg 2}=2.$$

Так как имеем уравнение вида $\log_{g(x)}f(x)=c$, то исходное уравнение на ОДЗ равносильно уравнению $10x^2-61x+94=(3x-10)^2$ или $x^2-x-6=0$, откуда $x_1=-2$, $x_2=3$. Поскольку числа -2 и 3 не принадлежат области допустимых значений уравнения, то уравнение корней не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 11. Решите уравнение $x^{\lg x}=1000x^{-2}$.

Решение. ОДЗ: $x>0$. Полагая $\lg x=a$, запишем $x=10^a$ и решим показательное уравнение $\left(10^a\right)^a=10^3\left(10^a\right)^{-2}$.

Применим свойства степеней 2.5, 2.3 и получим:

$$10^{a^2}=10^3\cdot 10^{-2a},\ 10^{a^2}=10^{3-2a},\ a^2=3-2a,\ a^2+2a-3=0,$$

откуда $a_1=-3$, $a_2=1$.

Учитывая подстановку, найдем корни исходного уравнения:

$$x_1=10^{-3}=0{,}001 \text{ и } x_2=10^1=10.$$

Ответ: $\{0{,}001;\ 10\}$.

Пример 12. Найдите среднее геометрическое корней уравнения

$$\log_{3x}\frac{3}{x}+\frac{1}{\log_x^2 3}=\log_3 3.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x>0,\ x\neq 1, \\ 3x\neq 1. \end{cases}$

Применим свойства логарифмов 12.5, 12.8, 12.9, 12.2, 12.4:

$$\log_{3x}3-\log_{3x}x+\log_3^2 x=1,\ \frac{\log_3 3}{\log_3 3x}-\frac{\log_3 x}{\log_3 3x}+\log_3^2 x=1,$$

$$\frac{1}{\log_3 3+\log_3 3x}-\frac{\log_3 x}{\log_3 3+\log_3 x}+\log_3^2 x=1,\ \frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x}+\log_3^2 x=1.$$

В результате подстановки $\log_3 x=a$ получим: $\dfrac{1-a}{1+a}+a^2=1$, $\dfrac{1-a}{1+a}-(1-a)(1+a)=0$, $(1-a)\left(\dfrac{1}{1+a}-(1+a)\right)=0$.

Решим два уравнения: 1) $1-a=0$, откуда $a=1$;

2) $\dfrac{1}{1+a}-(1+a)=0$, откуда $(1+a)^2=1$ и $a=0$ или $a=-2$.

Учитывая подстановку, рассмотрим три уравнения:

1) $\log_3 x=1$, $x=3$;

2) $\log_3 x=0$, $x=1$ – посторонний корень;

3) $\log_3 x=-2$, $x=\dfrac{1}{9}$.

Найдем среднее геометрическое корней уравнения:

$$\sqrt{3\cdot\frac{1}{9}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 10^{\frac{1}{\log_{81}10}}, \\ \lg\sqrt{xy} = 1+\lg 3. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ y>0. \end{cases}$

Запишем систему уравнений в виде $\begin{cases} 3^{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 3^4, \\ \lg\sqrt{xy} = \lg 10+\lg 3. \end{cases}$

Рассматриваемая система состоит из показательного и логарифмического уравнений и равносильна системе $\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=4, & (1) \\ \sqrt{xy}=30. & (2) \end{cases}$

Выразим $\sqrt{y}$ из уравнения (1): $\sqrt{y}=2\sqrt{x}-4$. Подставим полученное выражение в уравнение (2): $\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-4\right)=30$, $2x-4\sqrt{x}=30$, $x-2\sqrt{x}-15=0$. Получили квадратное уравнение относительно $\sqrt{x}$. Значит $\sqrt{x_1}=5$, откуда $x=25$ и $\sqrt{x_2}=-3$, откуда $x\in\varnothing$.

Найдем y: $\sqrt{y}=2\cdot 5-4$, $\sqrt{y}=6$, $y=36$.

Ответ: $(25;\ 36)$.

Пример 14. Найдите произведение чисел x и y, если $(x;\ y)$ – решение системы уравнений $\begin{cases} \log_2 x^2y^3 = \log_x x, \\ \log_2 \dfrac{x}{y^2} = \log_y y^{-4}. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x>0,\ x\neq 1, \\ y>0,\ y\neq 1. \end{cases}$

Преобразуем первое уравнение системы:

$$\log_2 x^2+\log_2 y^3=1,\ 2\log_2 x+3\log_2 y=1.$$

Преобразуем второе уравнение системы:

$\log_2 x-\log_2 y^2=-4$, $\log_2 x-2\log_2 y=-4$, $2\log_2 x-4\log_2 y=-8$.

Найдем разность полученных уравнений:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 2\log_2 x+3\log_2 y=1 \\ 2\log_2 x-4\log_2 y=-8 \end{array} \\ \hline 7\log_2 y=9 \end{array}$$

Тогда $\log_2 y=\frac{9}{7}$ и $y=2^{\frac{9}{7}}$.

Найдем значение x, решая уравнение $\log_2 x-2\log_2 y=-4$. Получим: $\log_2 x=-4+\frac{18}{7}$, $\log_2 x=-\frac{10}{7}$, откуда $x=2^{-\frac{10}{7}}$.

Найдем произведение полученных значений x и y:

$xy = 2^{-\frac{10}{7}} \cdot 2^{\frac{9}{7}} = 2^{-\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{0,5}$.

Ответ: $\sqrt[7]{0,5}$.

Пример 15. Найдите решения системы уравнений $\begin{cases} \sqrt[6]{x^{x+y}} = y^2, \\ \sqrt[3]{y^{x+y}} = x \end{cases}$ при условии, что $y > 0$.

Решение. Применим определение логарифма и запишем систему уравнений в виде $\begin{cases} \dfrac{x+y}{6} = \log_x y^2, \\ \dfrac{x+y}{3} = \log_y x; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y = 12\log_x y, \\ x+y = \dfrac{3}{\log_x y}. \end{cases}$

Тогда $12\log_x y = \dfrac{3}{\log_x y}$, $12\log_x^2 y = 3$, $\log_x^2 y = \dfrac{1}{4}$, откуда $\log_x y = \dfrac{1}{2}$ или $\log_x y = -\dfrac{1}{2}$, а значит $y = \sqrt{x}$ или $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Рассмотрим два случая:

1. Если $y = \sqrt{x}$, то, подставляя значение y в любое уравнение исходной системы, например в уравнение $x^{x+y} = y^{12}$, найдем значение переменной x, решая показательно-степенное уравнение $x^{x+\sqrt{x}} = x^6$:

1) $x + \sqrt{x} = 6$, $x + \sqrt{x} - 6 = 0$, откуда $\sqrt{x} = 2$, а $x = 4$, тогда $y = 2$;

2) $x = 1$, тогда $y = 1$.

2. Если $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, то решим уравнение $x^{x+\frac{1}{\sqrt{x}}} = x^{-6}$. Так как $x > 0$, то уравнение $x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = -6$ корней не имеет, а случай $x = 1$ уже рассмотрен.

Таким образом, рассматриваемая система уравнений имеет два решения: $(4;\ 2), (1;\ 1)$.

Ответ: $(4;\ 2), (1;\ 1)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения (1–75):

1. $3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}} \cdot \left(3^{-1}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}} = 3^{3,5}$.   **2.** $\sqrt{2^x \sqrt[3]{4^x \cdot 0,125^{x^{-1}}}} = \sqrt[3]{128}$.

3. $\left(\left(\sqrt[5]{27}\right)^{\frac{x}{4}-\sqrt{\frac{x}{3}}}\right)^{\frac{x}{4}+\sqrt{\frac{x}{3}}}=\left(3^7\right)^{4^{-1}}$.

4. $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=(0{,}25)^{\log_2 10}\cdot\left(10^{x-1}\right)^3$.

5. $0{,}6^x\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=(0{,}216)^3$. 6. $5^{\frac{1}{x-\sqrt{x}}}\cdot 0{,}2^{\sqrt{x^{-1}}}=\sqrt[3]{25}$.

7. $\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}\cdot 0{,}5^{\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=4^{\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}}$.

8. $2{,}5^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}}\cdot 0{,}4^{1-\sqrt{9-x}}=5^{10}\cdot 32^{\frac{1}{\lg 0{,}5}}$.

9. $27^x-13\cdot 9^x+13\cdot 3^{x+1}=3^3$.

10. $25^x+5\cdot 2^{2x}=5^{2x+1}-20\cdot 4^x$.

11. $0{,}5\cdot 9^x+\left(\sqrt{0{,}5\cdot 3^x}\right)^2=2^{2x}$. 12. $9^{x+2}+45\cdot 6^x=9\cdot 2^{2x+2}$.

13. $1{,}5\cdot 2^{4x}+9^{2x}=2{,}5\cdot 6^{2x}$. 14. $15\cdot 5^{2x-1}-10\cdot 5^{x-1}=1$.

15. $9^{x^2-1{,}5}-12\cdot 3^{x^2-3}=-1$. 16. $2^{2x}-10\cdot 2^{x-1}-6\cdot 2^2=0$.

17. $\left(\sqrt[15]{3}\right)^{3x}+\left(\sqrt[10]{3}\right)^{x-10}=84$. 18. $9^{\sqrt{x-5}}=9^{1{,}5}+6\cdot 3^{\sqrt{x-5}}$.

19. $8{,}5\cdot 2^{\sqrt{x^2-8x}}-2^2=4^{\sqrt{x^2-8x}}$. 20. $4^{\sqrt{x+1}}-4^3\cdot 2^{\sqrt{x+1}}=0$.

21. $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}+10^0=10^2$. 22. $\frac{2^{x-1}+5}{2}=\frac{9}{2^{x-2}}$.

23. $\frac{2\cdot 8^x+2^{x+1}}{4^x-2}=10$. 24. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}}=\sqrt[9]{|3-x|^{3x-6}}$.

25. $\left|(x-3)^3\right|^{x^2-3\frac{1}{3}x+1}=1$. 26. $|2-x|^{10x^2-3x-1}=\lg 10$.

27. $\log_2\left(\sqrt{4x+5}-1\right)=0{,}5\log_2\left(\sqrt{4x+5}+11\right)$.

28. $\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3+\lg 2=\lg\left(27-3^{\frac{1}{x}}\right)$.

29. $\lg(x+1{,}5)=-\lg x$. 30. $x\lg\sqrt[5]{5^{2x-8}}-\lg 25=0$.

31. $x(\lg 5-1)=\lg\left(2^x+1\right)-\lg 6$.

32. $0{,}5\left(\lg\left(x^2-55x+90\right)-\lg(x-36)\right)=\lg\sqrt{2}$.

33. $\lg(5-x)-\frac{1}{3}\lg\left(35-x^3\right)=0$.

34. $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$.

35. $\lg 8-\lg\sqrt{x+6}=\lg 16-\lg(x-2)$.

36. $3\log_5 2+2-x=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right)$.

37. $\log_3\left(81^x+3^{2x}\right)=3\log_{27}90$.

38. $\lg 5+\lg(x+10)=1-\lg(2x-1)+\lg(21x-20)$.

39. $\lg\left(3^x-2^{4-x}\right)=2+0{,}25\lg 16-0{,}5x\lg 4$.

40. $\dfrac{2-\lg 4+\lg 0{,}12}{\lg\left(\sqrt{3x+1}+4\right)-\lg(2x)}=1$.

41. $\lg\left(625\sqrt[5]{5^{x^2-20x+55}}\right)=0$.

42. $\lg 10^{\lg\left(x^2-21\right)}-2=\lg x-\lg 25$.

43. $\lg\left(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right)=0$.

44. $\log_{0,5}\log_3\log_4 x=\log_{7,5}1$.

45. $\log_2\dfrac{x-5}{x+5}=\log_{0,5}\left(x^2-25\right)$.

46. $\dfrac{2\log_{25}\left(\sqrt{2x-7}+1\right)}{\log_{25}\left(\sqrt{2x-7}+7\right)}=1$.

47. $\log_3(x-2)=-0{,}5\log_3(x-4)^2$.

48. $\log_3(3-x)^2-\log_{\frac{1}{3}}|x-3|=3$.

49. $\lg(x(x-9))=-\lg\left(x^{-1}(x+9)\right)$.

50. $\log_2\left(x^4+4\right)-x=\log_2\left(2\cdot 2^x-3\right)$.

51. $\log_{1-x}6-\log_{1-x}4=1$.

52. $6\log_x 3+3\log_{\frac{1}{27}}x=1$.

53. $\lg\left(\sqrt{6+x}+6\right)-2\log_{\sqrt{x}}^{-1}10=0$.

54. $2\log_{(6+x)^{-1}}\left(2x-\sqrt{6+x}\right)=-1$.

55. $3\cdot 2^{2\log_x 2}-2^3=46\cdot 2^{\log_x 2-1}$.

56. $1+\log_x 4\cdot\log_4(10-x)=2\cdot\log_4^{-1}x$.

57. $\log_x 9+\log_{x^2}9^3-\log_x x=9$.

58. $\lg^2 x^2=\lg^2 10$.

59. $\ln\log_2^2(x-4)=0$.

60. $\lg^2(10x)-\log_{0,1}x-19=0$.

61. $x^{\log_2 x}-10^{\lg 8}=0$.

62. $x^{\log_{x^2}\left(x^2-1\right)}=x^{\log_{x^2}\sqrt{625}}$.

63. $2^{2\log_2 x}+x^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2$.

64. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=x^{\log_x 10}$.

65. $3\sqrt{\log_3 x}=4\log_9\sqrt{3x}+1$.

66. $\sqrt{5}^{4(\log_5 2+x)}-5^{x+\log_5 2}=2$.

67. $\lg\left(x^2+1\right)+\lg 10=2\lg^{-1}\left(1+x^2\right)$.

68. $0{,}25\log_x\left(9x^2\right)\cdot\log_3^2 x=\log_x x$.

69. $\log_{0,5}^2\left(2\sqrt{x}\right)^2+\log_2\dfrac{x^2}{2^3}=8$.

70. $3^{3\lg x}-7\cdot 3^{2\lg x}-21\cdot 3^{\lg x}=-3^3$.

71. $\log_{\frac{1}{3}} x\cdot\log_9 x\cdot\log_{27} x\cdot\log_{81} x=-0{,}(6)$.

72. $\sqrt{\log_5 x}+\sqrt{\log_x 5}=3\dfrac{1}{3}$.

73. $(\log_2 x-3)\log_2 x=-(\log_2 x+1)\log_2\sqrt[3]{4}$.

74. $\lg^2\left(10\sqrt{x}\right)^2+\lg^2 10x=14+\lg x^{-1}$.

75. $5^{\log_2\left(x^2-21\right)}\cdot 5^{-\log_2 x}=5^2$.

Решите системы уравнений (76–89):

76. $\begin{cases}\left(\sqrt{2}\right)^{2x}+\left(\sqrt{2}\right)^{2y}=5,\\ 2^x\cdot 2^y-4=0.\end{cases}$

77. $\begin{cases}2^{3x-1}=5y,\\ 2^x=5y.\end{cases}$

78. $\begin{cases}x^{\log_y x}=2,\\ y^{\log_x y}=2^4.\end{cases}$

79. $\begin{cases}\log_y x+\log_x y=2,\\ \left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{y}{4}+5.\end{cases}$

80. $\begin{cases}3^{2x}-2^y=725,\\ 4\cdot 3^x-2^y=100.\end{cases}$

81. $\begin{cases}x^{2y^2-1}=5,\\ x^{y^2+2}=5^3.\end{cases}$

82. $\begin{cases}2^{2x+2y}=2^{y-x},\\ 2^{2\log_{\sqrt{2}} x}+5=y^4.\end{cases}$

83. $\begin{cases}2^{x-1}\cdot 3^{y-1}=1,\\ 3^{x-1}\cdot 4^{y-1}=1.\end{cases}$

84. $\begin{cases}2y=2+\log_2 x,\\ x^y-2^{12}=0.\end{cases}$

85. $\begin{cases}(x+y)2^{y-2x}=2{,}5^2,\\ (x+y)^{(2x-y)^{-1}}=5.\end{cases}$

86. $\begin{cases}2^{3\log_9(x-4y)}=\log_2 2,\\ 2^{2x-4y}-7\cdot 2^{x-2y}=2^3.\end{cases}$

87. $\begin{cases}\log_2 x=2\log_2 y,\\ 0{,}2x^2+y^2=-0{,}8.\end{cases}$

88. $\begin{cases}10^{\lg(x+y)}=5,\\ \lg(x-y)+\lg(x+y)+\lg 5=\lg 100.\end{cases}$

89. $\begin{cases}3^y\cdot 3^{2x}=9^2,\\ \lg(y+x)^2=\lg x+\lg 9.\end{cases}$

90. Найдите квадрат разности корней уравнения

$$2^{x^2-1}-3^{x^2}-3^{x^2-1}+4\cdot 2^{x^2}=0.$$

91. Найдите модуль разности корней уравнения

$$4\cdot 100^{\frac{1}{x}}+4\cdot 25^{\frac{1}{x}}=17\cdot 25^{\frac{1}{x}}\cdot 2^{\frac{1}{x}}.$$

92. Найдите среднее арифметическое корней уравнения

$$\frac{3^{\sqrt{-12x}}+3^{\sqrt{(-1)^2}}}{12}=3^{\sqrt{-3x}-1}.$$

93. Найдите произведение корней уравнения

$$x^{\log_3 x}-\left(\sqrt[3]{3}x\right)^{\frac{3}{4}}=0.$$

94. Найдите среднее геометрическое корней уравнения

$$6^{\log_6^2 x-1}+\frac{x^{\log_6 x}}{6}-2=0.$$

95. Найдите удвоенную сумму x и y, если $(x;\ y)$ – решение системы уравнений $\begin{cases}\log_{xy}(x-y)=\log_{xy}xy,\\ \log_{xy}(x+y)=\log_{xy}1.\end{cases}$

Ответы: **1.** $x=81$. **2.** $x_1=-0{,}2;\ x_2=3$. **3.** $x=10$. **4.** $x_1=1$; $x_2=2$. **5.** $x_1=-2{,}5;\ x_2=3$. **6.** $x=2{,}25$. **7.** $x=4$. **8.** $x_1=-7$; $x_2=8$. **9.** $x_1=0;\ x_2=1;\ x_3=2$. **10.** $x=1$. **11.** $x=0$. **12.** $x=-2$. **13.** $x_1=0$; $x_2=0{,}5$. **14.** $x=0$. **15.** $x_{1,2}=\pm 1; x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$. **16.** $x=3$. **17.** $x=20$. **18.** $x=9$. **19.** $x_1=-1$; $x_2=9$. **20.** $x=35$. **21.** $x_{1,2}=\pm 1$. **22.** $x=3$. **23.** $x_1=1; x_2=\log_2\left(3+\sqrt{29}\right)-1$. **24.** $x_1=2;\ x_2=4;\ x_3=11$. **25.** $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=2;\ x_3=4$. **26.** $\{-0{,}2;\ 0{,}5;\ 1;\ 3\}$. **27.** $x=5$. **28.** $x=0{,}5$. **29.** $x=0{,}5$. **30.** $x_1=-1;\ x_2=5$. **31.** $x=1$. **32.** $x=54$. **33.** $x_1=2$; $x_2=3$. **34.** $x=64$. **35.** $x=10$. **36.** $x=2$. **37.** $x=1$. **38.** $x_1=1{,}5$; $x_2=10$. **39.** $x=3$. **40.** $x=1$. **41.** $x_1=5;\ x_2=15$. **42.** $x=7$. **43.** $x_1=2;\ x_2=6$. **44.** 64. **45.** $x=6$. **46.** $x=5{,}5$. **47.** $x_1=3$; $x_2=3+\sqrt{2}$. **48.** $x_1=0;\ x_2=6$. **49.** $x=-10$. **50.** $x=2$. **51.** $x=-0{,}5$. **52.** $x_1=\frac{1}{27};\ x_2=9$. **53.** $x=10$. **54.** $x=3$. **55.** $x=\sqrt[3]{2}$. **56.** $x_1=2;\ x_2=8$. **57.** $x=\sqrt{3}$. **58.** $x_{1,2}=\pm\sqrt{10}$.

59. $x=4{,}5$. **60.** $x_1=10^{-6}$; $x_2=10^3$. **61.** $x_1=2^{\sqrt{3}}$, $x_2=2^{-\sqrt{3}}$. **62.** $x=\sqrt{26}$. **63.** $x=2$. **64.** $\{100;\ 0{,}01\}$. **65.** $x_1=3$; $x_2=81$. **66.** $x=0$. **67.** $x_{1,2}=\pm 3$. **68.** $x_1=\frac{1}{9}$, $x_2=3$. **69.** $x_1=\frac{1}{128}$; $x_2=2$. **70.** $x_1=1$; $x_2=100$. **71.** $x_1=\frac{1}{9}$; $x_2=9$. **72.** $x_1=\sqrt[9]{5}$; $x_2=5^9$. **73.** $x_1=\sqrt[3]{2}$; $x_2=4$. **74.** $x_1=10^{-4,5}$; $x_2=10$. **75.** $x=7$. **76.** $(0;\ 2)$; $(2;\ 0)$. **77.** $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$. **78.** $\left(2^{\sqrt[3]{4}};\ 2^{\sqrt[3]{2}}\right)$. **79.** $(5;\ 5)$. **80.** $(3;\ 2)$. **81.** $(5;\ 1)$; $(5;\ -1)$. **82.** $(0{,}5;\ -1{,}5)$ **83.** $(1;\ 1)$. **84.** $(16;\ 3)$; $\left(\frac{1}{64};\ -2\right)$. **85.** $(9;\ 16)$. **86.** $(5;\ 1)$. **87.** $(1;\ 1)$; $(4;\ 2)$. **88.** $(4{,}5;\ 0{,}5)$. **89.** $(1;\ 2)$; $(16;\ -28)$. **90.** 12. **91.** 1. **92.** $-\frac{1}{6}$. **93.** $\sqrt[4]{27}$ **94.** 1. **95.** 2.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Десятичный логарифм рационального корня уравнения $3^{2-\sqrt{x}}-2=\sqrt{9^{2-2\sqrt{x}}}$ равен	1) $\lg^2 1{,}5$; 2) $\lg 3$; 3) 0; 4) 1; 5) 2.
2	Сумма корней уравнения $\frac{1}{\log^2_{1-x}10}+\lg^2(1-x)^{-1}=8$ равна	1) 101; 2) 100; 3) 99,99; 4) 99; 5) –98,01.
3	Сумма десятичных логарифмов корней уравнения $x^{\lg x}=100\,000x^4$ равна	1) 4; 2) 5; 3) 2; 4) 1; 5) 3.
4	Если x_0 – корень уравнения $\log_2\log_6\left(2^{\sqrt{x}+1}+4\right)=\log_6 6$, то значение выражения $\log_2^3 x_0$ равно	1) 14; 2) 64; 3) 48; 4) 4; 5) 16.

№	Задания	Варианты ответов
5	Произведение корней уравнения $\sqrt{(2+\sqrt{3})^x}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^x}=4$ равно	1) 16; 2) 4; 3) 2; 4) −4; 5) 0.
6	Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $2^x+3^x=13$	1) 1,5; 2) 3; 3) 2; 4) 2,52; 5) 1.
7	Найдите среднее арифметическое корней (или корень, если он единственный) уравнения $\lvert x-3\rvert^{x^2-7x+14}=(3-x)^2$	1) 1,55; 2) 9; 3) 6,5; 4) 1,5; 5) 3.
8	Наименьшее целое решение уравнения $4^{0{,}5\sqrt{\log_2 x}}=x^{\sqrt{\log_x 2}}$ принадлежит промежутку	1) $(-1;\ 2)$; 2) $(2;\ 6)$; 3) $[2;\ 5]$; 4) $[3;\ 9)$; 5) $[3;\ 5]$.
9	Уравнение $2^x+2^{-x}=2a^{-1}$ имеет единственное решение, при условии, что	1) $a=2$; 2) $a=1$; 3) $a>0$; 4) $a<0$; 5) $a\in[1;\ 1{,}9)$.
10	Произведение корней уравнения $\lvert 1-x\rvert^{\log_2 x-\log_2 x^2}=\lvert x-1\rvert^3$ равно	1) 0,25; 2) 1,25; 3) 125; 4) 4; 5) 8.
11	Если x_0 – меньший корень уравнения $x^{2\lg\frac{100}{x}-3\lg x}=x^{\log_x 0{,}1}$, то значение x_0^{-5} равно	1) 1; 2) 1,1; 3) 10; 4) 0,0001; 5) 100.
12	Множество решений уравнения $\log_{x+1}\left(x^2+x-6\right)=\log_{x+1}\lvert x+1\rvert^4$ имеет вид	1) $\{3;\ 5;\ 7\}$; 2) $\mathbf{R}$; 3) $\{13;\ 25\}$; 4) $\{0;\ 1\}$; 5) $\varnothing$.

№	Задания	Варианты ответов
13	Уравнение $\log_3^2 x + 0{,}5a = 0{,}5\lvert\log_3 x\rvert$ имеет четыре решения, если	1) $a \in \mathbf{R}$; 2) $a = 0$; 3) $a \in (0;\ 0{,}125)$; 4) $a \in (1;\ 125)$; 5) $a \in [1;\ 2]$.
14	Количество целых значений a, при которых уравнение $\ln\lvert x\rvert = \frac{a}{x}$ имеет не единственный корень, равно	1) 1; 2) 2; 3) 5; 4) 3; 5) 10.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	3	5	1	2	4	3	5
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	3	2	1	3	5	3	1

14 ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

14.1. Показательные неравенства

Методы решений показательных неравенств:

1. Если неравенство имеет вид $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ $(\leq, >, \geq)$, то:

а) при условии, что $a > 1$ получим $f(x) < g(x)$;

б) при условии, что $0 < a < 1$ получим $f(x) > g(x)$.

2. Если неравенство имеет вид $a^{f(x)} < g(x)$, то:

а) при $a > 1$ и $g(x) > 0$ получим $f(x) < \log_a g(x)$;

б) при $a > 1$ и $g(x) < 0$ получим $x \in \varnothing$;

в) при $0 < a < 1$ и $g(x) > 0$ получим $f(x) > \log_a g(x)$;

г) при $0 < a < 1$ и $g(x) < 0$ получим $x \in \varnothing$.

3. Если неравенство имеет вид $a^{f(x)} > g(x)$, то:

а) при $a > 1$ и $g(x) > 0$ получим $f(x) > \log_a g(x)$;

б) при $a > 0$ и $g(x) < 0$ получим $x \in D(f)$;

в) при $0 < a < 1$ и $g(x) > 0$ получим $f(x) < \log_a g(x)$.

14.2. Показательно-степенные неравенства

Приведем алгоритм решения показательно-степенного неравенства вида $(f(x))^{g(x)} < (f(x))^{\varphi(x)}$ $(>;\ \leq;\ \geq)$:

1. Запишем неравенство в виде $(f(x))^{g(x)} - (f(x))^{\varphi(x)} < 0$ и рассмотрим функцию $F(x) = (f(x))^{g(x)} - (f(x))^{\varphi(x)}$.

2. Найдем область определения функции.

3. Найдем нули функции, решая уравнения:

1) $g(x) = \varphi(x)$, причем $f(x) > 0$ и $f(x) \neq 1$;

2) $f(x) = 1$;

3) $f(x) = 0$.

4. Нанесем нули функции на ее область определения и применим метод интервалов.

14.3. Логарифмические неравенства

Методы решений логарифмических неравенств:

1. Если неравенство имеет вид $\log_a f(x) \le \log_a g(x)$ $(<, >, \ge)$, то ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Тогда:

а) при условии, что $a > 1$, получим $f(x) \le g(x)$;

б) при условии, что $0 < a < 1$, получим $f(x) \ge g(x)$.

2. Если неравенство имеет вид $\log_a f(x) < g(x)$, то ОДЗ: $f(x) > 0$. Тогда:

а) при условии, что $a > 1$, получим $f(x) < a^{g(x)}$;

б) при условии, что $0 < a < 1$, получим $f(x) > a^{g(x)}$.

3. Если неравенство имеет вид $\log_{q(x)} f(x) \le \log_{q(x)} g(x)$, то решать неравенство целесообразно методом интервалов (см. п. 7.1).

Заметим, что показательные и логарифмические неравенства всегда можно решить методом интервалов.

Тест для проверки теоретических знаний

Установите соответствие (1–5):

1. Неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО	ПРИ УСЛОВИИ
1) $f(x) < g(x)$;	а) $0 < a < 1$;
2) $f(x) > g(x)$.	б) $a > 0,\ a \ne 1$;
	в) $a > 1$;
	г) $a > 0$.

2. Неравенство $a^{f(x)} < g(x)$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО (ЕГО РЕШЕНИЕ)	ПРИ УСЛОВИИ
1) $f(x) < \log_a g(x)$;	а) $a > 1,\ g(x) > 0$;
2) $f(x) > \log_a g(x)$;	б) $a > 0,\ a \ne 1,\ g(x) < 0$;
3) $x \in \varnothing$.	в) $a < 1,\ g(x) < 0$;
	г) $a > 0,\ g(x) > 0$;
	д) $0 < a < 1,\ g(x) > 0$.

3. Неравенство $a^{f(x)} > g(x)$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО (ЕГО РЕШЕНИЕ)	ПРИ УСЛОВИИ
1) $f(x) > \log_a g(x)$;	а) $a > 1$, $g(x) > 0$;
2) $f(x) < \log_a g(x)$;	б) $a > 0$, $g(x) > 0$;
3) $x \in D(f)$.	в) $a > 0$, $g(x) < 0$;
	г) $0 < a < 1$, $g(x) > 0$;
	д) $0 < a < 1$, $g(x) < 0$.

4. Неравенство $\log_a f(x) \le \log_a g(x)$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО	ПРИ УСЛОВИИ
1) $f(x) \le g(x)$;	а) $a > 1$, $\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{array}\right.$
2) $f(x) \ge g(x)$.	б) $a > 1$, $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$
	в) $0 < a < 1$, $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$
	г) $0 < a < 1$, $\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{array}\right.$

5. Неравенство $\log_a f(x) < g(x)$:

РАВНОСИЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО	ПРИ УСЛОВИИ
1) $f(x) < a^{g(x)}$;	а) $0 < a < 1$, $g(x) > 0$;
2) $f(x) > a^{g(x)}$.	б) $0 < a < 1$, $f(x) > 0$;
	в) $a > 1$, $g(x) > 0$;
	г) $a > 1$, $f(x) > 0$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5
Вариант правильного ответа	1 – в, 2 – а	1 – а, 2 – д, 3 – б	1 – а, 2 – г, 3 – в	1 – б, 2 – в	1 – г, 2 – б

Примеры

Пример 1. Решите неравенство $2^{1-2^{x^{-1}}} < 0{,}125$.

Решение. Запишем неравенство в виде $2^{1-2^{\frac{1}{2}}} < 2^{-3}$. Поскольку $2 > 1$, то получим:

$$1-2^{\frac{1}{x}} < 3,\ 2^{\frac{1}{x}} > 4,\ 2^{\frac{1}{x}} > 2^2,\ \frac{1}{x} > 2,\ \frac{1-2x}{x} > 0.$$

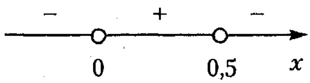


Рис. 14.1

Согласно рисунку 14.1 решением неравенства является промежуток $(0;\ 0{,}5)$.

Ответ: $(0;\ 0{,}5)$.

Пример 2. Решите неравенство $\left(0{,}(7)^{\frac{1}{x^2}}\right)^{x^2-2x} \geq 1$.

Решение. Запишем неравенство в виде $0{,}(7)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \geq 0{,}(7)^0$. Поскольку $0{,}(7) < 1$, то получим $\dfrac{x(x-2)}{x^2} \leq 0$.

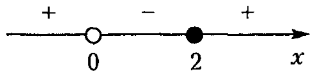


Рис. 14.2

Согласно рисунку 14.2 решением неравенства является промежуток $(0;\ 2]$.

Ответ: $(0;\ 2]$.

Пример 3. Определите число целых решений неравенства

$$(0{,}5)^{x^2-4x-5} \leq 3^{-x^2+4x+5}.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x-5} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-5}$.

Разделим обе его части на $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-5}$ и получим $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-4x-5} \leq 1$ или $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-4x-5} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^0$. Так как основание степени $\frac{3}{2} > 1$, то показательное неравенство равносильно степенному неравенству $x^2-4x-5 \leq 0$.

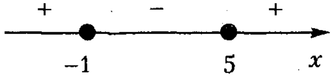


Рис. 14.3

Решим последнее неравенство методом интервалов (рис. 14.3) и получим $x \in [-1;\ 5]$.

Отрезку $[-1;\ 5]$ принадлежит 7 целых решений неравенства:

$-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5.$

Ответ: 7.

Пример 4. Решите неравенство $5^2\left(\sqrt{2}\right)^{2x}-10^x+5^x>25$.

Решение. Запишем неравенство в виде

$$25\cdot 2^x-2^x\cdot 5^x+5^x-25>0$$

и разложим его левую часть на множители.

Получим неравенство $2^x\left(25-5^x\right)-\left(25-5^x\right)>0$ или неравенство $\left(25-5^x\right)\cdot\left(2^x-1\right)>0$, которое решим методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\left(25-5^x\right)\cdot\left(2^x-1\right)$.
2. $D(f): x\in\mathbf{R}$.
3. Найдем нули функции, решая уравнение $\left(25-5^x\right)\left(2^x-1\right)=0$, равносильное совокупности уравнений $5^x=25$, откуда $x=2$ и $2^x=1$, откуда $x=0$.
4. Нанесем числа 0 и 2 на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.4).

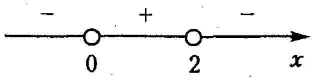


Рис. 14.4

5. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x)=\left(25-5^x\right)\cdot\left(2^x-1\right)$ положительна, следовательно, $x\in(0;\ 2)$.

Ответ: $(0;\ 2)$.

Пример 5. Решите неравенство $0{,}5^{2\sqrt{x}+1}+1>1{,}5\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}$.

Решение. Запишем данное неравенство в виде

$0{,}5^{2\sqrt{x}}+2-3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}>0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=0{,}5^{2\sqrt{x}}+2-3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}$.
2. $D(f): x\geq 0$.
3. Найдем нули функции, решая уравнение

$$0{,}5^{2\sqrt{x}}-3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}+2=0.$$

Получим: $0{,}5^{\sqrt{x}}=1$, откуда $x=0$ и $0{,}5^{\sqrt{x}}=2$, откуда $2^{-\sqrt{x}}=2$, $\sqrt{x}=-1$ и $x\in\varnothing$.

4. Нанесем число 0 на область определения функции и установим ее знак на полученном промежутке (рис. 14.5).

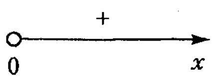


Рис. 14.5

5. Поскольку функция $f(x)=0{,}5^{2\sqrt{x}}+2-3\cdot 0{,}5^{\sqrt{x}}$ положительна на промежутке $(0;\ +\infty)$, то решением неравенства является этот промежуток.

Ответ: $(0;\ +\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>\ln e$.

Решение. Имеем показательно-степенное неравенство, которое запишем в виде $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}-1>0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}-1$.
2. $D(f): x\in\mathbf{R}$.
3. Найдем нули функции, решая уравнение:

$$\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}=\left(4x^2+2x+1\right)^{0}:$$

а) $x^2-x=0$, $x(x-1)=0$, откуда $x_1=0,\ x_2=1$;

б) $4x^2+2x+1=1$, $x(2x+1)=0$, откуда $x_3=0,\ x_4=-0{,}5$;

в) $4x^2+2x+1=0$, откуда $x\in\varnothing$.

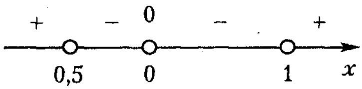


Рис. 14.6

4. Нанесем нули функции на координатную прямую и определим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.6).

5. Решением неравенства являются промежутки, на которых функция $f(x)=\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}-1$ положительна:

$$x\in(-\infty;\ -0{,}5)\cup(1;\ +\infty).$$

Ответ: $(-\infty;\ -0{,}5)\cup(1;\ +\infty)$.

Пример 7. Найдите решение неравенства

$$\log_{\lg 9}(8-x)>\log_{\lg 9}(x+4)(2x-3)^{-1}.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}8-x>0,\\ \dfrac{x+4}{2x-3}>0\end{cases}$

Найдем ОДЗ неравенства. Поскольку решением первого неравенства является промежуток $(-\infty;\ 8)$, то второе неравенство системы решим на этом промежутке методом интервалов. Согласно рисунку 14.7 запишем: $x \in (-\infty;\ -4) \cup (1{,}5;\ 8)$.

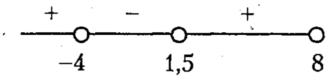


Рис. 14.7

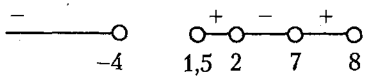


Рис. 14.8

Рассмотрим исходное неравенство. Так как основание логарифмов $\lg 9 < 1$, то найдем решение равносильного ему неравенства:

$$8 - x < \frac{x+4}{2x-3},\quad \frac{16x - 2x^2 - 24 + 3x - x - 4}{2x-3} < 0,\quad \frac{-2x^2 + 18x - 28}{2x-3} < 0,$$

$$\frac{x^2 - 9x + 14}{2x-3} > 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов на ОДЗ исходного неравенства (рис. 14.8) и получим: $x \in (1{,}5;\ 2) \cup (7;\ 8)$.

Ответ: $(1{,}5;\ 2) \cup (7;\ 8)$.

Пример 8. Найдите середину промежутка, на котором выполняется неравенство $\log_\pi(x+27) + \log_{\frac{1}{\pi}}(16-2x) < \log_\pi x$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+27>0, \\ 16-2x>0, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-27, \\ x<8, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;\ 8)$.

Применяя формулу 12.5, получим $\log_\pi \frac{x+27}{16-2x} < \log_\pi x$. Поскольку основание логарифма $\pi > 1$, то данное неравенство равносильно неравенству $\frac{x+27}{16-2x} < x$, $\frac{x+27-16x+2x^2}{16-2x} < 0$, $\frac{2x^2-15x+27}{16-2x} < 0$.

Решение этого неравенства показано на рисунке 14.9: $x \in (3;\ 4{,}5)$.

Найдем середину интервала $(3;\ 4{,}5)$: $\frac{3+4{,}5}{2} = 3{,}75$.

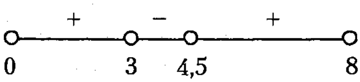


Рис. 14.9

Ответ: 3,75.

Пример 9. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$2^{-1}+\log_9 x-\log_3(5x)>\log_{\frac{1}{3}}(x+3).$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x+3>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x>-3; \end{cases} \Leftrightarrow x>0.$

Применяя свойства логарифмов, запишем неравенство в виде

$$\log_{3^2} x-\log_3(5x)-\log_{3^{-1}}(x+3)>-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\log_3 x-\log_3(5x)+$$

$$+\log_3(x+3)>-\frac{1}{2},\ \log_3 x-\log_3(5x)^2+\log_3(x+3)^2>-1,$$

$$\log_3\frac{x(x+3)^2}{25x^2}>-1.$$

Поскольку основание логарифма $3>1$, то по определению логарифма получим $\frac{(x+3)^2}{25x}>3^{-1}$, а так как $x>0$, то запишем $x^2+6x+9>\frac{25x}{3}$ и $3x^2-7x+27>0$. Заметим, что это неравенство выполняется для всех действительных значений x, а значит выполняется и на ОДЗ исходного неравенства, следовательно, $x\in(0;\ +\infty)$. Число 1 – наименьшее целое решение неравенства.

Ответ: 1.

Пример 10. Решите неравенство

$$\log_3(\log_2(2-\log_4 x)-1)<\log_4 4.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ 2-\log_4 x>0, \\ \log_2(2-\log_4 x)>1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \log_4 x<2, \\ 2-\log_2 x>2; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x<16, \\ x<1; \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;\ 1).$

Найдем решение неравенства. Применяя определение логарифма, получим: $\log_2(2-\log_4 x)-1<3$, $\log_2(2-\log_4 x)<4$, $2-\log_4 x<16$, $\log_4 x>-14$, $x>4^{-14}$, $x>2^{-28}$. Учитывая ОДЗ неравенства, запишем его решение: $x\in\left(2^{-28};\ 1\right)$.

Ответ: $\left(2^{-28};\ 1\right)$.

Пример 11. Найдите наименьшее натуральное число, которое не является решением неравенства $\log_{|x-1|} 2^{-1} > 2^{-1}$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{|x-1|} 0{,}5 - 0{,}5 > 0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \log_{|x-1|} 0{,}5 - 0{,}5$.

2. $D(f): \begin{cases} |x-1| > 0, \\ |x-1| \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} \neq 1, \\ x_3 \neq 0, x_4 \neq 2. \end{cases}$

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\log_{|x-1|} 0{,}5 = 0{,}5$, откуда $0{,}5 = |x-1|^{\frac{1}{2}}$, $|x-1| = 0{,}25$. Тогда $x-1 = 0{,}25$ или $x-1 = -0{,}25$, а $x = 1{,}25$ или $x = 0{,}75$.

4. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.10).

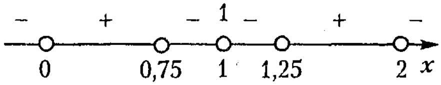


Рис. 14.10

5. Решением неравенства являются промежутки, на которых функция $f(x) = \log_{|x-1|} 0{,}5 - 0{,}5$ положительна: $x \in (0;\ 0{,}75) \cup$ $\cup (1{,}25;\ 2)$. Число 1 – наименьшее натуральное число, которое не является решением неравенства $\log_{|x-1|} 2^{-1} > 2^{-1}$.

Ответ: 1.

Пример 12. Найдите среднее арифметическое всех целых решений неравенства $2^{-1} \lg^2(x+6) \geq 2^{-1} \lg(x+6) \lg x + \lg^2 x$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x+6 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$. Запишем неравенство в виде $\lg^2(x+6) - \lg(x+6)\lg x - 2\lg^2 x \geq 0$ и решим его методом интервалов. По теореме Виета найдем нули функции:

$$f(\lg(x+6)) = \lg^2(x+6) - \lg(x+6)\lg x - 2\lg^2 x.$$

Запишем $\left[\begin{array}{l} \lg(x+6) = 2\lg x; \\ \lg(x+6) = -\lg x; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+6 = x^2, \\ x+6 = \dfrac{1}{x}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 0, \\ x^2 + 6 - 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2,\ x = 3, \\ x = -3 \pm \sqrt{10}. \end{array}\right.$

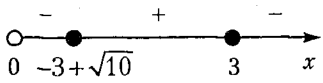


Рис. 14.11

Нанесем полученные числа на ОДЗ неравенства (рис. 14.11) и запишем его решение: $\left[-3+\sqrt{10};\ 3\right]$.

Запишем целые решения неравенства: 1; 2; 3. Найдем среднее арифметическое этих решений: $(1+2+3):3=2$.

Ответ: 2.

Пример 13. Решите неравенство $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>\log_{\sqrt{2}}2$.

Решение. Запишем неравенство в виде $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}-2>0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}-2$.

2. $D(f): x>0$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}=2$. Возводя обе части уравнения дважды в квадрат, получим $x^{\log_2 x^{\frac{1}{2}}}=2^2$, $x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=2^2$, $x^{\log_2 x}=2^4$. Полагая $\log_2 x=a$, а $x=2^a$, запишем $\left(2^a\right)^a=2^4$, $2^{a^2}=2^4$. Тогда $a^2=4$ и $a=\pm 2$. В таком случае $x_1=2^2=4$ и $x_2=2^{-2}=0{,}25$.

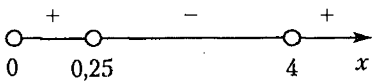


Рис. 14.12

4. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.12).

5. Решением неравенства являются промежутки, на которых функция $f(x)=\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}-2$ положительна: $(0;\ 0{,}25)\cup(4;\ +\infty)$.

Ответ: $(0;\ 0{,}25)\cup(4;\ +\infty)$.

Пример 14. Найдите область определения функции

$$y=\log_3\left(2^{\log_{x-3}0{,}5}-\log_3 3\right)+\frac{\log_3 3}{\log_3(2x-6)}.$$

Решение. Найдем область определения функции, решая систему ограничений $\begin{cases} x-3>0,\ x-3\neq 1, \\ 2^{\log_{x-3}0{,}5}-1>0, \\ 2x-6>0, \\ \log_3(2x-6)\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x\neq 4, \\ x\neq 3{,}5, \\ \log_{x-3}0{,}5>0. \end{cases}$

Рассмотрим решение неравенства $\log_{x-3}0{,}5>0$ на промежутках $(3;\ 3{,}5)$, $(3{,}5;\ 4)$ и $(4;\ +\infty)$.

Поскольку функция $f(x)=\log_{x-3}0{,}5$ нулей не имеет, то установим ее знаки на указанных промежутках (рис. 14.13).

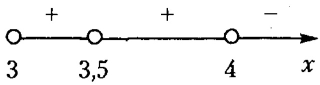


Рис. 14.13

Согласно рисунку 14.13 решением системы неравенств являются промежутки, на которых функция $f(x)=\log_{x-3}0{,}5$ положительна: $x\in(3;\ 3{,}5)\cup(3{,}5;\ 4)$.

Ответ: $(3;\ 3{,}5)\cup(3{,}5;\ 4)$.

Пример 15. Найдите решение неравенства

$$\frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x-7)+\log_3(x-3)}{\sqrt{9-x}}\geq\log_{x-3}1.$$

Решение. Запишем данное неравенство в виде $\frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x-7)+\log_3(x-3)}{\sqrt{9-x}}-\log_{x-3}1\geq 0$ и решим его методом интервалов.

1. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x-7)+\log_3(x-3)}{\sqrt{9-x}}-\log_{x-3}1.$$

2. $D(f)$: $\begin{cases} 2x-7>0, \\ x-3>0, \\ x-3\neq 1, \\ 9-x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3{,}5, \\ x>3, \\ x\neq 4, \\ x<9; \end{cases} \Leftrightarrow x\in(3{,}5;\ 4)\cup(4;\ 9)$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $\log_{3^{-1}}(2x-7)+$ $+\log_3(x-3)=0$, $\log_3(x-3)=\log_3(2x-7)$, $x-3=2x-7$, $x=4$.

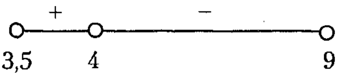


Рис. 14.14

4. Поскольку значение $x=4$ не принадлежит области определения функции, то установим знаки функции на ее области определения (рис. 14.14).

5. Решением неравенства является промежуток, на котором функция $f(x)=\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(2x-7)+\log_3(x-3)}{\sqrt{9-x}}-\log_{x-3}1$ не отрицательна: $x\in(3{,}5;\ 4)$.

Ответ: $(3{,}5;\ 4)$.

Пример 16. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$|x+2|^{\log_{\sqrt{2}}(3+x)}\geq(-x-2)^8.$$

Решение. Поскольку $(-x-2)^8=|x+2|^8$, то запишем неравенство в виде $|x+2|^{2\log_2(3+x)}-|x+2|^8\leq 0$ и решим его методом интервалов:

1. Рассмотрим функцию $f(x)=|x+2|^{2\log_2(3+x)}-|x+2|^8$.

2. $D(f): x>-3$.

3. Найдем нули функции, решая уравнение $|x+2|^{2\log_2(3+x)}=$ $=|x+2|^8$:

1) $\log_2(3+x)=4$, откуда $3+x=2^4$ и $x=13$;

2) $|x+2|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=1, \\ x+2=-1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-3; \end{array}\right.$

3) $x+2=0$, откуда $x=-2$. Проверка: подставляя значение $x=-2$ в уравнение $|x+2|^{2\log_2(3+x)}=|x+2|^8$, получим $0^0=0^8$. Поскольку получили неопределенность вида 0^0, то $x\neq-2$.

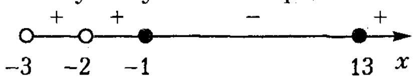


Рис. 14.15

4. Нанесем нули функции на ее область определения и установим знаки функции на полученных промежутках (рис. 14.15).

5. Решением неравенства является объединение промежутков, на которых функция $f(x)=|x+2|^{2\log_2(3+x)}-|x+2|^8$ не отрицатель-

на: $(-3;\ -2)\cup(-2;\ -1]\cup[13;\ +\infty)$. Число -1 – наименьшее целое решение неравенства.

Ответ: -1.

Задачи для самостоятельного решения

Решите неравенства (1–37):

1. $49^{0,5x^2-2x-1}-7^{-2}>0$. **2.** $\left(\sqrt{0,5}\right)^{\left(x^2+x-2\right)(6-2x)}>\left(\sqrt{0,25}\right)^0$.

3. $0,09^{x^2-1,5x+3}<243\cdot10^{-5}$. **4.** $-0,64<-\sqrt{10^{-4}\cdot2^{3x(x-3)}}<-0,64^0\cdot10^{-2}$.

5. $1^{\left|x^2-x\right|}<3^{\left|x-x^2\right|}<9$. **6.** $2^{2x}-2^{2(x-1)}+\sqrt[3]{8}^{2(x-2)}>52$.

7. $5^{x+1}+2^{x+3}+2^{x+4}<5^{x+2}+2^{x+2}$.

8. $3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}-1}-3^{\sqrt{x}-2}-3^{\sqrt{4}}<2$. **9.** $25^{x+0.5}-\sqrt{5}^{2x}>4$.

10. $25^x-6\cdot5^x+5<0$. **11.** $8\cdot3^{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}+3^{2\sqrt[4]{x}+2}-3^{2\sqrt{x}}\geq0$.

12. $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{8+3x}>\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-7}$. **13.** $|x-3|^{2x^2-7x}>1^{x+3}$.

14. $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{3x+15}{x+2}}-\left(x^2+x+1\right)^9\geq0$.

15. $\log_{2^{-1}}2(3+x)-\log_{\frac{1}{2}}(x+8)>0$.

16. $\log_{1,2}(x-2)+\log_{1,2}(x+2)<-2\log_{\frac{5}{6}}\sqrt{5}$.

17. $\lg6x^{-1}>\lg(x+5)$. **18.** $\log_{1,5}\dfrac{2x-8}{x-2}<\log_5 1$.

19. $5^{\log_3\frac{x-2}{x}}<\ln e$. **20.** $6\log_8(x-2)+3\log_{\frac{1}{8}}(x-3)-2>0$.

21. $2\log_9 x+\log_{\sqrt{3}}x+\log_{\frac{1}{3}}x-6<0$.

22. $\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\log_5 x<0$. **23.** $\log_{2x}(x-2)(x-3)-1<0$.

24. $\log_{2^{-1}}\log_2 2\log_{x-1}3>0$. **25.** $\dfrac{(1-2x)(1+2x)}{\log_{1,7}\left(2^{-1}\cdot(1-\log_7 3)\right)}\geq0$.

26. $\dfrac{2\log_{25}\left(x^2+3\right)}{x^2-4}<0$. **27.** $(0,4)^{\log_{0,25}\left(x^2-5x+8\right)}\leq5\cdot2^{-1}$.

28. $4^{0,5\log_{0,4}x\cdot\log_{0,4}(2,5x)}>x^0$. **29.** $0,09^{2^{-1}\cdot\log_{\frac{1}{3}}3\log_2\frac{x+2}{x^2+2}}>1$.

30. $\lg x-0,5(\lg x)^2<0$. **31.** $\dfrac{1+\log_{0,25}x}{1-\log_{0,5}x}\leq0,5$.

32. $x^{\frac{1}{\log_{0,3}2}}+0{,}3^{\log_{0,2}x}-2\cdot(0{,}3)^2\le 0$. **33.** $\log_2\log_{\frac{1}{3}}x>\log_6 6$.

34. $\dfrac{x^2}{\log_{0,3}2}-\dfrac{2}{\log_{0,09}2}>0$. **35.** $x^{0{,}5\log_{0,5}x-3}\ge 2^{2{,}5\log_{0,5}x-3}$.

36. $\left(\sqrt{x}\right)^{2\log_2 x}+16x^{\log_{0,5}x}-17<0$. **37.** $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}-5^2<0$.

Найдите область определения функций (38–43):

38. $y=2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}+2$. **39.** $y=\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{\log_3|x-4|}+4x-x^2$.

40. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\log_3|x-3|}+\log_3(x-3)^2$.

41. $y=\sqrt{\log_{0,5}^2(x-3)-1}+\sqrt{x-3}$.

42. $y=\sqrt[4]{2-\lg|2-x|}+\sqrt[4]{(x-2)^4}$.

43. $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-4)}-1}+\log_8^{-1}(x-4)$.

Решите системы неравенств (44–46):

44. $\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}\ge 1,\\ 2\cdot 4^{2x}\ge 32^x.\end{cases}$ **45.** $\begin{cases}\dfrac{x^2+4}{16x-x^2-64}<0,\\ \lg\sqrt{x+7}+\lg 4>\lg(x-5).\end{cases}$

46. $\begin{cases}(1{,}5)^{-x}\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-x}>\dfrac{54}{128},\\ 2^{x^2-6x-6{,}5}-\sqrt{2}<0.\end{cases}$

47. Найдите сумму длин промежутков, которые образуют решения системы неравенств $1<2^{x(x+2)}<8$.

48. Найдите сумму квадратов целых решений системы неравенств $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-13x^2}\le\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x^4+36}<\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-12x^2}$.

49. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\log_{0,3}(3x-8)>-\log_{\frac{10}{3}}\left(4+x^2\right).$$

50. Найдите среднее арифметическое целых решений неравенства $\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\log_{\frac{1}{3}}x\right)>-1$.

51. Найдите сумму наименьшего и наибольшего целых решений неравенства $\dfrac{\log_3(x+1)}{2\log_3 10+\log_{\frac{1}{3}} 9}<1$.

52. Найдите количество целых решений неравенства

$$\log^4_{\frac{1}{2}} x-\log^2_{2^{-1}}\left(\frac{x}{2}\right)^3+9\log_2\frac{32}{x^2}<4\log^2_{0,5} x.$$

Ответы: **1.** $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$. **2.** $(-2;1)\cup(3;+\infty)$. **3.** $(-\infty;0,5)\cup\cup(1;+\infty)$. **4.** $(-1;0)\cup(3;4)$. **5.** $(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;2)$. **6.** $(3;+\infty)$. **7.** $(0;+\infty)$. **8.** $[0;4)$. **9.** $(0;+\infty)$. **10.** $(0;1)$. **11.** $[0;16]$. **12.** $(0;1)$. **13.** $(-\infty;0)\cup(2;3)\cup(3;3,5)\cup(4;+\infty)$. **14.** $(-2;-1]\cup\cup[-0,5;0)$. **15.** $(-3;2)$. **16.** $(2;3)$. **17.** $(0;1)$. **18.** $(4;6)$. **19.** $(2;+\infty)$. **20.** $(3;4)\cup(4;+\infty)$. **21.** $(0;27)$. **22.** $(1;\sqrt[3]{5})$. **23.** $(0;0,5)\cup(1;2)\cup(3;6)$. **24.** $(4;10)$. **25.** $(-\infty;-0,5]\cup[0,5;+\infty)$. **26.** $(0;4)$. **27.** $[1;4]$. **28.** $(0;0,4)\cup(1;+\infty)$. **29.** $(-0,5;2)$. **30.** $(0;1)\cup(100;+\infty)$. **31.** $(0;0,5)\cup[\sqrt{2};+\infty)$. **32.** $(0;0,04]$. **33.** $(1;\sqrt{3})$. **34.** $(-2;2)$. **35.** $[0,125;4]$. **36.** $(0,25;1)\cup(1;4)$. **37.** $(0,2;5)$. **38.** $[5,5;+\infty)$. **39.** $[0;3)\cup(3;4)$. **40.** $[0;2)\cup(4;6]$. **41.** $(3;3,5]\cup[5;+\infty)$. **42.** $[-98;2)\cup(2;102]$. **43.** $(4;5)\cup(5;+\infty)$. **44.** 1. **45.** $(5;8)\cup(8;29)$. **46.** $(-1;3)$. **47.** 2. **48.** 26. **49.** 3. **50.** 1,5. **51.** 10. **52.** 3.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Наименьшее неотрицательное решение неравенства $2^x+2^{\lvert x\rvert}-2^{\frac{3}{2}}\geq 0$ равно	1) 0; 2) 0,2; 3) 0,5; 4) 1; 5) 3.
2	Середина промежутка, который образуют решения неравенства $5^2\cdot 2^x-10^x+\left(\sqrt{5}\right)^{2x}-5^2>0$, равна	1) 2; 2) 1,5; 3) 0,5; 4) 5; 5) 1.

№	Задания	Варианты ответов
3	Наименьшее целое решение неравенства $(x-2)^{x^2-6x+8}-1>0$ равно	1) 3; 2) 2; 3) 5; 4) 4; 5) –4.
4	Сумма длин промежутков, которые образуют решения неравенства $3^{2\sqrt{x^2-3}+1}+9<28\cdot 3^{\sqrt{x^2-3}}$, равна	1) $2\sqrt{7}+2\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$; 3) 1; 4) $2\sqrt{3}-2\sqrt{7}$; 5) $2\sqrt{7}-2\sqrt{3}$.
5	Сумма целых решений неравенства $\lvert 3-x\rvert^{x^2+7x+12}\le 1$ равна	1) 5; 2) 2; 3) 6,6; 4) 10; 5) 15.
6	Длина промежутка, который образуют решения неравенства $\left(5+\sqrt{24}\right)^x+\left(5-\sqrt{24}\right)^x\le 10$, равна	1) 1; 2) 3,5; 3) 6; 4) 2; 5) 3.
7	Сумма целых решение неравенства $\log_2\left(0{,}5\log_{\sqrt{2}}2-\log_9 x+\log_{\frac{1}{9}}x\right)<1$ равна	1) 3; 2) 5; 3) –5; 4) 4; 5) 7.
8	Множество решений неравенства $\log_{0,5}\left(\log_{\frac{1}{3}}\log_5 x\right)<0$ имеет вид	1) $(1;2)$; 2) $\left(1;\sqrt[3]{5}\right)$; 3) $\left(0;\sqrt[3]{15}\right)$; 4) $(-5;1)$; 5) $(1;+\infty)$.
9	Если x_0 – наименьшее целое решение неравенства $\log_{x-3}(x-4)<\log_{\sqrt{x-3}}(x-3)$, то значение $\log_{x_0-3}x_0$ равно	1) $\dfrac{\lg 5}{1+\lg 2}$; 2) $\ln 5+1$; 3) $\dfrac{\lg 15}{\lg 5}$; 4) 5; 5) $\dfrac{\lg 5}{1-\lg 5}$.

№	Задания	Варианты ответов
10	Найдите середину интервала, который образуют решения неравенства $\log_{4x}\left(x^2-x-2\right)>\log_{4x}\left(3+2x-x^2\right)$	1) 2,5; 2) 4; 3) 2,75; 4) 1; 5) 3.
11	Среднее арифметическое целых решение неравенства $\dfrac{\lg^2(3-x)+\sqrt{x-1}}{\lg^2 x-\lg 10}<0$ равно	1) 1,5; 2) 3; 3) 1; 4) 2; 5) 6.
12	Число целых решений неравенства $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}<\left(\sqrt{5}\right)^{\log_5 100}$ равно	1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 6; 5) 1.
13	Сумма целых решений неравенства $\log_{x^2}\dfrac{4x-5}{\|2-x\|}\geq\log_{x^2}x$ равна	1) 8; 2) 11; 3) 12; 4) 14; 5) 24.
14	Неравенство $a^{-1}\cdot 2^{2x}-2^x-1\leq-3a^{-1}$ имеет хотя бы одно решение при условии, что	1) $a\geq 2$; 2) $a>1$; 3) $a\in\mathbf{R}$; 4) $1<a<7$; 5) $3\leq a\leq 4$.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	3	5	3	5	2	4	1
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	2	5	3	1	2	3	1

15 АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

15.1. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называют такую числовую последовательность, каждый следующий член которой отличается от предшествующего члена на одно и тоже число d. Число d называют разностью арифметической прогрессии.

Отметим, что если $d>0$, то арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью, если $d<0$, то – убывающей последовательностью.

Если a_1 – первый член прогрессии, d – разность прогрессии, то справедливы следующие формулы:

$a_n=a_1+d(n-1)$ – формула n-го члена;

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$ и $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$ – формулы суммы n первых членов;

$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n+1})$ – свойство n-го члена.

15.2. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называют такую числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же число q. Число q называют знаменателем геометрической прогрессии.

Если b_1 – первый член прогрессии $(b_1\neq 0)$, q – знаменатель прогрессии $(q\neq 1)$, то справедливы следующие формулы:

$b_n=b_1q^{n-1}$ – формула n-го члена;

$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ – формула суммы n первых членов;

$b_n=\sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$ – свойство n-го члена.

Если $|q|<1$, то имеем бесконечную убывающую геометрическую прогрессию, сумму которой находят по формуле $S=\frac{b_1}{1-q}$.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все правильные варианты ответов (1–2):

1. Арифметической прогрессией является:

1) числовая последовательность, каждый следующий член которой отличается от предшествующего члена на одно и тоже число;

2) числовая последовательность, каждый следующий член которой больше предшествующего члена на 3;

3) числовая последовательность, каждый следующий член которой меньше предшествующего члена на одно и тоже число 5;

4) числовая последовательность, каждый следующий член которой отличается от предшествующего члена;

5) числовая последовательность, каждый следующий член которой больше предшествующего члена.

2. Геометрической прогрессией является:

1) числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на число 1;

2) числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, увеличенному на одно и то же число;

3) числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, уменьшенному на одно и то же число;

4) числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же число;

5) числовая последовательность, члены которой бесконечно убывают.

Установите соответствие (3–4):

3. Арифметическая прогрессия:

НАЗВАНИЕ	ФОРМУЛА
1) сумма n первых членов;	а) $S=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$;

2) n-ый член;

3) сумма пяти первых членов;

4) свойство пятого члена.

б) $a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$;

в) $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2}$;

г) $S_5 = \dfrac{5a_1 + 5a_n}{2}$;

д) $a_5 = \dfrac{a_4 + a_6}{2}$;

е) $a_n = a_1 + d(n-1)$.

4. Геометрическая прогрессия:

НАЗВАНИЕ

1) сумма n первых членов;

2) n-ый член;

3) сумма пяти первых членов;

4) свойство пятого члена;

5) сумма бесконечной убывающей прогрессии.

ФОРМУЛА

а) $b_n = b_1 q^{n-1}$;

б) $b_5 = \sqrt[5]{b_4 b_6}$;

в) $b_5 = \sqrt{b_4 b_6}$;

г) $S_5 = \dfrac{b_1(q^5 - 1)}{q-1}$;

д) $S = \dfrac{b_1}{1-q}$;

е) $S = \dfrac{b_1}{q-1}$;

ж) $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Вариант правильного ответа	1, 2, 3	4	1 – а, 2 – е, 3 – г, 4 – д	1 – ж, 2 – а, 3 – г, 4 – в, 5 – д

Примеры

Пример 1. Сумма семнадцати первых членов арифметической прогрессии равна 136. Найдите девятый член этой прогрессии.

Решение. Запишем сумму 17 первых членов прогрессии:

$$S_{17} = \frac{2a_1 + d(17-1)}{2} 17.$$

Так как $S_{17}=136$, то $136=\frac{2a_1+16d}{2}17$, откуда $136=(a_1+8d)\cdot 17$ и $a_1+8d=8$. Поскольку $a_9=a_1+8d$, то $a_9=8$.

Ответ: 8.

Пример 2. Арифметическая прогрессия содержит 25 членов. Первый член прогрессии равен 429, разность ее равна –22. Сколько членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма была равна 3069?

Решение. Запишем формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$. Согласно условию задачи $a_1=429, d=-22, S_n=3069$. Тогда число членов прогрессии найдем, решая уравнение $\frac{2\cdot 429-22(n-1)}{2}n=3069, (429-11n+11)n=3069,$ $11n^2-440n+3069=0, n^2-40n+279=0,$ откуда $n_1=9, n_2=31$. Поскольку прогрессия содержит 25 членов, то $n=9$.

Ответ: 9.

Пример 3. Двадцать пять чисел, первое из которых равно единице, а каждое следующее на 0,5 больше предыдущего, в порядке возрастания расположены в двух таблицах. Сумма чисел первой таблицы равна 7. Сколько чисел содержится во второй таблице?

Решение. Согласно условию задачи запишем: $a_1=1, d=0{,}5$. Если в первой таблице n чисел, то $S_n=7$. Подставляя значения $a_1=1, d=0{,}5$ и $S_n=7$ в формулу суммы n первых членов прогрессии $S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n$, получим: $\frac{2+0{,}5(n-1)}{2}n=7$, $\left(2+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right)n=14, (4+n-1)n=28, n^2+3n-28=0,$ откуда $n_1=-7, n_2=4$.

Поскольку $n_1=-7$ – посторонний корень уравнения, то $n=4$ и, следовательно, в первой таблице 4 числа. Так как имеется 25 чисел, то вторая таблица содержит 21 число.

Ответ: 21.

Пример 4. При делении тринадцатого члена арифметической прогрессии на третий член в частном получается 3, а при делении восемнадцатого члена на седьмой член в частном получается 2 и в остатке 8. Определите второй член прогрессии.

Решение. Согласно условию задачи запишем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{a_{13}}{a_3} = 3, \\ \dfrac{a_{18}}{a_7} = 2 + \dfrac{8}{a_7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{13} = 3a_3, \\ a_{18} = 2a_7 + 8. \end{cases}$

Применяя формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$, получим $a_3 = a_1 + 2d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_{13} = a_1 + 12d$ и $a_{18} = a_1 + 17d$.

Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} a_1 + 12d = 3(a_1 + 2d), \\ a_1 + 17d = 2(a_1 + 6d) + 8; \end{cases} \begin{cases} a_1 = 3d, \\ a_1 = 5d - 8; \end{cases} \begin{cases} a_1 = 3d, \\ 3d = 5d - 8; \end{cases} \begin{cases} a_1 = 12, \\ d = 4. \end{cases}$$

Найдем второй член прогрессии: $a_2 = a_1 + d = 12 + 4 = 16$.

Ответ: 16.

Пример 5. В арифметической прогрессии 10 членов. Сумма членов с четными номерами равна A, а сумма членов с нечетными номерами равна B. Чему равна разность этой прогрессии?

Решение. Рассмотрим члены прогрессии с четными номерами: $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}$. Согласно формуле $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$, получим $\dfrac{a_2 + a_{10}}{2} \cdot 5 = A$, $a_2 + a_{10} = 0{,}4A$. Зная, что $a_2 = a_1 + d$ и $a_{10} = a_1 + 9d$, запишем $2a_1 + 10d = 0{,}4A$, $a_1 + 5d = 0{,}2A$.

Рассмотрим члены прогрессии с нечетными номерами: a_1, a_3, a_5, a_7, a_9. Выполняя аналогичные действия, получим $\dfrac{a_1 + a_9}{2} \cdot 5 = B$, $a_1 + a_9 = 0{,}4B$, $2a_1 + 8d = 0{,}4B$, $a_1 + 4d = 0{,}2B$.

Вычитая из уравнения $a_1 + 5d = 0{,}2A$ уравнение $a_1 + 4d = 0{,}2B$, найдем разность прогрессии: $d = 0{,}2(A - B)$.

Ответ: $0{,}2(A - B)$.

Пример 6. Найдите сумму всех четных натуральных двузначных чисел, которые при делении на 13 дают в остатке 5.

Решение. Найдем наименьшее четное натуральное двузначное число, которое при делении на 13 дает в остатке 5: $13 + 5 = 18$.

Найдем наибольшее четное двузначное натуральное число, которое при делении на 13 дает в остатке 5. Для этого разделим 99 на 13. Поскольку $99 = 7 \cdot 13 + 8$, то $7 \cdot 13 + 5 = 96$.

Очевидно, что множество рассматриваемых чисел образует арифметическую прогрессию, у которой $a_1 = 18$, $d = 36$ и $a_n = 96$. Найдем число членов этой прогрессии. Согласно формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ получим $96 = 18 + 26 \cdot (n-1)$, откуда $26 \cdot (n-1) = 78$, $n - 1 = 3$ и $n = 4$.

В таком случае $S_4 = \frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4$, $S_4 = \frac{18+96}{2} \cdot 4 = 228$.

Ответ: 228.

Пример 7. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, члены которой поочередно меняют знак, если сумма первых шести членов равна 504 и $b_1 + b_4 = 24$.

Решение. Условию задачи соответствует система уравнений $\begin{cases} S_6 = 504, \\ b_1 + b_4 = 24. \end{cases}$ Применяя формулу суммы n первых членов и формулу n-го члена геометрической прогрессии, запишем:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1\left(1-q^6\right)}{1-q} = 504, \\ b_1 + b_1 q^3 = 24; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{b_1\left(1-q^3\right)\left(1+q^3\right)}{1-q} = 504, \\ b_1\left(1+q^3\right) = 24. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе и получим:

$$\frac{b_1\left(1-q^3\right)\left(1+q^3\right)}{(1-q)b_1\left(1+q^3\right)} = \frac{504}{24}, 1 + q + q^2 = 21, q^2 + q - 20 = 0,$$

откуда $q_1 = 4, q_2 = -5$.

Найдем первый член прогрессии, подставляя значения q в уравнение $b_1\left(1+q^3\right) = 24$:

если $q = 4$, то $b_1 = \frac{24}{65}$;

если $q = -5$, то $b_1 = -\frac{6}{31}$.

Так как согласно условию задачи члены заданной геометрической прогрессии поочередно меняют знак, то знаменатель прогрессии равен -5.

Ответ: -5.

Пример 8. Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии равна 16, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна 1536. Найдите четвертый член прогрессии.

Решение. Рассмотрим бесконечную убывающую геометрическую прогрессию с первым членом b_1 и знаменателем q:

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ b_1q^3, \ldots$$

Согласно формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ запишем:

$$\frac{b_1}{1-q} = 16,\ b_1 = 16\cdot(1-q).$$

Рассмотрим бесконечную убывающую геометрическую прогрессию $b_1^2,\ b_1^2q^2,\ b_1^2q^4,\ b_1^2q^6, \ldots$ с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2. Согласно формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ запишем:

$$\frac{b_1^2}{1-q^2} = 1536,\ b_1^2 = 1536\cdot\left(1-q^2\right).$$

Зная, что $b_1 = 16\cdot(1-q)$, получим:

$$16^2(1-q)^2 = 1536(1-q)(1+q),\ 1-q = 6(1+q),\ 7q = -5,\ q = -\frac{5}{7}.$$

Тогда $b_1 = 16\cdot\left(1+\dfrac{5}{7}\right) = 16\cdot\dfrac{12}{7} = \dfrac{192}{7}$.

Найдем четвертый член этой прогрессии по формуле $b_4 = b_1 \cdot q^3$. Получим $b_4 = \dfrac{192}{7}\cdot\left(-\dfrac{5}{7}\right)^3 = -\dfrac{24000}{2401}$.

Ответ: $-\dfrac{24\,000}{2\,401}$.

Пример 9. Найдите a^3, если $a = \sqrt{m\sqrt{n\sqrt{m\sqrt{n\sqrt{m\sqrt{n\ldots}}}}}}$.

Решение. Применяя последовательно формулы 2.9, 2.15, 2.3 (см. п. 2.2), получим: $a = m^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{1}{4}}\cdot m^{\frac{1}{8}}\cdot n^{\frac{1}{16}}\cdot m^{\frac{1}{32}}\cdot\ldots$,

$$a = \left(m^{\frac{1}{2}}\cdot m^{\frac{1}{8}}\cdot m^{\frac{1}{32}}\cdot\ldots\right)\cdot\left(n^{\frac{1}{4}}\cdot n^{\frac{1}{16}}\cdot n^{\frac{1}{64}}\cdot\ldots\right),\ a = m^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots}\cdot n^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots}.$$

Рассмотрим показатели степеней:

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots$ – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1=\frac{1}{2}$ и $q=\frac{1}{4}$. Тогда $S=\frac{b_1}{1-q}$, $S=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$;

2) $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$ – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1=\frac{1}{4}$ и $q=\frac{1}{4}$. Тогда $S=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$.

Найдем значение a: $a=m^{\frac{2}{3}}\cdot n^{\frac{1}{3}}$, откуда $a^3=m^2n$.

Заметим, что a^3 можно найти иначе. Возведем обе части исходного равенства дважды в квадрат:

$$a^2=\left(\sqrt{m\sqrt{n\sqrt{m\sqrt{n\sqrt{m\sqrt{n\ldots}}}}}}\right)^2,\ a^2=m\sqrt{n\sqrt{m\sqrt{n\sqrt{m\sqrt{n\ldots}}}}},$$

$$a^4=m^2n\sqrt{m\sqrt{n\sqrt{m\sqrt{n\sqrt{m\ldots}}}}}.$$

Учитывая, что $a=\sqrt{m\sqrt{n\sqrt{m\sqrt{n\sqrt{m\sqrt{n\ldots}}}}}}$, получим:

$$a^4=m^2na,\ \text{откуда}\ a^3=m^2n.$$

Ответ: $a^3=m^2n$.

Пример 10. Найдите сумму корней уравнения $x^{-1}+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=3{,}5$, если $|x|<1$.

Решение. Прибавляя к обеим частям уравнения число 1, запишем: $\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=\frac{9}{2}$.

Поскольку в левой части уравнения записана сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1=\frac{1}{x}$ и знаменателем $q=x$, то согласно формуле $S=\frac{b_1}{1-q}$ получим: $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{9}{2}$, $\frac{1}{x-x^2}=\frac{9}{2}$, $9x^2-9x+2=0$, откуда $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$.

Так как оба корня удовлетворяют условию $|x|<1$, то найдем их сумму: $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$.

Ответ: 1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Восьмой член арифметической прогрессии равен 2, а ее одиннадцатый член равен 11. Найдите сумму 15 первых членов этой прогрессии.

2. Сумма седьмого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 10, а сумма пятого и десятого членов равна 1. Сколько членов этой прогрессии необходимо сложить, чтобы в результате получить число 190?

3. Девятый член арифметической прогрессии в 4 раза больше шестого ее члена, а их сумма равна 20. Найдите сумму девяти первых членов этой прогрессии.

4. Первый член арифметической прогрессии равен 800, а каждый следующий ее член на 25 меньше предыдущего. Сколько членов прогрессии необходимо сложить, чтобы их сумма была равна 5700, если прогрессия содержит не более пятнадцати членов?

5. Внутренние углы выпуклого девятиугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 5°. Определите наименьший угол этого многоугольника.

6. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй член в частном получается 5, а при делении тринадцатого члена на шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найдите второй член этой прогрессии.

7. Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на ее четвертый член в частном получается 2, а в остатке 6. Найдите третий член прогрессии.

8. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите утроенную сумму 11 первых членов этой прогрессии.

9. Натуральные числа образуют арифметическую прогрессию. Произведения трех и четырех ее первых членов равны соответственно 6 и 24. Найдите среднее арифметическое четырех первых членов этой прогрессии.

10. Разность арифметической прогрессии равна 3. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 50, а сумма членов, стоящих на нечетных местах, равна 35. Определите, сколько членов содержит прогрессия.

11. Найдите сумму всех положительных четных двузначных чисел, которые при делении на 3 дают остаток 0.

12. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые делятся на 14.

13. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию, у которой сумма крайних членов равна -49, а сумма средних ее членов равна 14. Найдите знаменатель этой прогрессии.

14. Четыре числа образуют геометрическую прогрессию, у которой первый член больше второго на 35, а третий больше четвертого на 560. Найдите сумму этой прогрессии.

15. Геометрическая прогрессия содержит шесть членов. Первый и второй ее члены соответственно равны 3 и 12. Найдите последний член этой прогрессии.

16. Утроенная сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 27, а удвоенная сумма квадратов ее членов равна 81. Найдите второй член прогрессии.

17. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии, у которой первый член равен 6, а сумма трех ее первых членов равна $\frac{26}{3}$.

18. Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по 1, а к третьему прибавить 1, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найдите сумму с четвертого по десятый член арифметической прогрессии.

19. Найдите наибольшее произведение четырех чисел, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних -12.

Решите уравнения (20–22):

20. $12x+6x^2-6x^3+6x^4-6x^5+\ldots=7$, где $|x|<1$.

21. $1{,}5+3{,}5+5{,}5+\ldots+0{,}5x=68$.

22. $\frac{1}{3x}+\ldots+\frac{x-3}{3x}+\frac{x-2}{3x}+\frac{x-1}{3x}=1$, где $x\in\mathbf{N}$.

23. Найдите целое положительное n из уравнения

$$(6+12+18+\ldots+(6n-6))+(8+11+14+\ldots+(8+3n))=274.$$

24. Вычислите $1+3^2+5^2+\ldots+199^2-2^2-4^2-6^2-\ldots-200^2$.

25. Вычислите $(2+0{,}5)^2+(4+0{,}25)^2+\ldots+\left(2^5+0{,}5^5\right)^2$.

26. Найдите $1+2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-n}+\ldots$, если $n\in\mathbf{N}$.

Ответы: **1**. 30. **2**. 20. **3**. 0. **4**. 8. **5**. $120°$. **6**. 7. **7**. 14. **8**. 132. **9**. 2,5. **10**. 10. **11**. 810. **12**. 35392. **13**. –2 или –0,5. **14**. –357 или $-991\frac{2}{3}$. **15**. 3072. **16**. 2. **17**. 9. **18**. 105. **19**. 768. **20**. $x_1=\frac{1}{2};x_2=-\frac{7}{9}$. **21**. 31. **22**. $x=7$. **23**. 7. **24**. –20100. **25**. $10+\frac{(4^5-1)(4^6+1)}{3\cdot 4^5}$. **26**. 2.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Если сумма четвертого и шестого членов арифметической прогрессии равна 20, то ее пятый член равен	1) 18; 2) 15; 3) 10; 4) 14; 5) 5.
2	Если произведение десятого и двенадцатого положительных членов геометрической прогрессии равно 121, то ее одиннадцатый член равен	1) 21; 2) 11; 3) 60,5; 4) 36; 5) 41.
3	Если сумма n первых членов арифметической прогрессии выражается формулой $S_n=5n^2-4n$, то третий член этой прогрессии равен	1) 22; 2) 13; 3) 12; 4) 1; 5) 21.
4	Если сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии равна 2, а четвертый ее член равен 0,125, то знаменатель прогрессии равен	1) 0,5; 2) 0,25; 3) –0,3; 4) 0,125; 5) –0,01.
5	Если четыре числа составляют геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна 35, а сумма средних членов равна 30, то меньший член этой прогрессии равен	1) 12; 2) 18; 3) 7; 4) 8; 5) 5.

№	Задания	Варианты ответов
6	Если сумма с пятого по восьмой член арифметической прогрессии равна 48, а разность прогрессии равна 2, то ее первый член равен	1) 1; 2) 3; 3) 2; 4) 2,1; 5) −2.
7	Если сумма четырех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна −40, а сумма их квадратов равна 3280, то среднее арифметическое этих чисел равно	1) 10; 2) 25; 3) 30; 4) −10; 5) −40.
8	Если цифры трехзначного числа образуют геометрическую прогрессию, а цифры числа меньше данного на 400 – арифметическую, то сумма цифр этого числа равна	1) 12; 2) 13; 3) 10; 4) 9; 5) 15.
9	Если числа $5^{1+b}+5^{1-b}$, $0{,}5a$, $5^{2b}+5^{-2b}$ образуют арифметическую прогрессию, то наименьшее целое значение a равно	1) 12; 2) 10; 3) 11; 4) 14; 5) 13.
10	Если числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, а числа $a+b$, $b+c$, $a+c$ – арифметическую, то знаменатель геометрической прогрессии равен	1) 4; 2) 0,25; 3) 0,5; 4) −2; 5) 2.
11	Если суммы первых m и n членов арифметической прогрессии равны, то значение S_{m+n} равно	1) −1; 2) 2; 3) 0; 4) 38; 5) 100.
12	Если сумма четырех первых членов геометрической прогрессии равна 100, а сумма обратных к ним величин равна 10, то произведение этих членов прогрессии равно	1) 100; 2) 1000; 3) 900; 4) 20; 5) 250.
13	Найдите произведение корней (или корень, если он единственный) уравнения $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=7$	1) 15; 2) 0; 3) 7; 4) 35; 5) 14.

№	Задания	Варианты ответов
14	Значение суммы $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{7\cdot 8}$ равно	1) 7; 2) $\frac{9}{8}$; 3) $\frac{7}{8}$; 4) $\frac{8}{7}$; 5) $\frac{17}{15}$.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	3	2	5	1	4	1	4
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	2	1	4	3	1	1	3

16 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ

Преобразования и вычисления тригонометрических выражений выполняются с помощью формул 16.1–16.33 и формул приведения, учитывая свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций (см. п. 3.2).

Выполняя преобразования и вычисления тригонометрических выражений, необходимо помнить, что целое количество основных периодов тригонометрической функции можно вычитать из аргумента функции или прибавлять к ее аргументу:

$$\sin(\alpha \pm 2\pi n) = \sin\alpha,\ n \in \mathbf{Z};$$
$$\cos(\alpha \pm 2\pi n) = \cos\alpha;$$
$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \pi n) = \mathrm{tg}\alpha;$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha \pm \pi n) = \mathrm{ctg}\alpha.$$

16.1. Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \quad (16.1)$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad (16.2)$$

$$\mathrm{ctg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}; \quad (16.3)$$

$$\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, x = 1; \quad (16.4)$$

$$1 + \mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad (16.5)$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}. \quad (16.6)$$

16.2. Формулы сложения

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y; \quad (16.7)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y; \quad (16.8)$$

$$\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mp \mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y}. \quad (16.9)$$

16.3. Формулы двойного и тройного аргумента

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x\,; \tag{16.10}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x\,. \tag{16.11}$$

$$\sin 3x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)\,; \tag{16.12}$$

$$\cos 3x = \cos x(4\cos^2 x - 3)\,. \tag{16.13}$$

16.4. Формулы понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,; \quad (16.14) \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,. \quad (16.15)$$

16.5. Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,; \tag{16.16}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\,; \tag{16.17}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{16.18}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\,; \tag{16.19}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}\,; \tag{16.20}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}\,. \tag{16.21}$$

16.6. Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))\,; \tag{16.22}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))\,; \tag{16.23}$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))\,. \tag{16.24}$$

16.7. Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\qquad (16.25)\qquad\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\qquad (16.26)$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.\qquad (16.27)$$

16.8. Преобразование отрицательного аргумента

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; (16.28) $\arcsin(-\alpha)=-\arcsin\alpha$; (16.32)
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$; (16.29) $\arccos(-\alpha)=\pi-\arccos\alpha$; (16.33)
$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$; (16.30) $\operatorname{arctg}(-\alpha)=-\operatorname{arctg}\alpha$; (16.34)
$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$; (16.31) $\operatorname{arcctg}(-\alpha)=\pi-\operatorname{arcctg}\alpha$. (16.35)

16.9. Формулы приведения

Каждую тригонометрическую функцию некоторого аргумента можно записать как функцию острого угла α.

1. Если аргумент имеет вид $(\pi\pm\alpha)$, то:

а) ставим знак исходной функции;

б) функцию переписываем;

в) π отбрасываем, α переписываем.

2. Если аргумент имеет вид $\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ или $\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)$, то:

а) ставим знак исходной функции;

б) функцию меняем на кофункцию;

в) $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$ отбрасываем, α переписываем.

Рассмотрим координатную окружность радиуса $R=1$ с центром в точке O (рис. 16.1). Ординату y_α точки P_α, полученной при повороте точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на α радиан, называют синусом числа α. Абсциссу x_α точки P_α, полученной при повороте точки $P_0(1;\ 0)$ вокруг начала координат на α радиан, называют косинусом числа α:

$$y_\alpha=\sin\alpha,\ x_\alpha=\cos\alpha.$$

Для некоторых углов можно записать точные значения их тригонометрических величин (рис. 16.1).

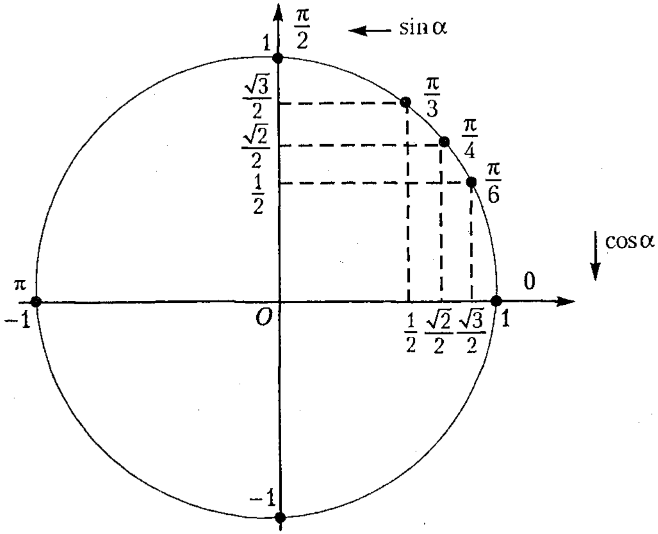


Рис. 16.1

Тест для проверки теоретических знаний

Установите соответствие (1–8):

1. Периодичность тригонометрических функций:

1) $\sin(17\pi+\alpha)$;

2) $\cos\left(\frac{17\pi}{6}+\alpha\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(\frac{17\pi}{6}+\alpha\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)$.

а) $\sin\alpha$;

б) $\sin(\pi+\alpha)$;

в) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)$;

г) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

д) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

е) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;

ж) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

2. Формулы приведения:

1) $\cos\frac{3\pi}{4}$;	а) $-\frac{1}{2}$;
2) $\sin 210°$;	б) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$;
3) $\operatorname{ctg} 135°$;	в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$.	г) $\frac{1}{2}$;
	д) $\sqrt{3}$;
	е) -1;
	ж) 1.

3. Тригонометрические тождества:

1) $2\sin^2 3°+2\cos^2 3°$;	а) 1;
2) $\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\beta$;	б) 2;
3) $\operatorname{tg}\alpha$;	в) 3;
4) $\operatorname{ctg}^2\alpha$.	г) $\sin\alpha\cos^{-1}\alpha$;
	д) $\sin^{-2}\alpha-1$;
	е) $\sin^{-1}\alpha\cos\alpha$;
	ж) $\cos^{-2}\alpha-1$.

4. Формулы сложения:

1) $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$;	а) $\sin(\alpha+\beta)$;
2) $\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$;	б) $\sin(\alpha-\beta)$;
3) $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;	в) $\cos(\alpha+\beta)$;
4) $\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta$.	г) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$;
	д) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$;
	е) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$;
	ж) $-\cos(\alpha+\beta)$.

5. Формулы кратных аргументов:

1) $\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3}$;	а) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;
2) $\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}$;	б) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$;
3) $\sin\alpha$;	в) $\sin\frac{\alpha}{3}$;
4) $\cos 2\alpha$;	г) $\frac{1}{2}\sin\frac{2\alpha}{3}$;
5) $\operatorname{tg}\alpha$.	д) $-\cos\alpha$;
	е) $\cos\alpha$;
	ж) $\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

6. Формулы преобразования суммы в произведение:

1) $\sin\alpha-\sin\beta$;	а) $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;
2) $\sin\alpha+\sin\beta$;	б) $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;
3) $\cos\alpha-\cos\beta$;	в) $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;
4) $\cos\alpha+\cos\beta$.	г) $2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;
	д) $2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$;
	е) $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.

7. Формулы преобразования произведения в сумму:

1) $\sin\alpha\sin\beta$;

2) $\cos\alpha\sin\beta$;

3) $\cos\alpha\cos\beta$.

а) $\dfrac{\cos(\beta-\alpha)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$;

б) $\dfrac{\cos(\beta-\alpha)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$;

в) $\dfrac{\sin(\beta-\alpha)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$;

г) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$;

д) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$.

8. Формулы понижения степени:

1) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$;

2) $2\sin^2 3\alpha$;

3) $\dfrac{1}{2}\cos^2 3\alpha$.

а) $\dfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)$;

б) $1+\cos 6\alpha$;

в) $1-\cos 6\alpha$;

г) $0{,}25(1+\cos 6\alpha)$;

д) $\dfrac{1}{2}(1+\cos 6\alpha)$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Вариант правильного ответа	1 – б; 2 – в; 3 – д; 4 – ж	1 – в; 2 – а; 3 – е; 4 – б	1 – б; 2 – а; 3 – г; 4 – д	1 – е; 2 – г; 3 – а; 4 – ж
Номер задания	5	6	7	8
Вариант правильного ответа	1 – г; 2 – д; 3 – а; 4 – б; 5 – ж	1 – а; 2 – б; 3 – д; 4 – г	1 – а; 2 – в; 3 – б	1 – а; 2 – в; 3 – г

Примеры

Пример 1. Преобразуйте в произведение сумму

$$\cos 2\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha .$$

Решение. Запишем выражение в виде:

$$A=(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)+(\cos 5\alpha-\cos 3\alpha).$$

Применяя формулу 16.19, получим:

$$A=-2\sin\frac{2\alpha+4\alpha}{2}\sin\frac{2\alpha-4\alpha}{2}-2\sin\frac{5\alpha-3\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha+3\alpha}{2}=$$
$$=-2\sin 3\alpha\sin(-\alpha)-2\sin\alpha\sin 4\alpha=2\sin 3\alpha\sin\alpha-2\sin\alpha\times$$
$$\times\sin 4\alpha=2\sin\alpha(\sin 3\alpha-\sin 4\alpha).$$

Применяя формулу 16.17, получим:

$$A=2\sin\alpha\cdot 2\sin\frac{3\alpha-4\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha+4\alpha}{2}=4\sin\alpha\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{7\alpha}{2}=$$
$$=-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2}.$$

Ответ: $-4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\frac{7\alpha}{2}$.

Пример 2. Упростите выражение

$$\frac{\operatorname{ctg}^{-1}2\alpha\cos^{-1}2\beta-\operatorname{ctg}^{-1}2\beta\cos^{-1}2\alpha}{\cos^{-1}2\alpha+\cos^{-1}2\beta}.$$

Решение. Применим формулы 16.2, 2.8 и получим:

$$\frac{\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha\cos 2\beta}-\dfrac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta\cos 2\alpha}}{\dfrac{1}{\cos 2\alpha}+\dfrac{1}{\cos 2\beta}}=\frac{\dfrac{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}{\cos 2\alpha\cos 2\beta}}{\dfrac{\cos 2\beta+\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha\cos 2\beta}}=$$
$$=\frac{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}{\cos 2\alpha\cos 2\beta}\cdot\frac{\cos 2\alpha\cos 2\beta}{\cos 2\beta+\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha-\sin 2\beta}{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}.$$

Применим формулы 16.17, 16.19:

$$\frac{2\sin\dfrac{2\alpha-2\beta}{2}\cos\dfrac{2\alpha+2\beta}{2}}{2\cos\dfrac{2\alpha+2\beta}{2}\cos\dfrac{2\alpha-2\beta}{2}}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta).$$

Ответ: $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

Пример 3. Докажите тождество

$$\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{4}\cos\alpha\left(4-\sin^2\alpha\right).$$

Решение. Выполним преобразования левой части тождества, применяя формулу разности кубов и формулу 16.11:

$$\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin^4\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}+\right.$$

$$\left.+\cos^4\frac{\alpha}{2}\right)=-\cos\alpha\left(\sin^4\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^4\frac{\alpha}{2}\right)=A\,.$$

Преобразуем выражение, стоящее в скобке. Выделив квадрат двучлена и применяя формулы 16.1 и 16.10, получим:

$$\sin^4\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}\sin^2\alpha.$$

Тогда $A=-\cos\alpha\dfrac{4-\sin^2\alpha}{4}=-\dfrac{1}{4}\cos\alpha\left(4-\sin^2\alpha\right)$.

Ответ: Тождество доказано.

Пример 4. Докажите тождество

$$\frac{0{,}5\cos(2\alpha-3\pi)}{\sin^2\left(\alpha+\frac{5\pi}{4}\right)}=\operatorname{ctg}^{-1}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)$$

Решение. 1. Выполним преобразования левой части тождества, последовательно применяя формулы 16.15, 16.11, 16.10, формулы приведения, формулы сокращенного умножения и вычитая из аргументов функций синус и косинус их основные периоды:

$$\frac{\cos(3\pi-2\alpha)}{2\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{\cos(\pi-2\alpha)}{2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\cos 2\cdot\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)\right)}=-\frac{\cos 2\alpha}{1-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)}=$$

$$=\frac{-\cos 2\alpha}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}=\frac{-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{-(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}.$$

2. Выполним преобразования правой части тождества. Вычитая из аргумента функции тангенс, ее основной период. и применяя формулы 16.2, 16.7 и 16.8, получим:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sin\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

Ответ: тождество доказано.

Пример 5. Упростите выражение

$$\frac{\cos^2\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\left(1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\alpha}{4}-\frac{3\pi}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{15\pi}{2}\right)-\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\alpha}{4}-\frac{17\pi}{2}\right)}.$$

Решение. Выполним преобразования данного выражения, вычитая из аргументов тригонометрических функций их основные периоды, применяя формулы приведения и формулы 16.6. 16.17, 16.16, 16.10. Получим:

$$\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\left(1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{3\alpha}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)-\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\alpha}{4}\right)}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\left(1+\mathrm{ctg}^2\left(\frac{3\alpha}{4}\right)\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{4}-\mathrm{ctg}^2\frac{3\alpha}{4}+1-1}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}-\frac{1}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}}}{\dfrac{\sin^2\frac{3\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{3\alpha}{4}}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}}\cdot\frac{\sin^2\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{3\alpha}{4}}{\sin^2\frac{3\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\left(\sin\frac{3\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\frac{3\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{4}}{4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}}{4\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}}{8\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}}=\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\frac{1}{8}$.

Пример 6. Преобразуйте в произведение $1-3\operatorname{ctg}^{-2}(\alpha+270°)$.

Решение. Применяя формулы 2.8, 16.4, формулу приведения, формулу 16.3 и формулу разности квадратов, получим:

$$1-\frac{3}{\operatorname{ctg}^2(\alpha+270°)}=1-3\operatorname{tg}^2(\alpha+270°)=$$

$$=1-3\operatorname{ctg}^2\alpha=1-\frac{3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\left(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha\right)\left(\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha}.$$

Введем вспомогательный аргумент α, предварительно умножив числитель и знаменатель дроби на $\frac{1}{4}$:

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha\right)\frac{1}{2}\left(\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha\right)}{\frac{1}{4}\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{4\left(\frac{1}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)\left(\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\right)}{\sin^2\alpha}=A.$$

Так как $\cos 60°=\frac{1}{2}$, а $\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

то $A=\frac{4\sin(\alpha-60°)\sin(\alpha+60°)}{\sin^2\alpha}$.

Ответ: $\frac{4\sin(\alpha-60°)\sin(\alpha+60°)}{\sin^2\alpha}$.

Пример 7. Докажите справедливость равенства

$$\frac{\cos 28°\cos 56°}{\sin 178°}+\frac{\cos 2°\cos 4°}{\sin 152°}=\frac{\sqrt{3}\sin 38°}{4\sin 2°\sin 28°}.$$

Решение. Выполним преобразования левой части равенства. Применяя формулы приведения и формулы 16.10, 16.16, получим:

$$\frac{\cos 28^\circ \cos 56^\circ}{\sin 2^\circ}+\frac{\cos 2^\circ \cos 4^\circ}{\sin 28^\circ}=\frac{2\sin 28^\circ \cos 28^\circ \cos 56^\circ}{2\sin 2^\circ \sin 28^\circ}+$$

$$+\frac{2\sin 2^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ}{2\sin 2^\circ \sin 28^\circ}=\frac{2\sin 56^\circ \cos 56^\circ+2\sin 4^\circ \cos 4^\circ}{4\sin 2^\circ \sin 28^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 112^\circ+\sin 8^\circ}{4\sin 2^\circ \sin 28^\circ}=\frac{2\sin 60^\circ \cos 52^\circ}{4\sin 2^\circ \sin 28^\circ}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}\cos(90^\circ-38^\circ)}{4\sin 2^\circ \sin 28^\circ}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin 38^\circ}{4\sin 2^\circ \sin 28^\circ}.$$

Ответ: Равенство справедливо.

Пример 8. Вычислите $\cos\left(2\alpha+\frac{15\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$.

Решение. Вычтем из аргумента функции косинус ее два основных периода и применим формулу 16.8. Получим:

$$A=\cos\left(2\alpha+\frac{15\pi}{4}-4\pi\right)=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}+$$

$$+\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\cos 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha+\sin 2\alpha).$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ и $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$, то $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2}$. Согласно формулам $\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ и $\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ найдем значения:

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\frac{9}{4}}{1+\frac{9}{4}}=\frac{-\frac{5}{4}}{\frac{13}{4}}=-\frac{5}{13} \text{ и } \sin 2\alpha=\frac{3}{\frac{13}{4}}=\frac{12}{13}.$$

Тогда $A=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

Ответ: $\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

Пример 9. Вычислите $1+5\sin 2\alpha-\frac{3}{\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{1}{2}$.

Решение. Применяя формулы 16.25 и 16.26, найдем $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, зная, что $\operatorname{tg}\alpha=-2$. Тогда $\sin 2\alpha=\frac{2\cdot(-2)}{1+(-2)^2}=-\frac{4}{5}$,

$\cos 2\alpha = \frac{1-(-2)^2}{1+(-2)^2} = -\frac{3}{5}$. Подставляя значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ в выражение $1+5\sin 2\alpha - \frac{3}{\cos 2\alpha}$, получим $1+5\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)+3\cdot\frac{5}{3}=1-4+5=2$.

Ответ: 2.

Пример 10. Найдите $\beta-\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha=4$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{5}{3}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Решение. Если $\operatorname{ctg}\alpha=4$, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{5}{3}$, то $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{5}$.

Найдем: $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\frac{3}{5}-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{7}{23}$, откуда

$\beta-\alpha=\operatorname{arctg}\frac{7}{23}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. Так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, то при $n=0$ получим $\beta-\alpha=\operatorname{arctg}\frac{7}{23}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{7}{23}$.

Пример 11. Найдите $\operatorname{ctg}^{-1}\alpha+\operatorname{tg}^{-1}\alpha$, если $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=7$ и $\alpha\in(270°;\ 360°)$.

Решение. Запишем $\operatorname{ctg}^{-1}\alpha+\operatorname{tg}^{-1}\alpha=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$.

Пусть $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=x$. Возводя обе части равенства в квадрат, получим: $\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=x^2$. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1$, а $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha=7$, запишем $x^2=7+2$, $x^2=9$, откуда $x=\pm3$. Поскольку $\alpha\in(270°;\ 360°)$, то $\operatorname{tg}\alpha<0$ и $\operatorname{ctg}\alpha<0$. Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha<0$ и $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=-3$.

Ответ: -3.

Пример 12. Найдите $\cos^{-2}\alpha$, если $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=1$.

Решение. Применяя формулы тройного аргумента, запишем: $\frac{\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3)}{\cos\alpha}=1$. Сократив дроби и приведя подобные слагаемые, получим: $3-4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha-3=1$, $4\cos^2\alpha-4(1-\cos^2\alpha)=1$, $8\cos^2\alpha=5$, $\cos^2\alpha=\frac{5}{8}$, $\cos^{-2}\alpha=\frac{8}{5}$.

Ответ: 1,6.

Пример 13. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Преобразуем отрицательный аргумент функции арккосинус и введем подстановку. Запишем:

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\pi-\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\left|\begin{matrix}\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}=\alpha,\\ \cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{matrix}\right|=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Найдем $\operatorname{ctg}\alpha$, зная, что $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Так как $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, то $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\left(\frac{5}{2\sqrt{5}}\right)^2$, откуда $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{5}{4}-1$, $\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=2$.

Ответ: 2.

Пример 14. Найдите значение выражения $\arccos(\cos 940°)$.

Решение. Учитывая основной период функции $y=\cos x$ и область определения функции $y=\arccos x$, получим:

$$\arccos(\cos(940°-1080°))=\arccos(\cos(-140°))=$$
$$=\arccos(\cos 140°)=140°.$$

Ответ: 140°.

Задачи для самостоятельного решения

Докажите тождества (1–27):

1. $(1+\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)(1-\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha)=2\operatorname{tg}2\alpha$.

2. $\sin 9\alpha+\sin 10\alpha+\sin 11\alpha+\sin 12\alpha=\sin\frac{21\alpha}{2}\left(8\cos^3\frac{\alpha}{2}-4\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. $\sin 4\alpha-\sin 5\alpha-\sin 6\alpha+\sin 7\alpha=-8\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{11\alpha}{2}$.

4. $\cos\alpha+\sin\alpha+\cos3\alpha+\sin3\alpha=2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(2\alpha+\frac{17\pi}{4}\right)$.

5. $\frac{\operatorname{tg}2\beta+\operatorname{ctg}3\alpha}{\operatorname{ctg}2\beta+\operatorname{tg}3\alpha}=\operatorname{tg}2\beta\cdot\operatorname{ctg}3\alpha$.

6. $\operatorname{tg}^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}^{-1}\alpha+\operatorname{tg}^{-1}3\alpha+\operatorname{ctg}^{-1}3\alpha=\frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin6\alpha}$.

7. $\frac{\sin2\alpha-\sin3\alpha+\sin4\alpha}{\cos2\alpha-\cos3\alpha+\cos4\alpha}=\operatorname{ctg}^{-1}3\alpha$.

8. $\sin^{-1}\alpha+\operatorname{tg}^{-1}\alpha=\operatorname{tg}^{-1}\frac{\alpha}{2}$.

9. $(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2=4\sin^2\frac{\beta-\alpha}{2}$.

10. $\frac{\left(\operatorname{tg}\alpha+\cos^{-1}\alpha\right)\left(\cos\alpha-\operatorname{tg}^{-1}\alpha\right)}{\left(\cos\alpha+\operatorname{tg}^{-1}\alpha\right)\left(\operatorname{tg}\alpha-\cos^{-1}\alpha\right)}=1$.

11. $(\cos\alpha-\cos\beta)^2-(\sin\alpha-\sin\beta)^2=2\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta)-1)$.

12. $\cos4\alpha-\sin4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha=-1$.

13. $\frac{1-\cos4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\frac{1+\cos4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}=2$.

14. $\frac{\operatorname{ctg}^2 2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}2\alpha}-\cos8\alpha\operatorname{ctg}4\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)-1$.

15. $\frac{\cos4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin2\alpha}{\cos^{-1}2\alpha}$.

16. $\left(\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^2=\sin^{-1}\alpha\cos^{-1}\alpha$.

17. $\sin7\alpha-2\sin\alpha(\cos2\alpha+\cos4\alpha+\cos6\alpha)=\sin\alpha$.

18. $\cos^4 x-\cos^2 y+0{,}25\sin^2 2x=\sin(x+y)\sin(y-x)$.

19. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$.

20. $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=2$.

21. $\left(\cos^{-1}2\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)$.

22. $2\sin^2(13\pi-2\alpha)\cos^2(15\pi+2\alpha)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin\left(\frac{9\pi}{2}-8\alpha\right)$.

23. $$\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2}-6\alpha\right)+\sin(5\pi+4\alpha)+\sin(33\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2}+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-20\pi)+\cos(\alpha+20\pi)}=\operatorname{tg}\alpha.$$

24. $$\frac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{ctg}(720^\circ-\alpha)}=\frac{\operatorname{tg}(360^\circ+\alpha)+1}{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)-1}.$$

25. $$\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{17\pi}{8}-2\alpha\right)=\frac{1-2\cos^2 2\alpha}{\sqrt{2}}.$$

26. $$\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)=\frac{\sin\alpha}{2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

27. $$\sin^2 2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha\right)=0{,}25.$$

Упростите выражения (28–47):

28. $2(\sin^2 6\alpha+\cos^2 6\alpha)-3(\sin^2 4\alpha+\cos^2 4\alpha)+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha.$

29. $$\frac{\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha}{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}.$$

30. $$\operatorname{ctg}(2{,}4\pi)-\frac{\cos(11{,}1\pi)}{1-\cos(4{,}6\pi)}.$$

31. $$\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(\alpha-2\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2(\alpha-\pi).$$

32. $$1+\sin\left(31\pi-\frac{\alpha}{2}\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

33. $$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos(2\alpha-2\pi)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)}+\cos^2\alpha.$$

34. $$\frac{\sin\left(4\pi+\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}-\cos\left(4\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos\left(5\pi-\frac{\alpha}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{8}+\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)}.$$

35. $$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{13\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

36. $$\frac{\cos^{-1}2x+\sin 2x\operatorname{tg}2x}{2\cos^2 2x}+\frac{1}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}.$$

37. $\cos^2(\alpha+2\beta+2\pi)+\sin^2(\alpha-2\beta-2\pi).$

38. $$\frac{(1-\cos 2\alpha)\cos(405^\circ+2\alpha)}{2\sin^2 2\alpha-\sin 4\alpha}.$$

39. $\operatorname{ctg}\left(405^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{ctg}\left(315^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

40. $\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha}$.

41. $\frac{\cos6\alpha-\cos7\alpha}{\sin7\alpha-\sin6\alpha}$.

42. $1-\sin\left(2\alpha+\frac{7\pi}{2}\right)$.

43. $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{tg}^3\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^3\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}$.

44. $\frac{\cos^2(\alpha-630^\circ)}{\sin^{-2}(\alpha+450^\circ)-1}+\frac{\sin^2(\alpha+630^\circ)}{\cos^{-2}(\alpha-450^\circ)-1}$.

45. $\frac{\sin6\alpha}{\sin2\alpha}+\frac{\cos(6\alpha-3\pi)}{1-2\sin^2\alpha}$.

46. $\frac{\sin(\alpha-4\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\pi-\alpha}{4}\left(2\sin\frac{\pi-\alpha}{2}+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)}$.

47. $\frac{1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha}{2\cos^2\alpha-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Преобразуйте в произведение (48–61):

48. $\sin4\alpha-2\cos^2 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

49. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha$.

50. $2^{-4}\cos^{-4}\alpha-2^{-4}\sin^{-4}\alpha$.

51. $\frac{(\operatorname{tg}^4\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha)^{\frac{1}{2}}}{(\operatorname{ctg}^4\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha)^{\frac{1}{2}}}$.

52. $1-3\operatorname{tg}^2(\alpha-900^\circ)$.

53. $\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$.

54. $3\sin^2(\alpha-270^\circ)-\cos^2(\alpha+270^\circ)$.

55. $\sin^2\left(\beta-\frac{13\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{7\pi}{2}\right)$.

56. $3-4\cos^2\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)$.

57. $1+\cos(2\alpha+630°)+\sin(2\alpha-990°)$.

58. $\cos 5\alpha\cos 4\alpha+\cos 4\alpha\cos 3\alpha-2\cos^2 2\alpha\cos\alpha$.

59. $\dfrac{\sin 13\alpha+\sin 14\alpha+\sin 15\alpha+\sin 16\alpha}{\cos 13\alpha+\cos 14\alpha+\cos 15\alpha+\cos 16\alpha}$.

60. $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

61. $2\sin^2\alpha+\sin 2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha$.

Докажите справедливость равенств (62–64):

62. $\cos^{-1}34°+\operatorname{ctg}56°=\operatorname{ctg}388°$.

63. $(\sin 160°+\sin 40°)(\sin 140°+\sin 20°)+$

$+(\sin 50°-\sin 70°)(\sin 130°-\sin 110°)=1$.

64. $\cos^{-1}160°+4\sin 50°=2$.

Вычислите (65–72):

65. $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}+\cos^2\pi$.

66. $\operatorname{tg}435°+\operatorname{tg}375°+\operatorname{tg}180°$.

67. $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{12}-\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}-\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$.

68. $\sin\left(2\alpha-\frac{11\pi}{4}\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}$.

69. $\dfrac{2\sin 2\alpha+1}{\sin 2\alpha}-13\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-5$.

70. $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\operatorname{ctg}\left(\frac{17\pi}{2}+2\alpha\right)=\frac{11}{9}$.

71. $\sin^{-1}(\alpha+\beta)\sin^{-1}(\beta-\alpha)$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{3},\ \cos\beta=-\frac{1}{2}$.

72. $\cos 20°\cos 40°\cos 80°$.

73. Найдите $\sin^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$ и $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

74. Найдите $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m^{-1}$.

75. Найдите $\operatorname{tg}\left(\frac{33\pi}{2}-2\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\alpha>\frac{\pi}{2}$.

76. Найдите $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$, если $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{q}{p}$.

77. Найдите число $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, если $\operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{5}{12}$.

78. Найдите $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{1}{2}(1+2\cos\alpha)$.

79. Найдите $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$, если $\operatorname{tg}^{-1}\alpha + \operatorname{ctg}^{-1}\alpha = 3$.

80. Найдите $\alpha+\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = 7$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

81. Вычислите $\left(1+\operatorname{tg}^{-1}\alpha\right)\left(1+\operatorname{tg}^{-1}\beta\right)$, если $\alpha+\beta = \frac{3\pi}{4}$.

Вычислите (82–93):

82. $\cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right)$.

83. $\sin^{-3}\left(\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{8}\right)\right)$.

84. $\sin^{-1}\left(3\arcsin 1 + \arcsin\frac{4}{5}\right)$.

85. $\cos\left(300\pi + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$.

86. $\sin\left(6\pi - 200\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

87. $\sin(\operatorname{arctg}\sqrt{3} - \arcsin 0{,}5 - \arccos(-0{,}5\sqrt{3}))$.

88. $\sin(\arcsin 0{,}6 + \arccos 0{,}(3))$.

89. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 2 + \operatorname{arcctg} 3 + \pi)$.

90. $\operatorname{tg}\left(34\pi + 2\cdot\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

91. $\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$.

92. $\arcsin(\sin 1210^\circ)$.

93. $\arcsin(\cos 850^\circ)$.

Ответы: **28.** 0. **29.** $\operatorname{ctg}\alpha$. **30.** $\frac{1}{\cos(0{,}1\pi)}$. **31.** $\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.
32. $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$. **33.** $-\sin^2\alpha$. **34.** $-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}$. **35.** $\frac{1}{4}\sin\frac{3\alpha}{2}$.
36. $\frac{1}{\cos^3 2x}$. **37.** $1-\sin 2\alpha \sin 4\beta$. **38.** $-\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **39.** $2\operatorname{tg}\alpha$.
40. $\frac{1}{4\sin^2\alpha}$. **41.** $\operatorname{tg}\frac{13\alpha}{2}$. **42.** $\frac{1}{2\cos^2\alpha}$. **43.** $\operatorname{ctg}^4\alpha$. **44.** 1. **45.** 2.

46. $2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. **47.** $2\cos\alpha$. **48.** $\sqrt{2}\sin(4\alpha-45^\circ)$. **49.** $\dfrac{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\alpha}$.

50. $-\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^4 2\alpha}$. **51.** $\mathrm{tg}^4\alpha$. **52.** $\dfrac{4\sin(30^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos^2\alpha}$. **53.** $\dfrac{4\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$.

54. $4\cos(30^\circ+\alpha)\cos(30^\circ-\alpha)$. **55.** $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

56. $4\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$. **57.** $2\sqrt{2}\cos\alpha\cos(45^\circ-\alpha)$.

58. $-2\cos\alpha\sin 2\alpha\sin 6\alpha$. **59.** $\mathrm{tg}\frac{29\alpha}{2}$. **60.** $2\sqrt{\mathrm{tg}\,\alpha}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

61. $\dfrac{2\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{\cos 2\alpha}$. **65.** 3. **66.** 4. **67.** $2\sqrt{3}$. **68.** $-\frac{17\sqrt{2}}{26}$. **69.** $\frac{57}{5}$.

70. $-\frac{22}{9}$. **71.** $\frac{36}{23}$. **72.** 0,125. **73.** 0,8. **74.** $\frac{m-1}{m+1}$. **75.** $-\frac{7}{24}$. **76.** $\frac{p-q}{p+q}$.

77. $\pi-\mathrm{arctg}\frac{2}{3}$. **78.** $\frac{23}{32}$. **79.** 18. **80.** $\frac{3\pi}{4}$. **81.** 2. **82.** $\frac{5}{9}$. **83.** 27. **84.** $-\frac{5}{3}$.

85. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **86.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **87.** $-0{,}5\sqrt{3}$. **88.** $\frac{3+8\sqrt{2}}{15}$. **89.** 1. **90.** $-4\sqrt{5}$.

91. $\frac{\sqrt{17}}{17}$. **92.** 50°. **93.** -40°.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=-\frac{3}{4}$	1) 1; 2) 7; 3) 3; 4) $\sqrt{3}$; 5) $3\sqrt{3}$.
2	Если $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{3}{4}$ и $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, то значение выражения $\dfrac{25\cos\alpha}{\sin^{-2}\alpha}$ равно	1) 7,2; 2) 36; 3) 3,6; 4) 50; 5) 125.
3	Результат вычисления выражения $\sin 855^\circ-\sin 1155^\circ+\sin 1095^\circ$ равен	1) 0; 2) −1; 3) 0,5; 4) 1; 5) 14.

№	Задания	Варианты ответов
4	Результат вычисления выражения $\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 15^\circ}+\frac{4}{\operatorname{ctg} 60^\circ}$ равен	1) 12; 2) 3,2; 3) 7; 4) 1; 5) 4.
5	Значение выражения $\cos 20^\circ - \frac{\sin 20^\circ}{\operatorname{tg} 10^\circ}$ равно	1) 1,5; 2) 17; 3) 1; 4) 0; 5) −1.
6	Если $\sin\left(4\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, то значение выражения $16\sin^4\left(2\alpha-\frac{11\pi}{2}\right)$ равно	1) 0; 2) 2,25; 3) 1; 4) 0,5; 5) 1,75.
7	Значение выражения $\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\sin(45^\circ-\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}\right)^{-6}$ равно	1) 8; 2) 1; 3) 2; 4) 0,125; 5) 27.
8	Если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ – корни уравнения $6x^2+5x+1=0$, то сумма чисел α и β равна	1) $-\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.
9	Если $\sin 18^\circ=0{,}25\left(\sqrt{5}-1\right)$, то значение выражения $\sin^{-1}54^\circ$ равно	1) $\sqrt{5}-1$; 2) $25\sqrt{5}$; 3) $5\left(\sqrt{5}+1\right)$; 4) $\sqrt{5}+1$; 5) $0{,}25\left(\sqrt{5}+1\right)$.
10	Если $x=b\cos\beta$, $y=b\cos\alpha\sin\beta$, $z=b\sin\alpha\sin\beta$, то значение выражения $x^2+y^2+z^2$ равно	1) b; 2) $3b$; 3) b^2; 4) $b\sin(\alpha+\beta)$; 5) $b^2\cos(\alpha-\beta)$.

№	Задания	Варианты ответов
11	Если $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$, то количество целых значений a, при которых выполняется равенство $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2a^2+2a}{a^2-6a+9}$, равно	1) 3; 2) 9; 3) 8; 4) 15; 5) 11.
12	Если функция $y=(a-b)\sin^2 x+0{,}5(a+b)\cos^2 x$ тождественно равна 2 для всех значений x, то сумма a и b равна	1) −6; 2) 10; 3) 5; 4) 4; 5) 0.
13	Если $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, то неравенство $\sin\alpha \ge \sin 2\alpha$ выполняется при условии, что	1) $\alpha=0$; 2) $\alpha=\frac{\pi}{3}$; 3) $\alpha=0, \alpha\in\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$; 5) $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\alpha=0$.
14	Если $f(n)=\arcsin\sin n$, то значение выражения $f(1)+f(2)$ равно	1) 3; 2) π; 3) $\pi-1$; 4) $\pi+1$; 5) $\pi+3$.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	2	1	1	3	5	2	4
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	5	1	3	5	4	3	3

17 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Тригонометрическими называют уравнения, содержащие переменную под знаками тригонометрических функций. Общий метод решения тригонометрических уравнений состоит в сведении их с помощью преобразований к одному или нескольким простейшим.

17.1. Простейшие тригонометрические уравнения

К простейшим тригонометрическим уравнениям относят уравнения вида:

$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ \operatorname{tg} x = a,\ \operatorname{ctg} x = a.$$

Рассмотрим их решения.

1. Если уравнение имеет вид $\sin x = a$ и $|a| \le 1$, то

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ \text{где}\ k \in \mathbf{Z}.$$

Частные случаи:

а) если $\sin x = 0$, то $x = 0 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

б) если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$;

в) если $\sin x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

2. Если уравнение имеет вид $\cos x = a$ и $|a| \le 1$, то

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ \text{где}\ n \in \mathbf{Z}.$$

Частные случаи:

а) если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

б) если $\cos x = 1$, то $x = 0 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

в) если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. Если уравнение имеет вид $\operatorname{tg} x = a$ и $a \in \mathbf{R}$, то

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ \text{где}\ n \in \mathbf{Z}.$$

4. Если уравнение имеет вид $\operatorname{ctg} x = a$ и $a \in \mathbf{R}$, то

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ \text{где}\ n \in \mathbf{Z}.$$

Рассмотрим некоторые способы сведения тригонометрических уравнений к простейшим.

17.2. Однородные уравнения относительно sin x и cos x

1. Однородным уравнением первой степени называют уравнение вида $a\sin x + b\cos x = 0$.

Разделив обе части этого уравнения на $\cos x \neq 0$, получим:

$$\frac{a\sin x}{\cos x} + \frac{b\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}, \quad a\operatorname{tg} x + b = 0,$$

откуда $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$; $x = -\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. Однородным уравнением второй степени называют уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$.

Разделив обе части этого уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, получим:

$$\frac{a\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{c\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}, \quad a\operatorname{tg}^2 x + b\operatorname{tg} x + c = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, получим два простейших уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$.

17.3. Решение уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$

Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = c$ можно решить, введя вспомогательный аргумент или применив универсальную тригонометрическую подстановку.

1. Метод введения вспомогательного аргумента.

Разделим обе части уравнения $a\sin x + b\cos x = c$ на число $\sqrt{a^2+b^2}$. Получим $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Применим подстановку: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$ и найдем значение вспомогательного аргумента α. Возможны два варианта: $\alpha = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\alpha = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{или} \quad \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Решим полученное простейшее уравнение при условии, что $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \le 1$, и найдем значение x:

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \alpha + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Рассмотрим *частные случаи.*

Если $a = b = 1$, то уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ примет вид:

$$\sin x + \cos x = c.$$

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{2}$ и получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

Учитывая, что $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, запишем:

$$\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

или $\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos x = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Согласно формулам 16.7 и 16.8, получим: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{c}{\sqrt{2}}$ или $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{c}{\sqrt{2}}$. Решая простейшие тригонометрические уравнения, при условии, что $\left|\frac{c}{\sqrt{2}}\right| \le 1$, найдем значения переменной x.

Если $a = 1,\ b = \sqrt{3}$, то уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ примет вид $\sin x + \sqrt{3}\cos x = c$. Разделим обе части этого уравнения на 2 и получим: $\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{c}{2}$. Учитывая, что $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, а $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, а $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ запишем $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin x + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\cos x = \frac{c}{2}$ или $\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x = \frac{c}{2}$. Согласно формулам 16.8 и 16.7 получим: $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{c}{2}$ или $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{c}{2}$. Решая любое из простейших уравнений, при условии, что $\left|\frac{c}{2}\right| \le 1$, найдем все значения переменной x.

Если $a = \sqrt{3},\ b = 1$, то уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ примет вид $\sqrt{3}\sin x + \cos x = c$. Выполняя аналогичные преобразования, получим: $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{c}{2}$ или $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{c}{2}$.

2. Применение универсальной тригонометрической подстановки:

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},\ \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

В результате подстановки уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ примет вид $a\cdot\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} + b\cdot\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = c$. Получили квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$, решив которое найдем корни исходного уравнения.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все варианты правильных ответов (1–3):

1. Уравнение $\sin x = a$ имеет решение при условии, что:

1) $a \le 1$;
2) $a \ge -1$;
3) $-1 \le a \le 1$;
4) $a \in \mathbf{R}$;
5) $a > 0$.

2. Уравнение $\cos x = a$ имеет решение при условии, что:

1) $a = \pi$;
2) $a = \pi^{-1}$;
3) $a = \mathrm{tg}\,30°$;
4) $\sin\pi$;
5) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Уравнения $\mathrm{tg}\,x = a$ и $\mathrm{ctg}\,x = a$ имеют решения при условии, что:

1) $a = 1{,}5$;
2) $a = \sqrt{1+3\sqrt{5}}$;
3) $a = 0$;
4) $a = \pi$;
5) $a = \frac{\pi}{2}$.

Установите соответствие (4–6):

4. Решение простейших тригонометрических уравнений ($n \in \mathbf{Z}$)

УРАВНЕНИЕ	РЕШЕНИЕ
1) $\sin 2x = a$;	а) $x = (-1)^n \cdot \frac{1}{2} \arcsin a + \frac{\pi n}{2}$;
2) $\cos \frac{x}{2} = a$;	б) $x = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n$;
3) $\operatorname{tg}(b + x) = a$;	в) $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$;
4) $\sin x = -a$;	г) $x = \pm 2 \arccos a + 4\pi n$;
5) $\cos x = -a$.	д) $x = \operatorname{arctg} a - b + \pi n$;
	е) $x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi n$;
	ж) $x = b + \operatorname{arcctg} a + \pi n$.

5. Решение простейших тригонометрических уравнений ($k \in \mathbf{Z}$):

УРАВНЕНИЕ	РЕШЕНИЕ
1) $\sin 5x = 0$;	а) $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}$;
2) $\cos 7x = 0$;	б) $x = -\frac{3\pi}{4} + 3\pi k$;
3) $\sin \frac{x}{6} = 1$;	в) $x = \pi + 7 + 2\pi k$;
4) $\cos 7x = 1$;	г) $x = 7\pi + 14\pi k$;
5) $\sin \frac{2x}{3} = -1$;	д) $x = \frac{2\pi k}{7}$;
6) $\cos(7 - x) = -1$.	е) $x = 3\pi + 12\pi k$;
	ж) $x = \frac{\pi k}{5}$;
	з) $x = 5\pi k$.

6. Введение вспомогательного аргумента:

УРАВНЕНИЕ	РАВНОСИЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ
1) $\sin x+\cos x=d$;	а) $\sin(x+\alpha)=\dfrac{d}{\sqrt{a^2-b^2}}$;
2) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=d$;	б) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{d}{2}$;
3) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=d$;	в) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{d}{2}$;
4) $a\sin x+b\cos x=d$.	г) $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{d}{2}$;
	д) $\sin(x+\alpha)=\dfrac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
	е) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6
Вариант правильного ответа	3	2, 3, 4, 5	1, 2, 3, 4, 5	1 – а; 2 – г; 3 – д; 4 – б; 5 – е	1 – ж; 2 – а; 3 – е; 4 – д; 5 – б; 6 – в	1 – е; 2 – г; 3 – в; 4 – д

Примеры

Пример 1. Решите уравнение $\sin^2 2x+\dfrac{7}{3}\cos 2x=1$.

Решение. Зная, что $\sin^2 2x+\cos^2 2x=1$, запишем $\sin^2 2x=1-\cos^2 2x$. Подставляя значение $\sin^2 2x=1-\cos^2 2x$ в исходное уравнение, получим $3\left(1-\cos^2 2x\right)+7\cos 2x-3=0$, $3\cos^2 2x-7\cos 2x=0$, $\cos 2x(3\cos 2x-7)=0$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух простейших уравнений:

1) $\cos 2x=0$, откуда $2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$ и $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$;

2) $\cos 2x=\dfrac{7}{3}$, откуда $x\in\varnothing$, поскольку областью значений функции $y=\cos 2x$ является отрезок $[-1;\ 1]$, а число $\dfrac{7}{3}$ не принадлежит этому отрезку.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$.

Пример 2. Решите уравнение

$$\left(\sqrt{3}-\mathrm{ctg}^{-1}x\right)^{-1}-\left(\sqrt{3}+\mathrm{ctg}^{-1}x\right)^{-1}=\sin 2x.$$

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\,x}-\frac{1}{\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,x}=\sin 2x.$$

ОДЗ: $\begin{cases}\mathrm{tg}\,x\neq\sqrt{3},\\ \mathrm{tg}\,x\neq-\sqrt{3},\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$ Приведем в левой части уравнения дроби к общему знаменателю и применим основное свойство пропорции. Получим $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3}+\mathrm{tg}\,x}{3-\mathrm{tg}^2x}=\sin 2x$,

$2\,\mathrm{tg}\,x=\sin 2x\left(3-\mathrm{tg}^2x\right)$. Запишем $\mathrm{tg}\,x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, а $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

Подставляя эти выражения в последнее уравнение, запишем: $\dfrac{2\sin x}{\cos x}=2\sin x\cos x\dfrac{3\cos^2x-\sin^2x}{\cos^2x}$. Поскольку $\cos x\neq 0$, то $\sin x=$ $=\sin x\left(3\cos^2x-\sin^2x\right)$.

Выполняя очевидные преобразования, получим:

$$\sin x\left(1-3\cos^2x+\sin^2x\right)=0,$$

$$\sin x\left(\sin^2x+\cos^2x-3\cos^2x+\sin^2x\right)=0,\ \sin x\left(2\sin^2x-2\cos^2x\right)=0,$$

$$\sin x(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)=0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности трех уравнений: простейшего уравнения $\sin x=0$ и двух однородных уравнений относительно $\sin x$ и $\cos x$. Рассмотрим их решения:

1) $\sin x=0$, откуда $x=\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$;

2) $\sin x-\cos x=0$, $\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{\cos x}=0$, $\mathrm{tg}\,x-1=0$, $\mathrm{tg}\,x=1$, откуда $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi m_1$, где $m_1\in\mathbf{Z}$;

3) $\sin x+\cos x=0$, $\mathrm{tg}\,x=-1$, откуда $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi m_2$, где $m_2\in\mathbf{Z}$.

Объединим решения второго и третьего уравнений. С этой целью отберем несколько последовательных корней этих уравнений:

если $m_1=0$, то $x=\frac{\pi}{4}$; если $m_2=0$, то $x=-\frac{\pi}{4}$;

если $m_1=1$, то $x=\frac{5\pi}{4}$; если $m_2=1$, то $x=\frac{3\pi}{4}$.

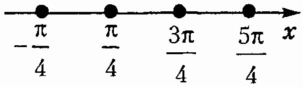


Рис. 17.1

Нанесем полученные числа на координатную прямую (рис. 17.1). Замечая, что $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, запишем $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}m$, где $m\in\mathbf{Z}$.

Ответ: $x_1=\pi n$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$; $n\in\mathbf{Z}$, $m\in\mathbf{Z}$.

Пример 3. Найдите количество корней уравнения $4{,}5\sin x-4{,}5\cos x+\sin 2x=\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4}$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. Поскольку $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1$, то исходное уравнение запишем в виде $4{,}5\sin x-4{,}5\cos x+\sin 2x=1$ или $9\sin x-9\cos x+2\sin 2x-2=0$.

Полагая $\sin x-\cos x=a$ и возводя обе части этого равенства в квадрат, получим $\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=a^2$, тогда $1-\sin 2x=a^2$ и $\sin 2x=1-a^2$. В результате подстановки уравнение $9\sin x-9\cos x+2\sin 2x-2=0$ примет вид $9a+2\left(1-a^2\right)-2=0$, $2a^2-9a=0$, $a(2a-9)=0$, откуда $a=0$ или $a=4{,}5$.

Учитывая подстановку, решим два уравнения:

1) $\sin x-\cos x=0$, $\operatorname{tg} x=1$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$;

2) $\sin x-\cos x=4{,}5$, откуда $x\in\varnothing$, так как $|\sin x|\le 1$ и $|\cos x|\le 1$.

Определим количество корней уравнения на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$, решая двойное неравенство $\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{4}+\pi n\le\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}\le\pi n\le\frac{5\pi}{4}$, откуда $\frac{1}{4}\le n\le\frac{5}{4}$. Следовательно, $n=1$ и уравнение на заданном отрезке имеет один корень.

Ответ: 1.

Пример 4. Найдите сумму всех корней уравнения $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\frac{1}{2}\sin 2x=1$, принадлежащих отрезку $[-\pi;\ 0]$.

Решение. Применяя формулы 16.1, 16.10 и формулу приведения, получим:

$$\cos^2 x+\frac{1}{2}2\sin x\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x\ ,\ \sin x\cos x-\sin^2 x=0\ ,$$

$$\sin x(\cos x-\sin x)=0\ .$$

Так как левая часть уравнения содержит два множителя, а правая часть тождественно равна нулю, то рассмотрим два случая:

1) $\sin x=0$, откуда $x=0+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$;

2) $\cos x-\sin x=0$, $\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{0}{\cos x}$, $1-\operatorname{tg} x=0$, $\operatorname{tg} x=1$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi m$, $m\in\mathbf{Z}$.

Произведем отбор корней уравнения на отрезке $[-\pi;\ 0]$ (рис. 17.2). Если $x=0+\pi n$, то: при $n=0$ $x_1=0$; при $n=-1$ $x_2=-\pi$.

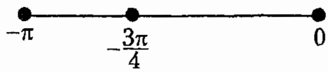


Рис. 17.2

Если $x=\frac{\pi}{4}+\pi m$, то при $m=-1$ $x_3=-\frac{3\pi}{4}$. Найдем сумму полученных корней уравнения: $-\pi-\frac{3\pi}{4}+0=-\frac{7\pi}{4}$.

Ответ: $-\frac{7\pi}{4}$.

Пример 5. Укажите количество корней уравнения

$3\sin^2 x+0{,}75\sin 2x-2{,}5\cos^2 x=\cos^0 3x$, принадлежащих отрезку $[0;\ \pi]$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$3\sin^2 x+1{,}5\sin x\cos x-2{,}5\cos^2 x=1\ ,$$

$$6\sin^2 x+3\sin x\cos x-5\cos^2 x-2=0\ .$$

Применив тождество 16.1, запишем число 2 как:

$$2=2\sin^2 x+2\cos^2 x\ .$$

Тогда исходное уравнение примет вид:

$$6\sin^2 x+3\sin x\cos x-5\cos^2 x-2\sin^2 x-2\cos^2 x=0\ ,$$

$$4\sin^2 x+3\sin x\cos x-7\cos^2 x=0\ .$$

Получили однородное уравнение второго порядка относитель-

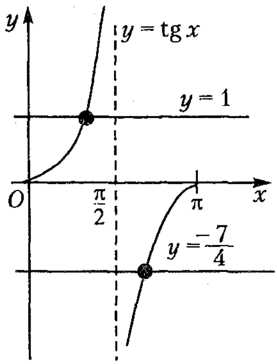


Рис. 17.3

но $\sin x$ и $\cos x$. Разделим обе его части на $\cos^2 x$ и решим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$: $4\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x-7=0$, откуда $\operatorname{tg} x=-\frac{7}{4}$ и $\operatorname{tg} x=1$.

На отрезке $[0; \pi]$ построим графики функций $y=\operatorname{tg} x$, $y=1$, $y=-\frac{7}{4}$ (рис. 17.3). Поскольку график функции $y=\operatorname{tg} x$ пересекает прямые $y=1$ и $y=-\frac{7}{4}$ в двух точках, то исходное уравнение имеет два корня.

Ответ: 2.

Пример 6. Решите уравнение $3\sin 5x-2\cos 5x=3$.

Решение. Применим метод введения вспомогательного аргумента, предварительно разделив обе части уравнения на число $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. Получим:

$$\frac{3}{\sqrt{13}}\sin 5x-\frac{2}{\sqrt{13}}\cos 5x=\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Применим подстановку $\begin{cases}\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}},\\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}},\end{cases}$ откуда $\alpha=\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Уравнение примет вид $\cos\alpha\sin 5x-\sin\alpha\cos x=\frac{3}{\sqrt{13}}$ или $\sin(5x-\alpha)=\frac{3}{\sqrt{13}}$, решая которое, получим:

$$5x-\alpha=(-1)^k\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}+\pi k;\ 5x=(-1)^k\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}+\alpha+\pi k;$$

$$x=(-1)^k\frac{1}{5}\arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13}+\frac{1}{5}\arcsin\frac{2\sqrt{13}}{13}+\frac{1}{5}\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $(-1)^k\frac{1}{5}\arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13}+\frac{1}{5}\arcsin\frac{2\sqrt{13}}{13}+\frac{1}{5}\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

Пример 7. Найдите среднее арифметическое корней уравнения

$$\arccos\left(2x^2+3x-8\right)=0.$$

Решение. Зная, что областью определения функции арккосинус является отрезок $[-1;\ 1]$, запишем ОДЗ уравнения:

$$-1 \le 2x^2 + 3x - 8 \le 1 .$$

Заменим уравнение $\arccos\left(2x^2 + 3x - 8\right) = 0$ равносильным ему на ОДЗ уравнением $2x^2 + 3x - 8 = \cos 0$ или $2x^2 + 3x - 9 = 0$, откуда $x_1 = -3$ и $x_2 = \frac{3}{2}$.

Поскольку оба полученных корня принадлежат области допустимых значений уравнения, то найдем их среднее арифметическое:

$$(-3 + 1{,}5) : 2 = -0{,}75 .$$

Ответ: –0,75.

Пример 8. Решите уравнение $\cos^{15} x + \sin^{18} x = 1$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$\cos^{15} x + \sin^{18} x = \sin^2 x + \cos^2 x ,$$

$$\cos^2 x\left(\cos^{13} x - 1\right) + \sin^2 x\left(\sin^{16} x - 1\right) = 0 .$$

Так как $\cos^2 x\left(\cos^{13} x - 1\right) \le 0$ и $\sin^2 x\left(\sin^{16} x - 1\right) \le 0$ при любых действительных значениях переменной x, то данное уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases} \cos^2 x\left(\cos^{13} x - 1\right) = 0, \\ \sin^2 x\left(\sin^{16} x - 1\right) = 0. \end{cases}$

Рассмотрим каждое уравнение системы:

$$1)\ \cos^2 x\left(\cos^{13} x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = 0, \\ \cos^{13} x = 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi m_1,\ m_1 \in \mathbf{Z}, \\ x_2 = 2\pi m_2,\ m_2 \in \mathbf{Z}; \end{array}\right.$$

$$2)\ \sin^2 x\left(\sin^{16} x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin^2 x = 0, \\ \sin^2 x = 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos 2x = -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = \pi n_1,\ n_1 \in \mathbf{Z}, \\ x_4 = \frac{\pi}{2} + \pi n_2,\ n_2 \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Поскольку корни x_1 и x_4 рассматриваемых уравнений совпадают, а множество корней x_3 включает в себя множество корней x_2, то решением системы уравнений, а значит и уравнения $\cos^{15} x + \sin^{18} x = 1$, является совокупность решений:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ x = 2\pi l,\ l \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ x_2 = 2\pi l,\ k \in \mathbf{Z},\ l \in \mathbf{Z}.$

Пример 9. Найдите число решений уравнения

$$\cos 3x + \sin 2y = 2, \text{ если } x, y \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right].$$

Решение. Так как $|\cos 3x| \le 1$ и $|\sin 2y| \le 1$, то данное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \sin 2y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 2\pi m, \\ 2y = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2\pi m}{3}, \\ y = \dfrac{\pi}{4} + \pi n; \end{cases} \quad m, n \in \mathbf{Z}.$$

Проведем отбор корней уравнения на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$:

если $m = 0$, то $x_1 = 0$;

если $m = 1$, то $x_2 = \dfrac{2\pi}{3}$;

если $n = 0$, то $y_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Получили две пары решений уравнения: $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ и $\left(\dfrac{2\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ответ: 2.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения (1–34):

1. $0{,}5\cos^2 x + 1{,}25\sin x = 1$.

2. $\cos 2x - 5\sin x = 3\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$.

3. $\sin\left(\dfrac{5\pi}{2} + 2x\right)\operatorname{ctg} 3x + \sin(5\pi + 2x) - \sqrt{2}\cos 5x = 0$.

4. $\sin x \cos 2x + \cos x \cos 4x = -\sin\left(-\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right)$.

5. $\sin 2x = \cos^4 2^{-1}x - \sin^4 2^{-1}x$.

6. $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x - 2\sin^2 6x = 2\cos^2 6x$.

7. $\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{3x}{2} = \sin x \sin 3x + \sin 2x \sin 3x$.

8. $1 - \sin 3x = \left(\cos\dfrac{x}{2} - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{2}\right)\right)^2$.

9. $\sin 7x+\sin 9x=2\left(\cos^2\left(\frac{9\pi}{4}-x\right)-\cos^2\left(\frac{9\pi}{4}+2x\right)\right)$.

10. $0{,}5\sin 6x=\sin 2x$.

11. $1-2\sin x\cos x=4\cos^2 x$.

12. $7\sin^2 x+\sin x\cos x=3$.

13. $2\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x-0{,}5\sin x(1+\cos 2x)=\cos^3 x$.

14. $2^3\sin^3 x\cos x-2^3\sin x\cos^3 x=2^{\frac{1}{2}}$.

15. $2\sin^3 x-\cos 2x=\sin(\pi-x)$.

16. $3\sin 2x+2\cos 2x=3\operatorname{tg} 3x\operatorname{ctg} 3x$.

17. $\sin 3x-\cos 3x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$.

18. $\cos 3x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{3}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin 3x\right)$.

19. $14+4\sin 2x+3(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x)=0$.

20. $\dfrac{\sin^2 2x-4\sin^2 x}{\sin^2 2x+4\sin^2 x-4}=2\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$.

21. $\dfrac{2\cos(3\pi+x)-5\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{3\pi}{2}-x\right)-\cos(3\pi-x)}=\dfrac{3}{2}$.

22. $8\cos x\cos(420°-x)\cos(420°+x)+1=0$.

23. $5\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)=2+\sin^4 x-\cos^4 x$.

24. $1{,}6\sin^4 x+1{,}6\cos^4 x=1$.

25. $\left(\sin^{-1} x+\cos^{-1} x\right)(\sin x+\cos x)=2\operatorname{tg}^2 x-2\cos^{-2} x$.

26. $\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=1$.

27. $\dfrac{\pi}{1+\cos^2(\pi+x)}+\dfrac{\pi}{1+\sin^2(\pi+x)}=\dfrac{16\pi}{11}$.

28. $\dfrac{\cos x\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}-\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^{-1} x}=2\sqrt{3}$.

29. $3\operatorname{tg}(x-195°)\operatorname{ctg}(x-165°)=1$.

30. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 410°+\operatorname{tg} 430°=\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 230°\operatorname{tg} 250°$.

31. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 200° + \operatorname{tg} 200° \operatorname{tg} 220° + \operatorname{tg} 220° \operatorname{tg} x = 1$.

32. $\operatorname{tg}(x - 110°) + \operatorname{tg}(380° - x) = 2$.

33. $a\cos^2\left(\pi + \frac{x}{2}\right) - (a + 2b)\sin^2\left(\pi + \frac{x}{2}\right) = a\cos x - b\sin x$.

34. $\sin(\pi - x) + \sin\pi^{-1} = \sin\left(x + \pi^{-1}\right)$.

35. Найдите произведение корней уравнения $\cos^2\frac{\pi x}{2} = \cos^2\pi$, принадлежащих отрезку $[\pi;\ 3\pi]$.

36. Найдите количество корней уравнения $\cos^2 2x + \cos^2 6x = \operatorname{tg}\ (-315°)$, принадлежащих промежутку $[-22{,}5°;\ 90°]$.

37. Найдите количество корней уравнения $5\sin x + 5\cos x = 6$ на отрезке $[-\pi;\ 2\pi]$.

38. Найдите количество корней уравнения $1 + \operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos^4\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin^4\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, удовлетворяющих условию $|x| \le \pi$.

39. Найдите на интервале $(0°;\ 360°)$ сумму корней уравнения $2\sin^2(x + 270°) = 7\sin(x + 90°) + 4$.

40. Найдите количество корней уравнения $\dfrac{\cos(x + 3\pi) - 1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + 3\pi\right)} = 0$ на отрезке $[0; 9\pi]$.

41. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos^2(270° + x) + 3{,}5\sin(270° - x) = 2{,}5$.

42. Найдите количество корней уравнения $2 - \sin 2x + 4\sin x = 4\cos x$, принадлежащих отрезку $[-\pi;\ 2\pi]$.

43. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $\sin^{12} x + \cos^3 x = 1$, принадлежащих интервалу $\left(-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

44. Найдите сумму корней уравнения $\sin^8 x + \cos^{16} x = 1$, принадлежащих отрезку $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

45. Решите уравнение $\operatorname{arctg}\frac{3x - 1}{x + 3} = \operatorname{arcctg} 1$.

46. Найдите число решений уравнения $2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi\arcsin x$.

47. Найдите сумму значений k (или значение числа k, если оно единственное), при которых при любом значении x верно равенство $2\sin 4x(\cos^4(\pi - 2x) - \sin^4(\pi + 2x)) = \sin(kx + 2\pi)$.

48. Найдите среднее арифметическое всех решений (или решение, если оно единственное) системы уравнений

$$\begin{cases}\cos\pi x=-1,\\ x^3-5x^2-14x=0.\end{cases}$$

49. Найдите решение системы уравнений

$$\begin{cases}\sin(x-y)=2\sin x\cdot\sin y,\\ x+y=\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

50. Найдите число решений уравнения
$2\cos 3x+\cos^{-2}3y+\sin^{-2}3y=2$, если $x,\ y\in[0;\ \pi]$.

51. Найдите число решений уравнения $\sin x\cos 2y=1$, если $x,\ y\in[0;\ 1{,}5\pi]$.

Ответы: **1.** $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$. **2.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. **3.** $x_1=\frac{\pi}{10}(2k+1)$; $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$; $k\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{Z}$. **4.** $x=\frac{\pi}{12}(4k-1)$; $k\in\mathbf{Z}$. **5.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$; $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **6.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{14}(2n+1)$; $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **7.** $x=\frac{\pi}{9}(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$. **8.** $x_1=\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}(2n+1)$, $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **9.** $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=\frac{2\pi n}{5}$; $x_3=\frac{\pi}{11}(2m+1)$, $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$; $m\in\mathbf{Z}$. **10.** $x_1=\frac{\pi k}{2}$; $x_2=\frac{\pi}{12}(6n\pm1)$, $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **11.** $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x_2=\operatorname{arctg}3+\pi n$, $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **12.** $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $x_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n$, $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **13.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k-1)$; $x_2=\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi n$, $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **14.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$. **15.** $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{2}(4n-1)$, $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **16.** $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $x_2=\operatorname{arctg}5+\pi n$, $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **17.** $x_1=35^\circ+120^\circ\cdot k$; $x_2=55^\circ+120^\circ\cdot n$, $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **18.** $x_1=\frac{\pi}{8}(4k+1)$; $x_2=\frac{\pi}{12}(12n+1)$, $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **19.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. **20.** $x=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$. **21.** $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$. **22.** $x=\pm40^\circ+120^\circ\cdot k$, $k\in\mathbf{Z}$. **23.** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. **24.** $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$, $k\in\mathbf{Z}$. **25.** $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$. **26.** $x=\pi(4k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$. **27.** $x=\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$, $k\in\mathbf{Z}$. **28.** $x=\frac{\pi}{12}(6k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$.

29. $x=45°(4k+1)$, $k\in\mathbf{Z}$. **30.** $x=60°+180°\cdot k$, $k\in\mathbf{Z}$. **31.** $x=30°+180°\cdot k$, $k\in\mathbf{Z}$. **32.** $x=-25°+180°\cdot k$, $k\in\mathbf{Z}$. **33.** $x_1=2\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{2}(4n+1)$, $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **34.** $x_1=2\pi k$; $x_2=-\frac{1}{\pi}+2\pi n$, $k\in\mathbf{Z}$; $n\in\mathbf{Z}$. **35.** 192. **36.** 8. **37.** 2. **38.** 3. **39.** 360°. **40.** 3. **41.** 120°. **42.** 2. **43.** −45°. **44.** 3π. **45.** 2. **46.** 1. **47.** 8. **48.** 7. **49.** $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$; $y=\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. **50.** 12. **51.** 4.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Если x_0 принадлежит интервалу (0°; 90°) и является корнем уравнения $\cos^2(360°-x)=1{,}5\sin(x+360°)$, то значение выражения $9\operatorname{tg} x_0$ равно	1) $3\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{3^{-1}}$; 5) $\sqrt{6^{-1}}$.
2	Количество корней уравнения $\sin(3x+4\pi)=\cos(3x-4\pi)$ на отрезке $[0;\pi]$ равно	1) 6; 2) 4; 3) 2; 4) 3; 5) 1.
3	Количество корней уравнения $\cos^2 2x+\cos^2 6x=1$, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{2}\right]$, равно	1) 8; 2) 10; 3) 6; 4) 3; 5) 1.
4	Число корней уравнения $\sin^{-2}\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)=\cos^4 x-\sin^4 x$, не превосходящих по абсолютной величине π, равно	1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 1; 5) 7.
5	Наибольший отрицательный корень уравнения $2\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} x\sin x=2\sin\frac{\pi}{3}$ равен	1) $-\frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{12}$; 3) $-\frac{3\pi}{8}$; 4) $-\frac{\pi}{4}$; 5) $-\pi$.

№	Задания	Варианты ответов
6	Наименьший положительный корень уравнения $\sin^{-2}x-\cos^{-2}x=16\cos^3 2x$ равен	1) $\frac{\pi}{18}$; 2) $\frac{7\pi}{8}$; 3) $\frac{\pi}{24}$; 4) $\frac{\pi}{4}$; 5) $\frac{\pi}{8}$.
7	Наименьший натуральный корень уравнения $\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)=\cos 2\pi$ равен	1) 4; 2) 0; 3) 16; 4) 2; 5) 1.
8	Наименьший неотрицательный корень уравнения $-\cos\left(-\pi x^2\right)=\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ равен	1) 0; 2) 0,25; 3) 1; 4) $\sqrt{\frac{4}{3}}$; 5) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.
9	Количество корней уравнения $\sin(\pi-3x)-x^3=0$ равно	1) 12; 2) 7; 3) 1; 4) 3; 5) 2.
10	Уравнение $\sin^2 a+\sin^2 ax=\cos x-\cos^2 a$ имеет единственное решение при условии, что	1) $a=0$; 2) $a<0$; 3) $a\in\mathbf{R}$; 4) $a\geq 0$; 5) $a>\pi$.
11	Наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{ctg}\,\sin x=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$ равен	1) $\pi-\arcsin\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\arcsin\frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin\frac{\pi}{2}$; 5) $\frac{\pi}{16}$.
12	Количество различных корней уравнения $\sin 2x+\frac{3}{2\cos(90°-2x)}=-3{,}5$ на отрезке $[0°;\ 360°]$ равно	1) 4; 2) 0; 3) 1; 4) 5; 5) 7.

№	Задания	Варианты ответов
13	Сумма корней уравнения $\cos^2(x+630°)=1{,}5\sin(x+630°)$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$ равна	1) $240°$; 2) $360°$; 3) $120°$; 4) $60°$; 5) $480°$.
14	Найдите сумму корней (или корень, если он единственный) уравнения $\frac{2}{3}(\arcsin x)^2+\frac{\pi^2}{3}=\arccos(-1)\arcsin x$	1) 1,25; 2) 3; 3) 3,5; 4) 1; 5) 2.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	1	4	1	3	1	5	1
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	5	4	3	3	1	2	4

18 ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

18.1. Правила дифференцирования

Производной функции $y = f(x)$ в данной точке x_0 называют предел отношения приращения функции к соответствующему приращению ее аргумента при условии, что последнее стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Дифференцированием называют операцию нахождения производной.

Правила дифференцирования:

$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$, где k – число; (18.1)

$(u+v)' = u' + v'$, где $u = f_1(x)$, $v = f_2(x)$; (18.2)

$(u \cdot v)' = u'v + uv'$; (18.3)

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; (18.4)

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. (18.5)

18.2. Таблица производных элементарных и сложных функций

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Функция $f(g(x))$	Производная $f'(g(x))$
a	0		
x	1		
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$g^n(x)$	$ng^{n-1}(x) \cdot g'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{g(x)}$	$-\frac{1}{g^2(x)} \cdot g'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{g(x)}$	$\frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$
e^x	e^x	$e^{g(x)}$	$e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Функция $f(g(x))$	Производная $f'(g(x))$
a^x	$a^x \ln a$	$a^{g(x)}$	$a^{g(x)} \ln a \cdot g'(x)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a g(x)$	$\frac{1}{g(x) \ln a} \cdot g'(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln g(x)$	$\frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin g(x)$	$\cos g(x) \cdot g'(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos g(x)$	$-\sin g(x) \cdot g'(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} g(x)$	$\frac{1}{\cos^2 g(x)} \cdot g'(x)$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{ctg} g(x)$	$-\frac{1}{\sin^2 g(x)} \cdot g'(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin g(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \cdot g'(x)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos g(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \cdot g'(x)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} g(x)$	$\frac{1}{1+g^2(x)} \cdot g'(x)$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} g(x)$	$-\frac{1}{1+g^2(x)} \cdot g'(x)$

18.3. Геометрический и физический смысл производной

Геометрический смысл производной. Если прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $y = f(x)$ и проведена в точке с координатами $(x_0; f(x_0))$ (рис. 18.1), то ***угловой коэффициент*** k касательной находят по формуле:

$$k = f'(x_0) \text{ или } k = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α – угол между касательной и положительным направлением оси Ox.

Равенство $f'(x_0)=\text{tg}\alpha$ выражает геометрический смысл производной.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;f(x_0))$ имеет вид

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Физический смысл производной. Если $s(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то ***скорость*** этого движения в момент t находят по формуле $v(t)=s'(t)$, а ***ускорение*** – по формуле $a(t)=v'(t)$.

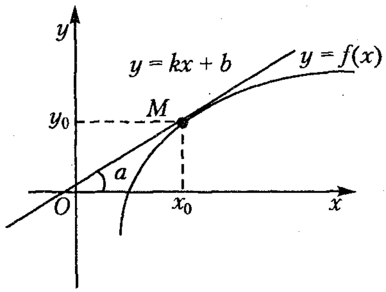


Рис. 18.1

Тест для проверки теоретических знаний

Установите соответствие (1–3):

1. Правила дифференцирования ($u=f_1(x)$, $v=f_2(x)$):

1) $(k\cdot g(x))'$;	а) $u'+v'$;
2) $(u+v)'$;	б) $k'\cdot g'(x)$;
3) $(u\cdot v)'$;	в) $k'\cdot g'(x)$;
4) $\left(\frac{v}{u}\right)'$.	г) $\frac{v'u-vu'}{u^2}$;
	д) $\frac{u'v-uv'}{v^2}$;
	е) $u'v-uv'$;
	ж) $u'v+uv'$.

2. Производные элементарных функций:

ФУНКЦИЯ	ПРОИЗВОДНАЯ
1) x^a;	а) $\cos x$;
2) a^x;	б) $-\cos x$;
3) e^x;	в) $a^x \ln a$;
4) $\log_a x$;	г) $a\cdot x^{a-1}$;

ФУНКЦИЯ

5) $\ln x$;

6) $\sin x$;

7) $\operatorname{tg} x$;

8) $\arccos x$.

ПРОИЗВОДНАЯ

д) e^x;

е) $-\frac{1}{\sin^2 x}$;

ж) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

з) $\frac{1}{\cos^2 x}$;

и) $\frac{1}{x}$;

к) $\frac{1}{x \ln a}$.

3. Производные сложных функций:

ФУНКЦИЯ

1) $\frac{1}{g(x)}$;

2) $\sqrt{g(x)}$;

3) $\cos g(x)$;

4) $\arcsin g(x)$;

5) $\operatorname{ctg} g(x)$;

6) $\operatorname{arctg} g(x)$;

7) $g^n(x)$;

8) $\ln g(x)$.

ПРОИЗВОДНАЯ

а) $-\frac{1}{g^2(x)} \cdot g'(x)$;

б) $ng^{n-1}(x) \cdot g'(x)$;

в) $\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$;

г) $\cos g(x) \cdot g'(x)$;

д) $\frac{g'(x)}{g^2(x)}$;

е) $\frac{g'(x)}{g(x)}$;

ж) $\frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$;

з) $-\sin g(x) \cdot g'(x)$;

и) $-\frac{g'(x)}{\sin^2 g(x)}$;

к) $\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$.

Укажите все правильные варианты ответов:

4. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид:

1) $y=kx+f(x_0)$, $k=f'(x_0)$;

2) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x_0-x)$;

3) $y=f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$;

4) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$;

5) $y=f(x_0)+\operatorname{tg}\alpha\cdot(x-x_0)$, где α – угол между касательной и осью Oy;

6) $y=f(x_0)+\operatorname{tg}\alpha\cdot(x-x_0)$, где α – угол между касательной и положительным направлением оси Ox.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4
Вариант правильного ответа	1 – в; 2 – а; 3 – ж; 4 – г.	1 – г; 2 – в; 3 – д; 4 – к; 5 – и; 6 – а; 7 – з; 8 – ж.	1 – а; 2 – в; 3 – з; 4 – к; 5 – и; 6 – ж; 7 – б; 8 – е.	4, 6.

Примеры

Пример 1. Найдите производную функции

$$y=3\sqrt[3]{x^2}+2x^3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+3x+3.$$

Решение. На основании свойств степеней преобразуем исходную функцию:

$$y=3x^{\frac{2}{3}}+2x^3x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}+3x+3,\ y=3x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{7}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}+3x+3.$$

Применяя правила дифференцирования 18.2 и 18.1 и правило нахождения производной степенной функции $\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}$, получим:

$$y'=\left(3x^{\frac{2}{3}}\right)'+\left(2x^{\frac{7}{2}}\right)'+\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'+(3x)'+3';$$

$$y'=2x^{-\frac{1}{3}}+7x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}+3=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+7x^2\sqrt{x}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}+3.$$

Ответ: $y'=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}+7x^2\sqrt{x}-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}+3$.

Пример 2. Найдите производную функции

$$y=\ln(\cos 4x)+\frac{2x^2}{\pi}+\frac{\sin 4}{4} \text{ в точке } x_0=\frac{\pi}{4}.$$

Решение. Применим последовательно формулы 18.2, 18.5, 18.1 и таблицу производных элементарных функций. Получим: $y'=(\ln(\cos 4x))'+\left(\frac{2x^2}{\pi}\right)'+\left(\frac{\sin 4}{4}\right)'=\frac{(\cos 4x)'}{\cos 4x}+\frac{2}{\pi}\cdot\left(x^2\right)'+0=$

$=-\frac{4\sin 4x}{\cos 4x}+\frac{4x}{\pi}=-4\,\mathrm{tg}4x+\frac{4x}{\pi}$.

Найдем значение производной в точке $x_0=\frac{\pi}{4}$:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\,\mathrm{tg}\,\pi+\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=0+1=1.$$

Ответ: 1.

Пример 3. Решите уравнение $x\cdot f'(x)=2f(x)$, если $f(x)=x^3\ln x$.

Решение. ОДЗ: $x>0$. Применяя формулу 18.3 и таблицу производных функций, найдем производную функции $f(x)=x^3\ln x$:

$$f'(x)=\left(x^3\right)'\cdot\ln x+x^3\cdot(\ln x)'=3x^2\ln x+\frac{x^3}{x}=3x^2\ln x+x^2.$$

Подставляя $f(x)=x^3\ln x$ и $f'(x)=3x^2\ln x+x^2$ в уравнение $x\cdot f'(x)=2f(x)$, получим: $3x^3\ln x+x^3-2x^3\ln x=0$, $x^3\ln x+x^3=0$, $x^3(\ln x+1)=0$. Поскольку $x>0$, то $\ln x+1=0$, $\ln x=-1$ и $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Ответ: $\frac{1}{e}$.

Пример 4. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$f'(x)<g'(x), \text{ если } f(x)=\frac{x^3+1}{x},\ g(x)=5x+\frac{1}{x}.$$

Решение. 1. Найдем производную функции $f(x)$, применяя правило 18.4:

$$f'(x)=\frac{\left(x^3+1\right)'\cdot x-\left(x^3+1\right)\cdot x'}{x^2}=\frac{3x^2\cdot x-\left(x^3+1\right)\cdot 1}{x^2}=$$

$$=\frac{3x^3-x^3-1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}.$$

2. Найдем производную функции $g(x)$, применяя правило 18.2:

$$g'(x)=(5x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=5-\frac{1}{x^2}=\frac{5x^2-1}{x^2}.$$

3. Составим и решим неравенство $f'(x)<g'(x)$:

$$\frac{2^3-1}{x^2}<\frac{5x^2-1}{x^2},\ \frac{2x^3-1-5x^2+1}{x^2}<0,\ \frac{x^2(2x-5)}{x^2}<0.$$

Применим метод интервалов (рис. 18.2) и найдем решение неравенства: $x\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 2{,}5)$. Наибольшим целым решением неравенства является число 2.

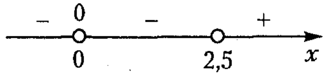


Рис. 18.2

Ответ. 2.

Пример 5. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^2e^{-x}$ в точке с абсциссой $x_0=2$.

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с координатами $(x_0;f(x_0))$ находят в виде

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

1. Найдем значение функции в точке $x_0=2$:

$$f(x_0)=f(2)=4\cdot e^{-2}=\frac{4}{e^2}.$$

2. Найдем производную функции $y=x^2e^{-x}$, применяя формулу 18.3 и правило нахождения производной сложной функции $\left(e^{g(x)}\right)'=e^{g(x)}\cdot g'(x)$. Получим:

$$y'=\left(x^2\right)'\cdot e^{-x}+x^2\cdot\left(e^{-x}\right)',\ y'=2xe^{-x}+x^2e^{-x}(-x)',$$

$$y'=\frac{2x}{e^x}-\frac{x^2}{e^x}=\frac{2x-x^2}{e^x}.$$

3. Найдем значение производной функции в точке $x_0=2$:

$$f'(2)=\frac{4-4}{e^2}=0.$$

4. Подставим значения $x_0=2$, $f(2)=\frac{4}{e^2}$ и $f'(2)=0$ в уравнение касательной $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ и получим:

$$y=\frac{4}{e^2}+0\cdot(x-2) \text{ или } y=\frac{4}{e^2}.$$

Ответ: $y=\frac{4}{e^2}$.

Пример 6. Составьте уравнения касательных к кривой $y=x^2-4x+3$, проходящих через точку $M(2;\ -5)$, если абсциссы точек касания положительны.

Решение. Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с координатами $(x_0;f(x_0))$ находят в виде

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

1. Найдем значение функции $y=x^2-4x+3$ в точке x_0:

$$f(x_0)=x_0^2-4x_0+3.$$

2. Найдем производную функции $y=x^2-4x+3$:

$$y'=\left(x^2\right)'-(4x)'+3'=2x-4.$$

3. Найдем значение производной функции в точке x_0:

$$f'(x_0)=2x_0-4.$$

4. Подставим найденные значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в уравнение касательной $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ и получим

$y=x_0^2-4x_0+3+(2x_0-4)(x-x_0)$.

5. Зная, что касательные к графику функции проходят через точку $M(2;\ -5)$, подставим в уравнение касательной координаты точки M $x=2$ и $y=-5$: $-5=x_0^2+4x_0+3+(2x_0-4)(2-x_0)$. Решая полученное уравнение, найдем абсциссы точек касания заданной кривой и прямых, проходящих через точку M: $x_0^2-4x_0-2x_0^2+8x_0-8+3+5=0$, $x_0^2-4x_0=0$, $x_0(x_0-12)=0$, откуда $x_0=0$ и $x_0=4$.

6. Поскольку число нуль не положительное, то запишем уравнение касательной к заданной кривой в точке с абсциссой $x_0=4$, подставляя значение $x_0=4$ в уравнение

$$y=x_0^2-4x_0+3+(2x_0-4)(x-x_0).$$

Получим: $y=16-16+3+4(x-4)$, $y=4x-13$.

Ответ: $y=4x-13$.

Пример 7. Найдите точки, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y=2x^3+2x^2+x+3$ равен 3.

Решение. Угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ находят по формуле $k=f'(x_0)$. Поскольку согласно условию $k=3$, то получим уравнение для определения абсцисс точек касания: $f'(x_0)=3$.

1. Найдем производную заданной функции:

$$f'(x)=\left(2x^3\right)'+\left(2x^2\right)'+x'+3'=6x^2+4x+1$$

2. Найдем значение производной функции в точке x_0:

$$f'(x_0)=6x_0^2+4x_0+1.$$

3. Решим уравнение $f'(x_0)=3$. Запишем: $6x_0^2+4x_0+1=3$, $6x_0^2+4x_0-2=0$, $3x_0^2+2x_0-1=0$, откуда $x_0=-1$ и $x_0=\frac{1}{3}$.

4. Найдем ординаты точек касания:

$$f(-1)=-2+2-1+3=2;$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+3=\frac{2}{27}+\frac{2}{9}+\frac{10}{3}=\frac{98}{27}.$$

5. Запишем точки касания: $(-1;\ 2)$, $\left(\frac{1}{3};\ \frac{98}{27}\right)$.

Ответ: $(-1;\ 2)$, $\left(\frac{1}{3};\ \frac{98}{27}\right)$.

Пример 8. Найдите сумму ординат точек, в которых касательные к графику функции $y=x(x-4)^3$ параллельны оси абсцисс.

Решение. Поскольку уравнение касательной имеет вид $y=kx+b$, а уравнение оси абсцисс вид $y=0$ и касательная параллельна оси абсцисс, то угловые коэффициенты этих прямых равны. Тогда $k=0$ или $f'(x_0)=0$.

1. Найдем производную заданной функции $y=x(x-4)^3$:

$$f'(x)=x'\cdot(x-4)^3+x\cdot\left((x-4)^3\right)'=(x-4)^3+3x(x-4)^2(x-4)'=$$
$$=(x-4)^3+3x(x-4)^2\cdot 1=(x-4)^2(x-4+3x)=4(x-4)^2(x-1).$$

2. Найдем значение производной функции в точке x_0:

$$f'(x_0)=4(x_0-4)^2(x_0-1).$$

3. Решим уравнение $4(x_0-4)^2(x_0-1)=0$ и получим $x_0=4$ или $x_0=1$.

4. Найдем ординаты точек касания:

$$f(4)=4\cdot(4-4)^3=0,\ f(1)=1\cdot(1-4)^3=-27;$$

5. Найдем сумму ординат точек касания: $0-27=-27$.

Ответ: -27.

Пример 9. Определите угол наклона к оси абсцисс касательной, проведенной к кривой $y=2x^3-2x$ в точке ее пересечения с осью ординат.

Решение. Кривая $y=2x^3-x$ пересекает ось ординат в точке с абсциссой $x_0=0$. Угол α (наклона касательной, проведенной к заданной кривой в точке $x_0=0$, к оси абсцисс) найдем, решая уравнение $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$. Для этого:

1) найдем производную функции $y=2x^3-2x$:
$$y'=6x^2-2;$$
2) найдем значение производной функции в точке $x_0=0$:
$$f'(0)=-2.$$
Решим уравнение $\operatorname{tg}\alpha=-2$, откуда
$$\alpha=-\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$
Учитывая, что $0<\alpha<\pi$, при $n=1$ получим $\alpha=\pi-\operatorname{arctg} 2$.

Ответ: $\pi-\operatorname{arctg} 2$.

Пример 10. Касательная, проведенная к графику функции $y=e^{2x-2}$ в точке с абсциссой x_1, параллельна касательной, проведенной к графику функции $y=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ в точке с абсциссой x_2. Найдите значение x_2, если $x_1=1$.

Решение. Поскольку касательная, проведенная к графику функции $y=e^{2x-2}$ в точке с абсциссой $x_1=1$, параллельна касательной, проведенной к графику функции $y=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ в точке с абсциссой x_2, то угловые коэффициенты этих касательных равны. Следовательно $k_1=k_2$.

1. Рассмотрим функцию $f_1(x)=e^{2x-2}$ и найдем ее производную: $f_1'(x)=\left(e^{2x-2}\right)'=e^{2x-2}\cdot(2x-2)'=2e^{2x-2}$. Найдем k_1:
$$k_1=f_1'(x_1)=f_1'(1)=2e^{2\cdot 1-2}=2e^0=2.$$

2. Рассмотрим функцию $f_2(x)=(x-3)^{-2}$ и найдем ее производную: $f_2'(x)=-2(x-3)^{-3}(x-3)'=-\dfrac{2}{(x-3)^3}$. Найдем k_2:

$$k_2 = f_2'(x_2) = -\frac{2}{(x_2-3)^3}.$$

3. Найдем значение x_2, решая уравнение $k_1 = k_2$:

$$-\frac{2}{(x_2-3)^3} = 2, \ (x_2-3)^3 = -1, \ x_2 - 3 = -1, \ x_2 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 11. Найдите синус угла между касательными, проведенными к графикам функций $y = x^3 - x + 6$ и $y = x^2 - 5x$ в точке их пересечения.

Решение. 1. Найдем точку пересечения графиков функций, решая систему уравнений $\begin{cases} y = x^3 - x + 6, \\ y = x^2 - 5x. \end{cases}$

Чтобы найти значение переменной x, необходимо приравнять правые части уравнений системы. Получим уравнение $x^3 - x + 6 = x^2 - 5x$ или $x^3 - x^2 + 4x + 6 = 0$, левая часть которого представлена многочленом третьей степени. Запишем делители числа 6: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$. Заметим, что $x = -1$ является корнем уравнения. Найдем остальные корни уравнения. С этой целью разделим обе части уравнения на $x+1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 + 4x + 6 & x+1 \\ \underline{x^3 + x^2 } & \overline{x^2 - 2x + 6} \\ -2x^2 + 4x + 6 & \\ \underline{-2x^2 - 2x } & \\ 6x + 6 & \\ \underline{6x + 6} & \\ 0 & \end{array}$$

Получим $x^2 - 2x + 6 = 0$, откуда $x \in \varnothing$. Тогда уравнение имеет единственное решение $x = -1$. В таком случае $x_0 = -1$ – абсцисса точки пересечения графиков функций.

2. Найдем угловые коэффициенты касательных. Зная, что $k = f'(x_0)$, запишем $k_1 = f_1'(x_0)$ и $k_2 = f_2'(x_0)$. Поскольку $f_1'(x) = \left(x^3 - x + 6\right)' = 3x^2 - 1$, то $k_1 = 3(-1)^2 - 1 = 2$. Поскольку $f_2'(x) = \left(x^2 - 5x\right)' = 2x - 5$, то $k_2 = 2(-1) - 5 = -7$.

3. Тангенс угла между касательными найдем по формуле $\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$ и получим $\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{-7-2}{1-7\cdot 2}\right|=\left|\frac{-9}{-13}\right|=\frac{9}{13}$.

4. Найдем синус угла между касательными. Согласно тождеству $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, запишем $\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\frac{169}{81}$, $\sin^2\alpha=\frac{81}{250}$, откуда $\sin\alpha=\frac{9\sqrt{10}}{50}$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{10}}{50}$.

Пример 12. Зная закон прямолинейного движения $s(t)=0{,}5t^4-5t^3+12t^2-1{,}5$, определите в какие моменты ускорение тела равно нулю (s и t измеряются соответственно в метрах и секундах).

Решение. 1. Найдем скорость движения тела в момент t. Согласно формуле $v(t)=s'(t)$, получим $v(t)=2t^3-15t^2+24t$.

2. Найдем ускорение движения тела в момент t. Согласно формуле $a(t)=v'(t)$, получим $a(t)=6t^2-30t+24$.

3. Решая уравнение $a(t)=0$, найдем в какие моменты ускорение тела равно нулю. Запишем $t^2-5t+4=0$, откуда $t_1=1$, $t_2=4$.

Ответ: 1 с, 4 с.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите производные функций (1–26):

1. $y=\frac{x^3-3x^2+1}{x-1}+3x^0$.

2. $y=\left(x^3-1\right)^5+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$.

3. $y=\left(x^4-x^2+1\right)^3$.

4. $y=\sqrt[3]{4x^3-7x^2+1}+\sqrt[3]{2}$.

5. $y=\frac{2}{3}\left(x^3-\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}\right)-\sqrt[5]{3}x$.

6. $y=\sqrt{1-x^3}-x\sqrt{x}+\sqrt{e}$.

7. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-2}}+\frac{1}{e^2}$.

8. $y=\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}-2x$.

9. $y=\frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}+4x$.

10. $y=x^3+\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{x^3}$.

11. $y=e^x+e^{x^3-5x^2}$.

12. $y=\ln\sqrt{x^2-1}-\ln x$.

13. $y=\lg\frac{10-x}{x+2}+\lg 2$.

14. $y=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}-\cos 1$.

15. $y=\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 2x$.

16. $y=\left(\sin^2 x+1\right)e^x$.

17. $y=x+\sin x\cos x$.

18. $y=\cos^2 3x+\sin^2 3$.

19. $y=x^2\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$.

20. $y=\sin^2\frac{x}{2}+\frac{x}{2}$.

21. $y=\operatorname{tg}\ \sin x+\operatorname{tg}\ \sin 2$.

22. $y=2+\sin 2x\ \operatorname{tg} x$.

23. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{3}{x}$.

24. $y=\sin\frac{3}{\pi}-\ln\frac{3}{x}$.

25. $f(x)=\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

26. $f(x)=\ln\left(\cos\frac{x-1}{x}\right)$.

Вычислите значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной (27–38):

27. $f(x)=\sqrt{x^2+3}+\frac{2x}{x+1}+\sqrt{3}$, $f'(1)=?$

28. $f(x)=\frac{x}{3}-\frac{3}{x}+3$; $f'(3)=?$

29. $f(x)=\frac{2}{3}+x-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3}; f'(-1)=?$

30. $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; $f'(4)=?$

31. $f(x)=\sin^2 x^2+\operatorname{tg}^2 x^2\cdot\operatorname{ctg}^2 x^2; f'(0)=?$

32. $f(x)=\sin^4(\pi+x)-\cos^4(\pi-x); f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=?$

33. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$; $30f'(2)=?$

34. $f(x)=\sqrt{x^2-1+\sqrt[3]{x}}$; $6f'(1)=?$

35. $f(x)=\frac{2^{2x}}{3\sqrt{2-2^{2x}}}; f'(0)=?$

36. $f(x)=2^{x-2x^2-1}+\frac{x\ln 2}{2}; f'(0)=?$

37. $f(x)=\frac{x-2}{\sin^2 x}+\cos x$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

38. $f(x)=0{,}5\sin x\operatorname{ctg}^{-1}2x+2{,}5\cos x+\cos 2{,}5$; $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

39. Найдите длину промежутка, который образуют все решения неравенства $f'(x)+\varphi'(x)\le 0$, если $f(x)=2x^3+12x^2-24$, $\varphi(x)=9x^2+72x+24$.

40. Найдите $f(x_0)$, если x_0 – целый корень уравнения $\frac{f(x)}{2f'(x)}=\frac{1}{3}$ и $f(x)=\left(x^2-3x+1\right)^{\frac{1}{2}}$.

41. Найдите среднее арифметическое корней уравнения $f(x)+1{,}2f'(x)=-0{,}2$, если $f(x)=(1-x)^{-1}$.

42. Найдите ординату точки пересечения касательной, проведенной к кривой $y=\ln(2e-x)$ в точке с абсциссой $x_0=e$, и оси Oy.

43. Найдите сумму угловых коэффициентов касательных к кривым $y=2x^2-5$ и $y=x^2-3x+5$, проведенных через точки пересечения этих кривых.

44. Найдите сумму ординат точек, в которых касательные к кривой $y=\frac{x^3}{3}-x^2-x+1$ параллельны прямой $y=2x-\ln 2$.

45. Найдите произведение абсцисс точек, в которых касательные к графику функции $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+7x-\frac{28}{3}$ образуют с осью Ox угол $45°$.

46. Найдите косинус угла, под которым кривая $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(6\pi+3x)$ пересекает ось абсцисс в начале координат.

47. Найдите сумму всех точек промежутка $[0; \pi]$, в которых касательная к графику $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$ составляет с осью абсцисс угол $60°$.

48. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, образованного касательной к графику функции $y=\sqrt{x^2+2x+4}$ в точке с абсциссой $x_0=-2$, и осями координат.

49. Касательная, проведенная к параболе $y=x^2-5x+10$, образует с осью абсцисс угол 45°. Найдите расстояние от точки касания до начала координат.

50. Дана кривая $y=\arcsin x$. Найдите произведение абсцисс точек ее графика, в которых касательные параллельны прямой $y=\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

51. Найдите касательные к графику функции $y=2x^2+2$, проходящие через точку (0; 1).

52. Найдите сумму координат точек касания прямых, проходящих через точку $M(1; 1)$, и кривой $y=x^2-5x+6$.

53. Найдите наименьшее целое значение постоянной a, при котором производная функции, заданной формулой $y=e^{ax^3+3x^2+x}$, принимает только положительные значения на всей области определения данной функции.

54. Дана функция $f(x)=x\ln x-\ln ex+\ln e$. Как изменяется ее производная с возрастанием x от 1 до 9?

55. Найдите количество целых чисел из области определения функции $f(x)=\sqrt{4+3x-x^2}$ и области определения ее производной.

56. Найдите 5 % площади треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к кривой $y=\sqrt{x^2-5}$ в точке $M(3; 2)$.

57. К гиперболе $y=4x^{-1}$ проведены касательные: одна – в точке $M(2; 2)$, а другие – параллельно прямой $y=-4x+4$. Найдите сумму площадей треугольников, образованных каждой из этих касательных с осями координат.

В задачах 58–61 указан закон прямолинейно движения $s(t)$; s и t измеряются соответственно в метрах и секундах.

58. $s(t)=\frac{4t+3}{t+4}+\frac{3}{4}$. Найдите скорость в момент $t=9$.

59. $s(t)=2t^3-3t+4$. Найдите ускорение в момент $t=2$.

60. Законы движения двух материальных точек вдоль одной прямой заданы уравнениями $s_1=4t^2+2$, $s_2=3t^2+4t-1$. Найдите модуль разности скоростей точек в те моменты, когда пройденные ими расстояния равны.

61. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $s_1 = 2t^3 - 5t^2 - 3t - 3$, $s_2 = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 70$. Найдите сумму ускорений точек в те моменты, когда скорости их равны.

Ответы: **1.** $y' = \dfrac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 1}{(x-1)^2}$. **2.** $y' = 15x^2\left(x^3-1\right)^4 + x$.
3. $y' = 6x\left(x^4 - x^2 + 1\right)^2\left(2x^2 - 1\right)$. **4.** $y' = \dfrac{2x(6x-7)}{3\sqrt[3]{\left(4x^3 - 7x^2 + 1\right)^2}}$.
5. $y' = 2x^2 - 2x\sqrt{x^2-1} - \sqrt[5]{3}$. **6.** $y' = -\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} + \sqrt{x}\right)$.
7. $y' = -\dfrac{2}{\sqrt{\left(x^2-2\right)^3}}$. **8.** $y' = -\dfrac{2}{x^2\sqrt{2-x^2}} - 2$. **9.** $y' = 4 - \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.
10. $y' = 3x^2 - \dfrac{3\sqrt{1+x^2}}{x^4}$. **11.** $y' = e^x + e^{x^3-5x^2}\left(3x^2 - 10x\right)$. **12.** $y' = \dfrac{x}{x^2-1} - \dfrac{1}{x}$.
13. $y' = \dfrac{12}{(x-10)(x+2)\ln 10}$. **14.** $y' = \dfrac{4\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}$. **15.** $y' = \dfrac{8}{\sin^2 4x}$.
16. $y' = e^x\left(\sin 2x + \sin^2 x + 1\right)$. **17.** $y' = 1 + \cos 2x$. **18.** $y' = -3\sin 6x$.
19. $y' = 2x\cos\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. **20.** $y' = 0{,}5(1 + \sin x)$. **21.** $y' = \dfrac{\cos x}{\cos^2 \sin x}$.
22. $y' = 2\sin 2x$. **23.** $y' = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{3}{x^2}$. **24.** $y' = \dfrac{1}{x}$. **25.** $\dfrac{2}{\sqrt{x}\left(2-x^2\right)}$.
26. $-\dfrac{1}{x^2}\operatorname{tg}\dfrac{x-1}{x}$. **27.** 1. **28.** $\dfrac{2}{3}$. **29.** -2. **30.** 0,05. **31.** 1. **32.** 1.
33. 1. **34.** 7. **35.** $\ln 2$. **36.** $\ln 2$. **37.** 0. **38.** $-1{,}5$. **39.** 1. **40.** 1. **41.** 3,5.
42. 2. **43.** -24. **44.** $-\dfrac{4}{3}$. **45.** 6. **46.** 0,5. **47.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **48.** $0{,}5\sqrt{5}$. **49.** 5.
50. $-0{,}25$. **51.** $y = \pm 2\sqrt{2}x + 1$. **52.** 8. **53.** 4. **54.** Возрастает от 0 до $\ln 9 + \dfrac{8}{9}$. **55.** 10. **56.** 0,25. **57.** 24. **58.** $\dfrac{1}{13}$ м/с. **59.** 24 м/с^2. **60.** 2 м/с.
61. 32 м/с^2.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Производная функции $y=3+x\sqrt[3]{3x^2+1}$ в точке с абсциссой $x_0=1$ равна	1) $3\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[3]{2}$; 3) $3\sqrt[3]{2^4}$; 4) $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{16}}$.
2	Производная функции $y=2^{\lg e}x^2+2^{\lg e}$ имеет вид	1) $2x$; 2) $4^{\lg e}x$; 3) $2x+2^{\lg e}$; 4) $x^{\lg 10e}$; 5) $x2^{\lg 10e}$.
3	Дана функция $f(x)=\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{3}$. Если x возрастает от $\frac{1}{18}$ до 81, то наибольшее целое значение производной равно	1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) 0; 5) −1.
4	Если $f(x)=\sin 4x\cos 4x+\operatorname{tg} 4x \operatorname{ctg} 4x$, то значение выражения $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ равно	1) −2; 2) 2; 3) 1; 4) 0,5; 5) 0,25.
5	Если $f(x)=2^3\sin^3\frac{x}{2}$, то значение выражения $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ равно	1) $3\sqrt{2}$; 2) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) $8\sqrt{2}$.
6	Функция задана формулой $y=e^{ax^2+bx+1}$. Если $f(1)=f(0)=f'(0)$, то значение ab равно	1) 16; 2) 4; 3) 2; 4) 1; 5) −1.
7	Если $f(x)=e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)$, то утроенный квадрат меньшего корня уравнения $f'(x)=2f(x)$ равен	1) 0; 2) −7; 3) 21; 4) $\frac{49}{3}$; 5) $\frac{7}{3}$.

№	Задания	Варианты ответов
8	Уравнение касательной к графику функции $y = \operatorname{tg} 3x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$ имеет вид	1) $y = 3x - \pi$; 2) $y = 3x + 3\pi$; 3) $y = 3x$; 4) $y = x - 3\pi$; 5) $y = x - \pi$.
9	Уравнение касательной к графику функции $y = x(\ln x - 1)$ в точке с абсциссой $x = e$ имеет вид	1) $y = x + 2e$; 2) $y = x + e$; 3) $y = x - e$ 4) $y = ex - e$; 5) $y = -5ex$.
10	Если касательная к графику функции $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 2}$ проведена в точке его пересечения с осью ординат, то угловой коэффициент касательной равен	1) –0,5; 2) 5; 3) 1,5; 4) 1; 5) 2.
11	Если касательная, проведенная к графику функции $g(x) = x^2 \ln x$, образует с осью абсцисс угол $45°$, то абсцисса точки касания равна	1) 5; 2) –1; 3) 1; 4) 0,1; 5) 1,5.
12	Касательная, проведенная к кривой $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$, образует с осью ординат угол	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arctg} 3$; 3) $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 3$; 4) $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcctg} 3$; 5) $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 3$.
13	Если касательная к графику функции $y = \frac{x + 2}{x - 2}$ образует с осью абсцисс угол $135°$, то сумма ординат точек касания равна	1) 4; 2) 2; 3) –4; 4) 6; 5) 8.
14	Множество значений производной функции $f(x) = 2\cos^2(4x - 1)$ образуют промежуток, длина которого равна	1) 1; 2) 8; 3) 6; 4) 16; 5) 18.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	4	5	3	1	1	5	4
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	1	3	1	3	5	2	4

19 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

19.1. Определение промежутков монотонности функции

Функция $y = f(x)$ *возрастает* на промежутке $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ *убывает* на промежутке $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции:

а) если на заданном промежутке $f'(x) > 0$, то функция возрастает на этом промежутке;

б) если $f'(x) < 0$, то функция убывает на этом промежутке.

19.2. Экстремум функции

Максимумом (минимумом) функции $y = f(x)$ называют такое ее значение, которое больше (меньше) всех ее других значений в окрестности рассматриваемой точки.

Максимум и минимум функции имеют локальный характер, поскольку отдельные минимумы некоторой функции могут оказаться больше максимумов той же функции (рис. 19.1).

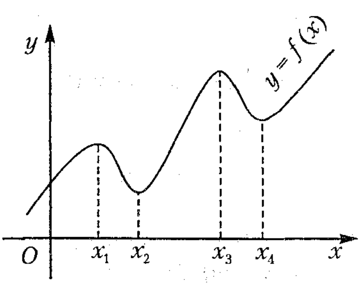


Рис. 19.1

Максимум и минимум функции называются *экстремумом* функции. Значение аргумента, при котором достигается экстремум, называется точкой экстремума. На рисунке 19.1 значения x_1, x_2, x_3 и x_4 являются точками экстремума рассматриваемой функции.

Критическими точками функции называют те значения аргумента, при которых производная функции равна нулю или не существует. Критические точки функции находят, решая уравнение $f'(x)=0$. Если функция имеет экстремум, то он может быть только в критических точках.

Алгоритм определения точек экстремума функции:

1) находим $f'(x)$;

2) находим критические точки функции, решая уравнение $f'(x)=0$;

3) наносим критические точки на $D(f)$ функции;

4) определяем знак производной функции на полученных промежутках;

5) определяем точки экстремума по правилу:

• если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «+» на «–», то имеем точку максимума;

• если с «–» на «+» – точку минимума.

19.3. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на заданном отрезке

Рассмотрим функцию $y=f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Свое наибольшее и наименьшее значение она может принимать либо на концах отрезка, либо в точках экстремума.

Алгоритм решения задач:

1) находим $f'(x)$;

2) находим критические точки функции, решая уравнение $f'(x)=0$;

3) находим значение функции на концах отрезка и в критических точках, принадлежащих данному отрезку;

4) определяем наибольшее и наименьшее значение из полученных.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все правильные варианты ответов (1–2):

1. Функция $y=f(x)$ возрастает на заданном промежутке, если:

1) из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$;
2) из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)>f(x_2)$;
3) производная функции положительна;
4) производная функции отрицательна;
5) производная функции равна нулю.

2. Функция $y = f(x)$ убывает на заданном промежутке, если:

1) $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
2) $x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
3) $f'(x) \neq 0$;
4) $f'(x) = 0$;
5) $f'(x) > 0$;
6) $f'(x) < 0$.

Укажите все необходимые действия:

3. Чтобы найти промежутки возрастания и убывания функции необходимо:

1) найти область определения функции;
2) найти нули функции;
3) найти производную функции;
4) найти критические точки функции;
5) нанести критические точки на координатную прямую;
6) нанести критические точки на $D(f)$ функции;
7) определить знак функции на полученных промежутках;
8) определить знак производной функции на полученных промежутках.

Укажите все правильные варианты ответов:

4. Критическими точками функции являются точки, в которых:

1) производная функции равна нулю;
2) производная функции не существует;
3) производная функции равна нулю или не существует;
4) функция равна нулю;
5) функция больше нуля.

Укажите все необходимые действия:

5. Чтобы найти критические точки функции $y = f(x)$, необходимо:

1) решить уравнение $f'(x) = 0$;
2) решить уравнение $f(x) = 0$;
3) решить уравнения $f'(x) = 0$ и $f(x) = 0$;
4) решить систему неравенств $f'(x) > 0$ и $f(x) > 0$;
5) решить совокупность неравенств $f'(x) < 0$ и $f(x) < 0$.

Укажите все правильные варианты ответов:

6. Точками экстремума функции являются:

1) критические точки функции;

3) критические точки функции; при переходе через которые функция меняет знак;

4) критические точки функции; при переходе через которые производная функции не меняет знак;

5) критические точки функции; при переходе через которые производная функции меняет знак.

Укажите все необходимые действия (7–8):

7. Чтобы найти точки экстремума функции необходимо:

1) найти область определения функции;
2) найти нули функции;
3) найти производную функции;
4) найти критические точки функции;
5) нанести критические точки на координатную прямую;
6) нанести критические точки на $D(f)$ функции;
7) определить знак функции на полученных промежутках;
8) определить знак производной функции на полученных промежутках.

8. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке, необходимо:

1) найти нули функции;
2) найти производную функции;
3) найти критические точки функции;
4) найти значение функции на концах отрезка;
5) найти значение функции в критических точках;
6) найти значение функции в критических точках, принадлежащих заданному отрезку.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8
Вариант правильного ответа	1; 3	2; 6	1; 3; 4; 6; 8	3	1	5	1; 3; 4; 6; 8	2; 3; 4; 6

Примеры

Пример 1. Найдите все интервалы, на которых возрастает функция $y=6\sqrt{x-1}-3x+18$.

Решение. 1. Запишем область определения функции:

$$x-1\geq 0\text{, откуда } x\geq 1.$$

2. Найдем производную функции:

$$f'(x)=\left(6\sqrt{x-1}\right)'-(3x)'+18'=\frac{6}{2\sqrt{x-1}}-3=\frac{3}{\sqrt{x-1}}-3.$$

3. Найдем промежутки возрастания функции, решая неравенство $f'(x)>0$. Получим: $\frac{3}{\sqrt{x-1}}-3>0$, $\frac{1}{\sqrt{x-1}}>1$, $1>\sqrt{x-1}$, $x-1<1$, откуда $x<2$ и $x\neq 1$.

Учитывая область определения функции, запишем: $x\in(1;\ 2)$.

Ответ: $(1;\ 2)$.

Пример 2. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=\left(2^x-1\right)\left(4-2^x\right)^2$.

Решение. 1. Найдем производную заданной функции:

$$f'(x)=\left(2^x-1\right)'\left(4-2^x\right)^2+\left(2^x-1\right)\left(\left(4-2^x\right)^2\right)'=2^x\cdot\ln2\cdot\left(4-2^x\right)^2-$$

$$-\left(2^x-1\right)\cdot2\cdot\left(4-2^x\right)\cdot2^x\cdot\ln2=2^x\ln2\left(2^x-4\right)\left(2^x-4+2\cdot2^x-2\right)=$$

$$=2^x\ln2\left(2^x-4\right)\left(3\cdot2^x-6\right)=3\cdot2^x\ln2\left(2^x-4\right)\left(2^x-2\right).$$

2. Найдем критические точки функции, решая уравнение $f'(x)=0$. Запишем: $3\cdot2^x\ln2\left(2^x-4\right)\left(2^x-2\right)=0$. Поскольку $3\cdot2^x\ln2\neq0$, то $2^x-4=0$ или $2^x-2=0$, откуда $x=2$ или $x=1$.

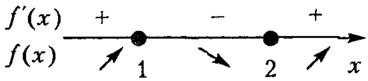


Рис. 19.2

3. Нанесем критические точки на область определения функции и установим знак производной функции на каждом из полученных промежутков (рис. 19.2).

4. Из рисунка 19.2 видим, что на промежутках $(-\infty;\ 1)$ и $(2;\ +\infty)$ производная функции положительна, следовательно, функция возрастает на этих промежутках. На промежутке $(1;\ 2)$ производная функции отрицательна, следовательно, функция убывает на этом промежутке.

Ответ: Возрастает на $(-\infty;\ 1)$ и на $(2;\ +\infty)$, убывает на $(1;\ 2)$.

Пример 3. Найдите число точек экстремума функции

$$y=(1-x)^3(3-x)^3.$$

Решение. 1. Запишем функцию в виде $y=((1-x)(3-x))^3$ или $y=\left(x^2-4x+3\right)^3$ и найдем ее производную. Получим:

$$y'=3\left(x^2-4x+3\right)^2\left(x^2-4x+3\right)'=3(2x-4)((x-1)(x-3))^2=$$

$$=6(x-2)(x-1)^2(x-3)^2.$$

2. Найдем критические точки функции, решая уравнение $6(x-2)(x-1)^2(x-3)^2=0$. Получим $x_1=2,\ x_{2,3}=1,\ x_{3,4}=3$.

3. Нанесем критические точки функции на ее область определения и определим знак производной на полученных промежутках (рис. 19.3).

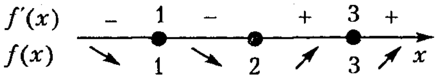


Рис. 19.3

Из рисунка 19.3 видим, что при переходе через критические точки 1 и 3 производная функции не меняет знак, а при переходе через точку 2 – меняет. Следовательно, имеем одну точку экстремума функции: $x = 2$.

Ответ: 1.

Пример 4. Найдите значение функции $y = -xe^{1-2x^2}$ в точке минимума.

Решение. 1. Найдем производную функции. Получим:

$$f'(x) = (-x)' e^{1-2x^2} + (-x)\left(e^{1-2x^2}\right)' = -e^{1-2x^2} - xe^{1-2x^2}\left(1-2x^2\right)' =$$

$$= -e^{1-2x^2} - xe^{1-2x^2}(-4x) = -e^{1-2x^2}\left(1-4x^2\right).$$

2. Найдем критические точки функции, решая уравнение $1-4x^2 = 0$, так как $-e^{1-2x^2} \neq 0$. Получим $x = \pm\frac{1}{2}$.

3. Поскольку $D(f) = R$, то нанесем критические точки на координатную прямую и определим знаки производной функции на полученных промежутках (рис. 19.4).

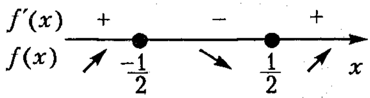


Рис. 19.4

4. Из рисунка 19.4 видим, что $x_{\min} = \frac{1}{2}$, тогда

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{1-2\cdot\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = -0{,}5\sqrt{e}.$$

Ответ: $-0{,}5\sqrt{e}$.

Пример 5. Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y = x - \frac{3}{\sqrt[3]{x^{-1}}}$, которые она принимает на отрезке $[-27; -0{,}125]$.

Решение. 1. Найдем производную функции

$$y' = x' - \left(3x^{\frac{1}{3}}\right)' = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

2. Найдем критические точки функции, решая уравнение $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 0$. Получим: $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 1$, $\sqrt[3]{x^2} = 1$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$.

3. Найдем значение функции на концах заданного отрезка, то есть в точках $x = -27$ и $x = -0{,}125$, и в критической точке $x = -1$ (критическая точка $x = 1$ не принадлежит заданному отрезку):

$$f(-27) = -27 + 9 = -18;\ f(-1) = -1 + 3 = 2;\ f\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} = 1\frac{3}{8}.$$

4. Наименьшее значение функции на заданном отрезке $m = -18$, а наибольшее значение функции $M = 2$.

Тогда $m + M = -18 + 2 = -16$.

Ответ: -16.

Пример 6. Число 20 разбейте на такие два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

Решение. Пусть первое слагаемое равно x, тогда второе слагаемое, согласно условию задачи, равно $20 - x$. Запишем сумму квадратов чисел x и $20 - x$: $x^2 + (20 - x)^2$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + (20 - x)^2 = 2x^2 - 40x + 20^2$ и найдем ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке $[0;\ 20]$.

1. Найдем производную функции: $f'(x) = 4x - 40$.

2. Найдем критические точки функции, решая уравнение $4x - 40 = 0$. Получим $x = 10$.

3. Найдем значение функции на концах отрезка $[0;\ 20]$ и в критической точке $x = 10$:

$$f(0) = 400,\ f(20) = 400,\ f(10) = 200.$$

Очевидно, что свое наименьшее значение на заданном отрезке функция принимает в точке $x = 10$. Следовательно, искомые числа 10 и 10.

Ответ: 10 и 10.

Пример 7. Определите значение a, при котором уравнение $x^3 - 3x^2 - 9x - 0{,}5a = 0$ имеет три корня.

Решение. Запишем уравнение в виде $2x^3 - 6x^2 - 18x = a$ и рассмотрим функции $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x$ и $f(x) = a$. Уравнение имеет три корня, если графики указанных функций имеют три точки пересечения.

Для того, чтобы построить схематически график функции $f(x)=2x^3-6x^2-18x$, проведем ее исследование с помощью производной:

1. Найдем производную функции: $f'(x)=6x^2-12x-18$.

2. Найдем критические точки функции, решая уравнение $6x^2-12x-18=0$ или $x^2-2x-3=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=3$.

3. Найдем точки экстремума функции (рис. 19.5):

$$x_{\max}=-1,\ x_{\min}=3.$$

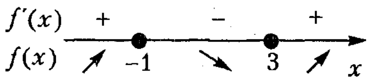


Рис. 19.5

4. Найдем значения функции в точках экстремума:

$$f(-1)=-2-6+18=10,$$

$$f(3)=54-54-54=-54.$$

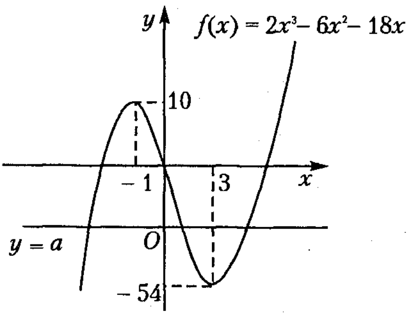


Рис. 19.6

5. Построим схематически графики функций $f(x)=2x^3-$ $-6x^2-18x$ и $f(x)=a$ (семейство прямых, параллельных оси абсцисс) (рис. 19.6). Из рисунка 19.6 видим, что графики функций будут иметь три точки пересечения, при условии, что $-54<a<10$.

Ответ: $(-54;\ 10)$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите промежутки возрастания и убывания функций (1–4):

1. $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$. 2. $f(x)=-x(x-3)^2$.

3. $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ 4. $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}$.

Найдите точки экстремума функций (5–9):

5. $f(x)=x\ln x$. 6. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

7. $y=\dfrac{\ln x+2}{x}$. 8. $y=x^2e^{-x}$.

9. $y=x^2-\ln(1+2x)$.

10. Найдите число точек экстремума функции $y=\left(x^2-1\right)^3$.

11. Найдите значение функции $y=\dfrac{x^{\frac{6}{5}}-1}{x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{2}{5}}+1}+0{,}4x+1$ в точке максимума.

12. Найдите значение $m+2M$, если m и M – значения функции $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-5}$ в точках минимума и максимума соответственно.

Найдите наибольшее и наименьшее значение функций на заданных промежутках (13–23):

13. $y=x^3-3x^2+3x+2;\ [-2;\ 2]$.

14. $y=\dfrac{x}{8}+\dfrac{2}{x};\ [1;\ 6]$.

15. $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}\sin x;\ [0;\ \pi]$.

16. $f(x)=x+\cos^2 x;\ \left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

17. $f(x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}2x;\ \left[\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{3}\right]$.

18. $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2x-1}};\ [0{,}75;\ 2]$.

19. $f(x)=x+\dfrac{8}{x^4};\ [-2;\ 1]$.

20. $f(x)=(5-x)2^{-x};\ [-1;\ 0]$.

21. $f(x)=2^{\sqrt[3]{x^2}};\ [-8;\ -1]$.

22. $f(x)=3\sqrt[3]{(x-1)^2}+x;\ [-7;\ 0]$.

23. $f(x)=2x^2-\ln x;\ [1;\ e]$.

24. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=2^x+2^{2-x}$ на отрезке $[0;\ 2]$.

25. Найдите сумму квадратов наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$ на отрезке $[-1;\ 2]$.

26. Число 26 разложите на два слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

27. Найдите такое положительное число, сумма которого и обратного ему числа будет наименьшей из возможных.

28. Найдите число, которое превышало бы свой квадрат на максимальное значение.

29. Число 180 разбейте на три положительных слагаемых так, чтобы два из них относились как 1:2, а произведение трех слагаемых было наибольшим.

30. Найдите кратчайшее расстояние от точки $M(3;\ 4)$ до прямой $y=-2x$.

31. Найдите высоту конической воронки наибольшего объема, если ее образующая равна $3\sqrt{3}$.

32. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$ на отрезке $[0;\ 2]$ равно 3.

33. Найдите множество значений a, таких, что функция $f(x)=8(2a+1)\cos x-\sin 2x+(16a^2+16a-26)x$ возрастает на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

34. Функция задана формулой $y=\sqrt{ax^3-6x^2+3x}$. Найдите все значения a, при которых данная функция определена и монотонно возрастает для всех $x>0$.

35. Найдите наименьшее целое значение p, при котором функция $f(x)=\cos x-px+q$ убывает на всей числовой прямой.

36. Найдите количество корней уравнения $x^9-12x^6=a$, если $a\in(-137;\ -1)$.

37. Действительные числа x, y, a таковы, что $\begin{cases}x+y=a-1,\\ xy=a^2-7a+14.\end{cases}$

Найдите все значения a, при которых сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение.

Ответы: **1.** Возрастает на $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, убывает на $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** Возрастает на $(1;\ 3)$, убывает на $(-\infty;1)$

и на $(3;\ +\infty)$. **3.** Возрастает на $(-\infty;\ -0{,}5)$, убывает на $(-0{,}5;\ +\infty)$. **4.** Возрастает на $(-6;\ 0)$ и на $(0;\ 2)$, убывает на $(-\infty;\ -6)$ и на $(2;\ +\infty)$. **5.** $x_{\min}=\frac{1}{e}$. **6.** $x_{\min}=e$. **7.** $x_{\max}=\frac{1}{e}$. **8.** $x_{\min}=0$, $x_{\max}=2$. **9.** $x_{\min}=0{,}5$. **10.** 1. **11.** 0,6. **12.** 5,5. **13.** $y_{наим}=-24$, $y_{наиб}=4$. **14.** $y_{наим}=1$, $y_{наиб}=2{,}125$. **15.** $y_{наим}=0$, $y_{наиб}=0{,}375\sqrt{3}$. **16.** $y_{наим}=1$, $y_{наиб}=\frac{\pi}{2}$. **17.** $y_{наим}=1$, $y_{наиб}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **18.** $y_{наим}=1$, $y_{наиб}=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$. **19.** $y_{наим}=-1{,}5$, $y_{наиб}=7$. **20.** $y_{наим}=5$, $y_{наиб}=12$. **21.** $y_{наим}=2$, $y_{наиб}=16$. **22.** $y_{наим}=3$, $y_{наиб}=5$. **23.** $y_{наим}=2$, $y_{наиб}=2e^2-1$. **24.** 4. **25.** 41. **26.** 13 и 13. **27.** 1. **28.** 0,5. **29.** 40; 60; 80. **30.** $2\sqrt{5}$. **31.** 3. **32.** $\{1-\sqrt{2};\ 5+\sqrt{10}\}$. **33.** $a\in(-\infty;-1-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$. **34.** $a>4$. **35.** 2. **36.** 3. **37.** $a=6$.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Функция $y=x^3+4x+14$ возрастает на промежутке	1) $[1;\ 4]$; 2) $(-\infty;\ 0)$; 3) $(-\infty;\ +\infty)$; 4) $[-1;\ 4)$; 5) $(0;\ +\infty)$.
2	Длина промежутка убывания функции $f(x)=-x^2\left(1-\sqrt{x}\right)$ равна	1) $\frac{16}{25}$; 2) $\frac{26}{25}$; 3) $\frac{33}{25}$; 4) $\frac{25}{16}$; 5) 32.
3	Длина промежутка возрастания функции $f(x)=x^2\sqrt{1-2x}$ равна	1) 2; 2) 13,4; 3) 12; 4) 0,56; 5) 0,4.

№	Задания	Варианты ответов
4	Функция $f(x)=\frac{(a^2-1)x^3}{3}+(a-1)x^2+2x+5$ возрастает на R при наибольшем целом отрицательном значении a, равном	1) -15; 2) -4; 3) -5; 4) $-0{,}7$; 5) -25.
5	Сумма значений функции $y=\frac{x}{x^2+1}$ в точках экстремума равна	1) 0; 2) 1,5; 3) 0,25; 4) 2; 5) -1.
6	Если x_0 – точка экстремума функции $y=x^2+x^{-1}+6^{-1}$, то значение $3x_0^3$ равно	1) 8; 2) 3; 3) 1,5; 4) 27; 5) 169.
7	Точкой экстремума функции $f(x)=\frac{1}{e^x}-\frac{1}{e^{2x}}$ является	1) $\ln 12$; 2) $\ln 2$; 3) $-\ln 2$; 4) $\ln^{-1} 2$; 5) $1+\ln 2$.
8	Критическими точками функции $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ являются точки	1) 3; 2) 1; 3) -1 и 3; 4) -1, 1 и 3; 5) 1 и 3.
9	Число точек экстремума функции, производная которой имеет вид $f'(x)=(x-e)^2x^3(x+e)$, равно	1) 5; 2) 6; 3) 4; 4) 1; 5) 2.
10	Сумма наибольшего и наименьшего значений функции $y=\frac{x}{5}+\frac{5}{x}$ на отрезке $[-5;\ -2]$ равна	1) $5\frac{1}{3}$; 2) $-15\frac{2}{3}$; 3) $\frac{11}{3}$; 4) $-\frac{4}{3}$; 5) $-\frac{49}{10}$.
11	Если m – наименьшее, а M – наибольшее значение функции $y=x^5-x^3+x+2$ на отрезке $[-1;\ 1]$, то значение M^m равно	1) 3; 2) 4; 3) 25; 4) 27; 5) 36.

№	Задания	Варианты ответов
12	Максимальное значение функции $f(x)=2x+18\pi^2x^{-1}+\cos x$ на интервале $(0;\,10)$ равно	1) $12\pi-1$; 2) 12π; 3) $2\pi+1$; 4) -12π; 5) 21π .
13	Кратчайшее расстояние от точки $M(0;\,1)$ до графика функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}x}{12}$ равно	1) $\dfrac{7}{2\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{\dfrac{48}{49}}$; 3) $\dfrac{\sqrt{15}}{12}$; 4) $\dfrac{7}{\sqrt{12}}$; 5) $\sqrt{3}$.
14	Решением неравенства $\cos x\geq 1-0{,}5x^2$ на промежутке $\left(0;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ является	1) **R**; 2) $\varnothing$; 3) 1; 4) $\left(0;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$; 5) $\left[0;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	3	1	5	2	1	3	2
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	4	5	5	1	1	2	4

20 ВЕКТОРЫ

20.1. Основные понятия и определения

Вектором называют направленный отрезок.

1. Чтобы найти ***координаты вектора***, необходимо из координат конца вектора вычесть соответственные координаты его начала. Если точка $A(x_1;y_1;z_1)$ – начало вектора, а точка $B(x_2;y_2;z_2)$ – конец вектора, то $\overline{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$.

2. ***Координаты середины отрезка***.

Если точки $A(a_1,a_2,a_3)$ и $B(b_1,b_2,b_3)$ концы отрезка, а точка M его середина ($AM = MB$), то $M\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2};\frac{a_3+b_3}{2}\right)$.

2. ***Длину вектора*** (длину отрезка) находят по формуле:

а) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, если известны координаты точек $A(x_1;y_1;z_1)$ – начала и $B(x_2;y_2;z_2)$ – конца вектора;

б) $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$, если известны координаты вектора $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$.

3. Нуль-вектором называется вектор $\overline{AA}$. Начало и конец этого вектора совпадают.

4. Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

5. Коллинеарными называются векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной прямой).

Условие коллинеарности векторов: векторы $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ коллинеарны, если их соответствующие координаты пропорциональны, то есть $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=k$. При этом, если:

а) $k>0$, то векторы сонаправлены $\left(\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}\right)$;

б) $k<0$, то векторы противоположно направлены $\left(\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}\right)$.

6. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ противоположны, если $\left|\overline{AB}\right|=\left|\overline{BA}\right|$ и $\overline{AB}\uparrow\downarrow\overline{BA}$.

7. Векторы, лежащие в параллельных плоскостях (или в одной плоскости), называются компланарными.

20.2. Линейные действия над векторами

1. ***Сложение векторов*** на плоскости.

Векторы складывают по правилу треугольника или по правилу параллелограмма:

а) правило треугольника: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ (рис. 20.1);

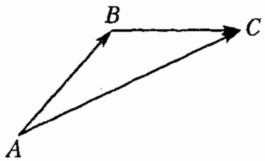


Рис. 20.1

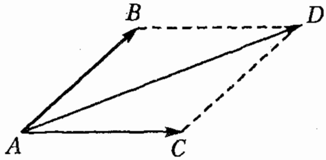


Рис. 20.2

б) правило параллелограмма: $\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AD}$ (рис. 20.2).

2. ***Вычитание векторов*** на плоскости. Чтобы вычесть из вектора $\bar{a}$ вектор $\bar{b}$, необходимо заменить вычитание векторов сложением вектора $\bar{a}$ и вектора $-\bar{b}$: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+\left(-\bar{b}\right)$ (рис. 20.3).

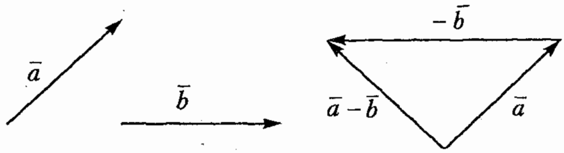


Рис. 20.3

3. ***Сложение векторов с заданными координатами.***

Чтобы сложить (вычесть) векторы с заданными координатами, необходимо сложить (вычесть) их соответствующие координаты:

$$\bar{a}(a_1,a_2,a_3)+\bar{b}(b_1,b_2,b_3)=\overline{(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)}.$$

4. ***Умножение вектора на число.***

Чтобы умножить вектор на число, необходимо каждую координату вектора умножить на это число: $k\cdot\overline{(a_1,a_2,a_3)}=\overline{(ka_1;ka_2;ka_3)}$

20.3. Скалярное произведение векторов

Формулы для вычисления ***скалярного произведения*** векторов:

а) если известны длины векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и величина α угла между ними, то скалярное произведение векторов находят по формуле

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha;$$

б) если известны координаты векторов $\bar{a}(a_1,a_2,a_3)$ и $\bar{b}(b_1,b_2,b_3)$, то скалярное произведение векторов находят по формуле

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3.$$

Скалярным квадратом вектора $\bar{a}$ называют скалярное произведение вектора $\bar{a}$ на себя: $(\bar{a})^2=|\bar{a}|^2$.

Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находят по формуле

$$\cos\alpha=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

Условие перпендикулярности векторов: векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю.

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все варианты правильных ответов (1–5):

1. Чтобы найти координаты вектора необходимо:

1) из координат начала вектора вычесть соответственные координаты его конца;

2) из координат конца вектора вычесть соответственные координаты его начала;

3) сложить соответственные координаты начала и конца вектора;

4) найти сумму произведений соответственных координат начала и конца вектора;

5) найти разность произведений соответственных координат начала и конца вектора.

2. Если известны координаты точек $A(x_1;y_1;z_1)$ – начала и $B(x_2;y_2;z_2)$ – конца вектора, то длину вектора $\overline{AB}$ находят по формуле:

1) $|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2+x_1)^2+(y_2+y_1)^2+(z_2+z_1)^2}$;

2) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$;

3) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2 (z_2 - z_1)^2}$;

4) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 x_1)^2 + (y_2 y_1)^2 + (z_2 z_1)^2}$;

5) $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

3. Если известны координаты вектора $\overline{a}(x;y;z)$, то длину вектора $\overline{a}$ находят по формуле:

1) $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

2) $\left|\overline{a}\right| = x^2 + y^2 + z^2$;

3) $\left|\overline{a}\right| = x + y + z$;

4) $\left|\overline{a}\right|^2 = x^2 + y^2 + z^2$;

5) $\overline{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4. Векторы $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ коллинеарны, если:

1) $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$;

2) $\dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$;

3) $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_3}{b_3}$;

4) $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{b_3}{a_3}$;

5) $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

5. Если известны векторы $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$ и величина α угла между ними, то скалярное произведение векторов находят по формуле:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\alpha$;

2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \cos\alpha$;

3) $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 \cdot a_2 \cdot b_2 \cdot a_3 \cdot b_3$;

4) $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$;

5) $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

Установите соответствие:

6. Линейные действия с векторами $\overline{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\overline{b}(b_1;b_2;b_3)$:

ДЕЙСТВИЕ	РЕЗУЛЬТАТ
1) $\bar{a}+\bar{b}$;	а) $\overline{(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)}$;
2) $\bar{b}-\bar{a}$;	б) $\overline{(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)}$;
3) $-k\cdot\bar{a}$.	в) $\overline{(b_1-a_1;b_2-a_2;b_3-a_3)}$;
	г) $-\overline{(ka_1;ka_2;ka_3)}$;
	д) $\overline{(ka_1;ka_2;ka_3)}$;
	е) $\overline{(a_1-k;a_2-k;a_3-k)}$.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6
Вариант правилильного ответа	2	2, 5	1, 4	4, 5	1, 5	1 – а; 2 – в; 3 – г.

Примеры

Пример 1. Найдите такое значение m, при котором длина вектора $\bar{a}\left(-2;\ \sqrt{2}m;\ 3\right)$ превосходит длину вектора $\bar{b}\ (-m;\ -5;\ 6)$.

Решение. Найдем длины векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$|\bar{a}|=\sqrt{(-2)^2+\left(\sqrt{2}m\right)^2+3^2}=\sqrt{2m^2+13},$$

$$|\bar{b}|=\sqrt{(-m)^2+(-5)^2+6^2}=\sqrt{m^2+61}.$$

Поскольку длина вектора $\bar{a}$ превосходит длину вектора $\bar{b}$, то запишем неравенство $\sqrt{2m^2+13}>\sqrt{m^2+61}$. Возведя обе части неравенства в квадрат и приведя подобные слагаемые, получим $2m^2+13>m^2+61$, $m^2>48$, откуда $|m|>4\sqrt{3}$.

Ответ: $|m|>4\sqrt{3}$.

Пример 2. Даны векторы $\bar{a}\ (2-m;\ 4)$, $\bar{b}\ (0;\ -n)$ и $\bar{c}\ (m-1;\ 3)$. Найдите $m+n$, если $\bar{a}=\bar{b}+2\bar{c}$.

Решение. Запишем уравнение $\bar{a}=\bar{b}+2\bar{c}$ в координатной форме: $\left(\overline{2-m;\ 4}\right)=\left(\overline{0;\ -n}\right)+2\left(\overline{m-1;\ 3}\right)$. Умножая координаты вектора c на 2 и складывая координаты вектора $\bar{b}$ и соответствующие координаты вектора $2\bar{c}$, получим $\left(\overline{2-m;\ 4}\right)=\left(\overline{0;\ -n}\right)+\left(\overline{2m-2;\ 6}\right)$, $\left(\overline{2-m;\ 4}\right)=\left(\overline{2m-2;\ 6-n}\right)$. Тогда $2-m=2m-2$ и $4=6-n$; откуда $m=\dfrac{4}{3}$ и $n=2$, а $m+n=3\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $3\dfrac{1}{3}$.

Пример 3. Найдите произведение чисел k и p, при которых векторы $\bar{a}$ $(k;\ k+2p;\ 4)$ и $\bar{b}$ $(1;\ k+p;\ -2)$ коллинеарны.

Решение. Согласно условию коллинеарности векторов запишем $\dfrac{k}{1}=\dfrac{k+2p}{k+p}=\dfrac{4}{-2}$ или $\begin{cases} k=-2, \\ \dfrac{k+2p}{k+p}=-2. \end{cases}$ Подставляя значение $k=-2$ в уравнение $\dfrac{k+2p}{k+p}=-2$, найдем значение p:

$$\frac{-2+2p}{-2+p}=-2,\ p-1=2-p,\ p=1{,}5.$$

Найдем произведение чисел k и p: $-2\cdot 1{,}5=-3$.

Ответ: -3.

Пример 4. Найдите длину вектора $\bar{a}-\bar{b}$, если $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=6$ и $|\bar{a}+\bar{b}|=9$.

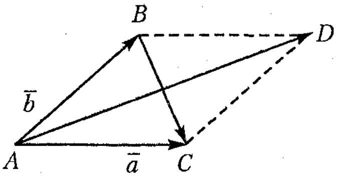


Рис. 20.4

Решение. На векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах построим параллелограмм $ABCD$. Согласно рисунку 20.4 запишем: $\bar{a}+\bar{b}=\overline{AD}$, $\bar{a}-\bar{b}=\overline{BC}$. Тогда $AC=3$, $AB=6$, $AD=9$ и $BC=|\bar{a}-\bar{b}|$.

По свойству диагоналей параллелограмма имеем:
$AD^2+BC^2=2AB^2+2AC^2$ или $9^2+BC^2=2\cdot 6^2+2\cdot 3^2$, $BC^2=9$, откуда $BC^2=3$ и $|\bar{a}-\bar{b}|=3$.

Ответ: 3.

Пример 5. Известно, что $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=6$ и $|\bar{a}|=1$, $|\bar{b}|=2$, $|\bar{c}|=3$. Найдите значение суммы скалярных произведений векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\bar{a}$ и $\bar{c}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

Решение. 1. Возведем обе части равенства $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=6$ в квадрат и получим $\bar{a}^2+\bar{b}^2+\bar{c}^2+2\overline{ab}+2\overline{ac}+2\overline{bc}=36$. Заменим скалярные квадраты векторов квадратами их длин:

$$|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+2\left(\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc}\right)=36. \qquad (*)$$

2. Запишем сумму скалярных произведений векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\bar{a}$ и $\bar{c}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$: $\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc}=x$.

3. Подставляя в равенство (*) значения $|\bar{a}|^2=1$, $|\bar{b}|^2=4$, $|\bar{c}|^2=9$ и $\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc}=x$, получим $1+4+9+2x=36$, откуда $x=11$.

Ответ: 11.

Пример 6. При каком значении n угол между векторами $\bar{a}(6;-2;-n)$ и $\bar{b}(3;\ 0;\ 2n)$ острый?

Решение. Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находят по формуле $\cos\alpha=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$. Согласно условию $0°<\alpha<90°$, значит $\cos\alpha>0$. Так как $|\bar{a}|>0$ и $|\bar{b}|>0$, то $\cos\alpha>0$ при условии, что $\bar{a}\cdot\bar{b}>0$.

Найдем скалярное произведение векторов a и b, и решим неравенство $\bar{a}\cdot\bar{b}>0$: $6\cdot3+(-2)\cdot0+(-n)\cdot2n>0$, $n^2<9$, $|n|<3$, $n\in(-3;\ 3)$.

Ответ: $n\in(-3;\ 3)$.

Пример 7. Векторы $\bar{a}(-5;\ 1;\ 2)$ и $\bar{b}(-1;\ 5;\ -2)$, проведенные из точки C, являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника ABC. Найдите площадь треугольника.

Решение. Площадь треугольника ABC (рис. 20.5) найдем по формуле $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CD$, где CD – высота и медиана $\Delta\, ABC$. По правилу параллелограмма $\overline{CD}=\frac{1}{2}\left(\bar{a}+\bar{b}\right)$, $\overline{CD}=\overline{(-3;\ 3;\ 0)}$.

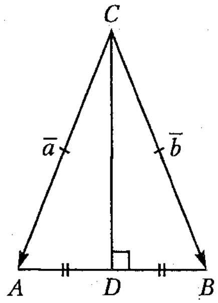


Рис. 20.5

Зная координаты вектора $\overline{CD}$, найдем его длину: $\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$. По правилу треугольника $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{b}\quad\overline{a}$, откуда $\overline{AB}(4;\ 4;\ -4)$. Найдем длину вектора $\overline{AB}$: $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{16+16+16}=4\sqrt{3}$.

Найдем площадь треугольника ABC:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}=6\sqrt{6}.$$

Ответ: $6\sqrt{6}$.

Пример 8. Даны векторы $\overline{a}\ (3;\ -1)$, $\overline{b}\ (-1;\ 2)$ и $\overline{c}\ (1;\ -7)$. Найдите сумму коэффициентов в разложении вектора $\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Решение. Запишем $\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}=\overline{d}$ и найдем координаты вектора $\overline{d}$: $\overline{d}(3+1-1;\ -1-2+7)$, $\overline{d}(3;\ 4)$. Разложим вектор $\overline{d}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{d}=x\overline{a}+y\overline{b}$, где x и y – искомые коэффициенты. Зная координаты векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{d}$, получим:

$\overline{(3;\ 4)}=x\overline{(3;\ -1)}+y\overline{(-1;\ 2)}$, $\left(\overline{3;\ 4}\right)=\left(\overline{3x;\ -x}\right)+\left(\overline{-y;\ 2y}\right)$,

$\left(\overline{3;\ 4}\right)=\left(\overline{3x-y;\ -x+2y}\right)$, что равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}3x-y=3,\\-x+2y=4;\end{cases}\quad\begin{cases}3x-y=3,\\-3x+6y=12;\end{cases}\quad\begin{cases}3x-y=3,\\5y=15;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$$

Тогда $x+y=5$.

Ответ: 5.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каком значении α векторы $\overline{a}\ (-2;\ -3;\ 4)$ и $\overline{b}\ (-\alpha;\ 6;\ -8)$ коллинеарны?

2. Найдите периметр треугольника с вершинами $A(-1;\ 1;\ -2)$, $B(-3;\ -1;\ -3)$ и $C(-7;\ 3;\ -5)$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ заданы векторы $\overline{AB}(3;\ -1;\ -2)$, $\overline{BC}(-2;\ 5;\ 1)$, $\overline{AD}(-3;\ 4;\ 8)$, а также векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ – его диагонали. Найдите модули скалярного произведения векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$.

4. В треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Известно, что $\overline{AB}(3;\ -5;\ 6)$, $\overline{MN}(-2;\ 1;\ 7)$. Найдите сумму координат вектора $\overline{BC}$.

5. В параллелограмме $ABCD$ заданы вершины $A(2;\ -5;\ 4)$, $B(1;\ -3;\ 1)$, $C(-3;\ 4;\ -6)$. Найдите сумму координат четвертой вершины параллелограмма.

6. Найдите синус угла между векторами $\bar{a}(3;\ 0;\ -4)$ и $\bar{b}(2;\ 2;\ -1)$.

7. Даны точки $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(1;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 0)$, $D(2;\ -3;\ 1)$. Найдите тангенс угла α между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

8. Найдите угол при вершине C в треугольнике с вершинами $A(-4;\ 3)$, $B(-8;\ 7)$ и $C(-1;\ 1)$.

9. Вектор $\bar{a}\ (x;\ 1;\ 12)$ перпендикулярен вектору $\bar{b}\ (1;\ 2;\ 0)$. Найдите модуль вектора $\bar{a}$.

10. Даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, удовлетворяющие условию $\bar{a}=\bar{b}+\bar{c}$. Зная, что $|\bar{a}|=3, |\bar{b}|=4, |\bar{c}|=5$, найдите $\overline{bc}-\overline{ab}-\overline{ca}$.

11. Найдите $|\bar{b}|$, если $|\bar{a}|=4,\ |\bar{a}+\bar{b}|=5$ и $|\bar{a}-\bar{b}|=5$.

12. Длина вектора $\bar{a}+\bar{b}$ равна $\sqrt{13}$. Найдите угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}|=4,\ |\bar{b}|=3$.

13. Дан параллелограмм $ABCD$ с основаниями AD и BC. Точка K – середина стороны BC; точка L – середина DC; $\overline{AK}=\bar{a}, AL=\bar{b}$. Выразите $\overline{BD}$ и $\overline{AC}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

14. Даны векторы: $\bar{p}(3;-2;1),\bar{q}(-1;1;-2),\bar{r}(2;1;-3),\bar{c}(11;-6;5)$.

Найдите числа x, y, z, если $\bar{c}=x\bar{p}+y\bar{q}+z\bar{r}$.

15. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарные. Найдите значения α и β, если векторы $\bar{c}=\alpha\cdot\bar{a}+\beta\bar{b}$ и $\bar{d}=(\beta+1)\bar{a}+(2-\alpha)\bar{b}$ равны.

16. В равнобедренном треугольнике ABC $|AB|=|AC|=8$. Точка E делит боковую сторону AB в отношении 3:1, считая от вершины B. Найдите угол между $\overline{CE}$ и $\overline{CA}$, если $|\overline{CA}|=12$.

17. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите вектор по векторам $\overline{DA_1}$, $\overline{DC_1}$ и $\overline{DB_1}$.

18. Векторы $\overline{AB}(-3;\ 4;\ 0)$ и $\overline{AC}(5;\ -2;\ 4)$ служат сторонами треугольника ABC. Найдите длину медианы AM.

Ответы: **1.** -4. **2.** 16. **3.** 4. **4.** 8. **5.** -3. **6.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **7.** $\frac{\sqrt{38}}{5}$. **8.** $\arccos\frac{21}{\sqrt{1105}}$. **9.** $\sqrt{149}$. **10.** 25. **11.** 3. **12.** 120°. **13.** $\overline{BD}=2(\bar{b}-\bar{a})$; $\overline{AC}=\frac{2}{3}(\bar{a}+\bar{b})$. **14.** $\bar{c}=2\bar{p}-3\bar{q}+\bar{r}$. **15.** $\alpha=\frac{3}{2}$; $\beta=\frac{1}{2}$. **16.** $\arccos\frac{3\sqrt{7}}{8}$. **17.** $\overline{AA_1}=\overline{DA_1}-\overline{DB_1}+\overline{DC_1}$. **18.** $3\sqrt{2}$.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Если известны векторы $\bar{a}(3;\ -2;\ 6)$ и $\bar{b}(-2;\ 0;\ 1)$, то сумма координат вектора $2\bar{a}-\frac{1}{3}\bar{b}$ равна	1) 19; 2) 17; 3) -4; 4) $-4\frac{1}{3}$; 5) $14\frac{1}{3}$.
2	Если известны координаты точек $A(-5;\ 1;\ 6)$, $B(1;\ 4;\ 3)$, $C(6;\ 3;\ 9)$, то модуль вектора $4\overline{AB}+\overline{BC}$ равен	1) $\sqrt{901}$; 2) $\sqrt{998}$; 3) 30; 4) 11; 5) 10.
3	Если векторы $\bar{d}(a;\ -3;\ 2)$ и $\bar{b}(1;\ 2;\ -a)$ перпендикулярны, то значение a равно	1) 6; 2) 5; 3) -6; 4) -3; 5) 2.
4	Если векторы $\bar{a}(2;\ 1;\ -1)$ и $\bar{b}$ коллинеарны и $\bar{a}\cdot\bar{b}=3$, то сумма координат вектора $\bar{b}$ равна	1) 1; 2) 2,5; 3) 2; 4) 23; 5) 5.
5	Угол между диагоналями четырехугольника с вершинами $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$ $C(-4;\ 1;\ 1)$, $D(-5;\ -5;\ 3)$ равен	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{12}$; 5) $\frac{3\pi}{16}$.

№	Задания	Варианты ответов
6	Если известно, что точки $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$ и $C(3;\ -2;\ 1)$ – вершины треугольника, то внешний угол при вершине B равен	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 4) $\frac{7\pi}{6}$; 5) $\frac{5\pi}{4}$.
7	Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют угол $\frac{2\pi}{3}$ и $\lvert\overline{a}\rvert=3$, $\lvert\overline{b}\rvert=4$, то значение выражения $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2$ равно	1) 25; 2) 16; 3) 9; 4) 13; 5) 81.
8	Если известны координаты трех вершин параллелограмма $A(2;\ -3;\ -5)$, $B(-1;\ 3;\ 2)$, $C(6;\ 1;\ 19)$, то произведение координат четвертой вершины равно	1) 56; 2) 350; 3) -108; 4) 54; 5) -540.
9	Если на векторах $\overline{a}(3;\ -5;\ 8)$ и $\overline{b}(-1;\ 1;\ -4)$ построен параллелограмм, то сумма длин его диагоналей равна	1) 12; 2) 10; 3) 41; 4) 17; 5) 20.
10	Если известны координаты точек $A(2;\ 3;\ 6)$ и $B(4;\ 6;\ 8)$, то периметр квадрата $ABCD$ равен	1) $2\sqrt{17}$; 2) $4\sqrt{17}$; 3) $\sqrt{17}$; 4) 17; 5) 36.
11	Если известны координаты точек $A(-3;\ -3;\ -6)$ и $C(-1;\ 0;\ -8)$, то площадь квадрата $ABCD$ равна	1) 8,5; 2) 17; 3) 34; 4) $4\sqrt{17}$; 5) $2\sqrt{17}$.
12	Если известны вершины треугольника $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, то его площадь равна	1) $4\sqrt{13}$; 2) $2\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{130}$; 4) 7,5; 5) 20.
13	Если известны вершины треугольника $A(1;\ 2;\ 1)$, $B(3;\ 0;\ 3)$, $C(-5;\ -2;\ -6)$, то длина медианы CD равна	1) 11; 2) 18; 3) 8; 4) $\sqrt{122}$; 5) $\sqrt{119}$.

№	Задания	Варианты ответов
14	Если $\overline{a} = -\overline{m} + 6\overline{n}$, $\overline{b} = 3\overline{m} + 4\overline{n}$, $\lvert\overline{m}\rvert = 2$, $\lvert\overline{n}\rvert = 5$ и угол между векторами $\overline{m}$ и $\overline{n}$ равен $\frac{2\pi}{3}$, то скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно	1) 518; 2) 48; 3) 250; 4) –314; 5) 651.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Номер правильного ответа	5	2	3	1	3	2	4
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	5	5	2	2	2	4	1

21 ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Пропорции, проценты

С понятием процента связаны три типа задач (см. п. 1.5):

1) нахождение указанного количества процентов от числа;
2) нахождение числа по его процентам;
3) нахождение процентного отношения чисел.

Обозначенные задачи удобно решать, составляя пропорции.

Пример 1. На экзамене по математике 15 % поступающих не решили ни одной задачи, a человек решили задачи с ошибками, а число решивших все задачи верно, относится к числу не решивших вовсе как 5 : 3. Определите, сколько человек присутствовало на экзамене. Укажите наименьшее значение параметра a.

Решение. Запишем условие задачи следующим образом:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{не решили} & 0{,}15x=3k \\ \text{решили с ошибками} & a \\ \text{решили верно} & 5k \end{array}\right\} x \text{ чел.}$$

Приведем пояснения к условию задачи:

а) если экзаменовалось x человек, то 15 % от x – $0{,}15x$;

б) если число решивших верно, относится к числу не решивших вовсе как 5 : 3, то, вводя коэффициент пропорциональности k, получим: не решили ни одной задачи $3k$ человек, решили верно все задачи $5k$ человек.

Согласно условию задачи составим и решим систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{3}{20}\cdot x=3k, \\ 3k+a+5k=x; \end{cases} \begin{cases} x=20k, \\ k=\dfrac{a}{12}; \end{cases} \begin{cases} x=\dfrac{5a}{3}, \\ k=\dfrac{a}{12}. \end{cases}$

Таким образом, на экзамене присутствовало $\dfrac{5a}{3}$ человек. Поскольку согласно условию задачи $\dfrac{5a}{3}$ и $\dfrac{a}{12}$ – целые положительные числа, то $a=12n$ при $n\in\mathbf{N}$ и наименьшее целое значение a равно 12.

Ответ: $\dfrac{5a}{3}$; $a=12$.

Пример 2. Цену товара сначала снизили на 20 %, затем новую цену снизили еще на 15 % и, наконец, произвели снижение еще на 10 %. На сколько процентов необходимо повысить последнюю цену товара, чтобы получить его первоначальную цену?

Решение. Пусть первоначальная цена товара была a ден. ед. Согласно условию задачи составим и решим пропорции:

1) первоначальная цена $\alpha - 100\ \%$,
   цена после I снижения $x - 80\ \%$,

откуда $x = \dfrac{80a}{100} = \dfrac{4}{5}a$ (ден. ед.);

2) цена после I снижения $\dfrac{4}{5}a - 100\ \%$,
   цена после II снижения $y - 85\ \%$,

откуда $y = \dfrac{4a \cdot 85}{5 \cdot 100} = \dfrac{17a}{25}$ (ден. ед.);

3) цена после II снижения $\dfrac{17a}{25} - 100\ \%$,
   цена после III снижения $z - 90\ \%$,

откуда $z = \dfrac{17a \cdot 90}{25 \cdot 100} = \dfrac{153a}{250}$ (ден. ед.);

4) первоначальная цена $a - (100+n)\ \%$,
   конечная цена $\dfrac{153a}{250} - 100\ \%$,

откуда $100 + n = \dfrac{100a \cdot 250}{153a}$, $n = 63\dfrac{61}{153}\ \%$.

Ответ: на $63\dfrac{61}{153}\ \%$.

Соотношения между натуральными числами

Рассмотрим запись чисел в десятичной позиционной системе счисления. Так, например, если a – цифра десятков, b – цифра единиц двузначного числа, то запишем: $\overline{ab} = 10a + b$. Аналогично запишем трехзначное число, у которого a – цифра сотен, b – цифра десятков, c – цифра единиц: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Пример 3. Сумма цифр двузначного числа равна 10. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

Решение. Пусть исходное число $\overline{ab} = 10a + b$, где a и b цифры его десятичной записи. Согласно условию задачи составим систему уравнений: $\begin{cases} a + b = 10, \\ \overline{ab} + 18 = \overline{ba}. \end{cases}$

Упростим второе уравнение системы: $10a + b + 18 = 10b + a$, $9a - 9b = -18$, $a - b = -2$. Сложим уравнения системы и найдем значение a:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} a + b = 10 \\ a - b = -2 \end{array} \\ \hline 2a = 8,\ a = 4. \end{array}$$

Подставляя значение $a=4$ в уравнение $a-b=-2$, найдем значение b: $b=6$. Запишем искомое число: $\overline{ab}=46$.

Ответ: 46.

Пример 4. Среднее геометрическое двух положительных чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего числа. Сколько процентов составляет среднее геометрическое этих чисел от их среднего арифметического?

Решение. Пусть искомые числа a и b, причем $a>b>0$. Составим и решим систему уравнений: $\begin{cases}\sqrt{a\cdot b}=b+12,\\ \dfrac{a+b}{2}+24=a.\end{cases}$

Выразим a из второго уравнения системы: $a+b+48=2a$, $a=b+48$. Подставим полученное значение a в первое уравнение системы и найдем значение b:

$$\sqrt{(b+48)b}=b+12,\ b^2+48b=b^2+24b+144,\ 24b=144,\ b=6.$$

Подставляя значение $b=6$ в уравнение $a=b+48$, получим $a=54$.

Найдем среднее арифметическое чисел 54 и 6: $\dfrac{54+6}{2}=30$.

Найдем среднее геометрическое чисел 54 и 6: $\sqrt{54\cdot 6}=18$.

Найдем процентное отношение среднего геометрического этих чисел от и их среднего арифметического: $\dfrac{18}{30}\cdot 100\ \%=60\ \%$.

Ответ: 60 %.

Задачи на движение

Уравнения, которые необходимо составить на основании условий задач на движение, как правило, содержат следующие величины: расстояние S, скорость v, время t.

Если тело движется равномерно, то пройденный им путь определяют по формуле $S=vt$.

Если тело движется по течению реки, то его скорость слагается из собственной скорости тела и скорости течения реки:

$$v_{\text{по теч.}}=v_{\text{с.}}+v_{\text{теч.}}.$$

Если тело движется против течения реки, то

$$v_{\text{пр. теч.}}=v_{\text{с.}}-v_{\text{теч.}}.$$

Если речь идет о движении плота, то его скорость равна скорости движения реки.

Пример 5. Товарный поезд был задержан в пути на 12 мин, а затем на расстоянии 60 км наверстал упущенное время. Как изменилась при этом его скорость, если первоначально он проходил 60 километров за один час?

Решение. Полагая, что первоначальная скорость поезда увеличилась на x км/ч, составим таблицу:

	v (*км/ч*)	t (*ч*)	S (*км*)
по расписанию	60	1	60
фактически	$60+x$	$\frac{60}{60+x}$	60

Так как время движения поезда сократилось на 12 мин, что составляет $\frac{1}{5}$ ч, то согласно условию задачи получим уравнение: $1=\frac{60}{60+x}+\frac{1}{5}$, $\frac{60}{60+x}=\frac{4}{5}$, $\frac{15}{60+x}=\frac{1}{5}$, $60+x=75$, $x=15$ км/ч.

Ответ: увеличилась на 15 км/ч.

Пример 6. Моторная лодка прошла расстояние между двумя пунктами по реке туда и обратно, не останавливаясь, за 6 ч 15 мин. Расстояние между пунктами 60 км. Определите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Решение. Пусть собственная скорость лодки равна x км/ч. Составим таблицу:

	v (*км/ч*)	t (*ч*)	S (*км*)
по течению	$x+4$	$\frac{60}{x+4}$	60
против течения	$x-4$	$\frac{60}{x-4}$	60

Так как 6 ч 15 мин $= 6\frac{15}{60}$ ч $= \frac{25}{4}$ ч и $t_{\text{по теч.}}+t_{\text{пр. теч.}}=\frac{25}{4}$ ч, то получим уравнение: $\frac{60}{x+4}+\frac{60}{x-4}=\frac{25}{4}$, $\frac{12}{x+4}+\frac{12}{x-4}=\frac{5}{4}$, $\frac{24x}{x^2-16}=\frac{5}{4}$, $5x^2-96x-80=0$, откуда $x=20$ км/ч.

Ответ: 20 км/ч.

Пример 7. Два тела движутся по окружности равномерно в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 2 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 с. За сколько секунд второе тело пройдет $\frac{2}{3}$ окружности?

Решение. Пусть длина окружности равна l. Составим таблицу, учитывая, что первое тело проходит окружность на 2 с быстрее второго.

	v (км/ч)	t (с)	S (км)
I	$\frac{l}{x}$	x	l
II	$\frac{l}{x+2}$	$x+2$	l

Зная скорость движения каждого тела, составим таблицу, учитывая, что первое тело догоняет второе каждые 12 с:

	v (км/ч)	t (с)	S (км)
I	$\frac{l}{x}$	12	$\frac{12l}{x}$
II	$\frac{l}{x+2}$	12	$\frac{12l}{x+2}$

Согласно условию задачи первое тело догоняет второе, значит, оно проходит путь $S_1 = S_2 + l$. Получим уравнение $\frac{12l}{x} = \frac{12l}{x+2} + l$.

Разделив обе части уравнения на l ($l \neq 0$), запишем:

$$12\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) = 1,\ 12\frac{x+2-x}{x(x+2)} = 1,\ x^2 + 2x - 24 = 0,\ x = 4.$$

Найдем время, за которое второе тело проходит всю окружность: $4+2=6$ (с). Найдем время, за которое второе тело проходит $\frac{2}{3}$ окружности: $\frac{2}{3}\cdot 6 = 4$ (с).

Ответ: 4 с.

Задачи на работу

Уравнения, которые необходимо составить на основании условий задач на работу, как правило, содержат следующие величины: работу A, скорость выполнения работы (производительность) v, время выполнения работы t. Эти величины связаны следующей формулой: $A = vt$.

Пример 8. Двое рабочих выполняют совместно некоторое задание за 8 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить его на 12 ч быстрее, чем второй, если тот будет работать отдельно. За сколько часов второй рабочий может выполнить 70 % задания?

Решение. Пусть a – объем задания. Рассмотрим раздельную работу, учитывая при этом, что каждый рабочий в этом случае выполняет весь объем задания:

	Производительность	Время (ч)	Работа
I	$\frac{a}{x-12}$	$x-12$	a
II	$\frac{a}{x}$	x	a

Зная производительность каждого рабочего, рассмотрим совместную работу:

	Производительность	Время (ч)	Работа
I	$\frac{a}{x-12}$	8	$\left.\begin{matrix}\frac{8a}{x-12}\\ \frac{8a}{x}\end{matrix}\right\} a$
II	$\frac{a}{x}$	8	

Согласно условию задачи запишем уравнение:

$\frac{8a}{x-12}+\frac{8a}{x}=a$, $8\left(\frac{1}{x-12}+\frac{1}{x}\right)=1$, $8\frac{x+x-12}{(x-12)x}=1$, $16x-96=x^2-12x$,

$x^2-28x+96=0$, откуда $x=24$.

Если все задание второй рабочий может выполнить за 24 ч, то 70 % задания он выполнит за $\frac{24}{100}\cdot 70=16{,}8$ ч.

Ответ: 16,8 ч.

Пример 9. Через 1 ч после начала равномерного спуска воды в бассейне ее осталось a м^3, а еще через 3 ч – b м^3. Сколько воды было в бассейне?

Решение. Пусть в бассейне было x м^3 воды. Если за 1 ч вытекает y м^3 воды, то через 1 ч после спуска в бассейне останется $x-y=a$ или $4x-4y=4a$ м^3 воды, а через 4 ч останется $x-4y=b$ м^3 воды. Вычитая из уравнения $4x-4y=4a$ уравнение $x-4y=b$, получим

$3x = 4a - b$, $x = \frac{4a-b}{3}$ (м^3).

Ответ: $\frac{4a-b}{3}$ м^3.

Смеси, сплавы

Задачи на смеси и сплавы удобно решать, учитывая пропорциональную зависимость между величинами. При помощи пропорции они легко сводятся к одной схеме решения.

Пример 10. Смешали 30 %-й раствор соляной кислоты с 10 %-м и получили один килограмм 15 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение. Пусть первого раствора взяли a г, а второго – b г. Зная, что в первом растворе содержится 30 % кислоты, запишем:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{кислота} & 0{,}3a - 30\,\% \\ \text{вода} & 0{,}7a - 70\,\% \end{array}\right\} a - 100\,\%$$

Зная, что во втором растворе содержится 10% кислоты, запишем:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{кислота} & 0{,}1b - 10\,\% \\ \text{вода} & 0{,}9b - 90\,\% \end{array}\right\} b - 100\,\%$$

Если смешать a г первого и b г второго раствора, то получим третий раствор: $\left.\begin{array}{ll} \text{кислота} & (0{,}3a + 0{,}1b) - 15\,\% \\ \text{вода} & (0{,}7a + 0{,}9b) - 85\,\% \end{array}\right\} 1000 - 100\,\%$

Запишем пропорцию: $\begin{array}{c} (0{,}3a + 0{,}1b) - 15\,\% \\ 1000 - 100\,\% \end{array}$

Тогда $(0{,}3a + 0{,}1b) \cdot 100 = 1000 \cdot 15$, $0{,}3a + 0{,}1b = 150$, $3a + b = 1500$.

Так как согласно условию задачи $a + b = 1000$, то, вычитая из уравнения $3a + b = 1500$ уравнение $a + b = 1000$, получим $2a = 500$, $a = 250$. Подставляя значение $a = 250$ в уравнение $a + b = 1000$, найдем значение b: $b = 1000 - 250 = 750$.

Ответ: 250 и 750 г.

Пример 11. Кусок сплава меди и цинка массой 54 кг содержит 45 % меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60 % меди?

Решение. Найдем массу меди в сплаве: $\frac{54 \cdot 45}{100} = 24{,}3$ (кг). Найдем массу цинка в сплаве: $54 - 24{,}3 = 29{,}7$ (кг).

Добавляя в сплав x кг меди, и не изменяя при этом массу цинка, получим новый сплав: $\begin{matrix} \text{медь} & 24{,}3+x - & 60\,\% \\ \text{цинк} & 29{,}7 - & 40\,\% \end{matrix}$

Решим пропорцию: $40 \cdot (24{,}3 + x) = 60 \cdot 29{,}7$, откуда $x = 20{,}25$.

Ответ: 20,25 кг.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из данных четырех чисел первые три относятся между собой как $2:3:5$, а четвертое составляет пятую часть третьего. Найдите среднее арифметическое этих чисел, если известно, что четвертое число на 27 меньше суммы остальных.

2. В двух сосудах находится 88 л жидкости. Если из первого сосуда перелить во второй 20 % жидкости, находящейся в первом сосуде, то в обоих сосудах жидкости станет поровну. На сколько литров в первом сосуде жидкости больше, чем во втором?

3. Тракторист вспахал три участка земли. Площадь первого участка составляет треть площади всех трех участков, а площадь второго относится к площади третьего как $3:7$. Сколько гектаров было во всех трех участках, если в третьем было на 40 га больше, чем в первом?

4. Заводом приобретено 500 станков для трех цехов. Станки первого цеха составляют 36 % всех станков, второго цеха – 75 % станков первого цеха. Сколько станков приобретено для третьего цеха?

5. Найдите сумму трех чисел, если первое число составляет 80 % второго, второе число относится к третьему как $\frac{1}{2}:\frac{9}{20}$ и на 70 меньше суммы первого и третьего.

6. Банк выплачивает 3 % годовых. На сколько процентов увеличится за два года внесенная сумма?

7. Вкладчик снял со своего счета в сбербанке сначала четвертую часть вклада, затем $\frac{4}{9}$ оставшихся денег и еще 640 тыс. руб. Какая часть денег осталась у него на сберкнижке, если вклад составлял 2400 тыс. руб.?

8. Сумма всех членов пропорции равна 70. Третий член составляет $\frac{2}{3}$, а второй – $\frac{3}{4}$ первого члена. Четвертый член пропорции составляет $\frac{6}{29}$ суммы трех первых. Запишите пропорцию.

9. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели пропорциональны соответственно числам 1, 3, 7. Сумма этих дробей равна $\frac{200}{147}$. Найдите наименьшую из дробей.

10. В киоск для продажи поступили журналы и газеты. Когда продали 50 % газет и 20 % журналов, что составило в общей сложности 390 единиц, газет осталось в три раза больше, чем журналов. На сколько процентов больше газет, чем журналов поступило в продажу?

11. В трех ящиках находится 48 шаров. Число шаров первого ящика составляет $\frac{4}{5}$ числа шаров второго ящика, а число шаров третьего ящика составляет 33,(3) % суммарного числа шаров двух других ящиков. Сколько шаров в каждом ящике?

12. Расстояние между городами A и D равно 415 км. Между ними расположены города B и C. Расстояние между A и B относится к расстоянию между B и C как 7:9, а расстояние между B и C составляет $\frac{27}{35}$ расстояния между C и D. Найдите расстояние между каждыми двумя соседними городами.

13. Прямоугольные таблицы содержат однозначные, двузначные и трехзначные числа. В первой таблице количество однозначных, двузначных и трехзначных чисел распределено в отношении 1,6 : 1 : 0,4. Во второй таблице однозначных чисел на 25 % больше, а двузначных на 20 % меньше, чем в первой. Сколько однозначных, двузначных и трехзначных чисел во второй таблице, если всего она содержит 32 числа?

14. В первом магазине покупатель израсходовал на 60 тыс. рублей меньше, чем 0,4 количества взятых с собой денег; во втором – треть остатка и еще 12 тыс. рублей; в третьем магазине 0,6 нового остатка и еще 31,2 тыс. рублей, после чего у него осталось 420 тыс. рублей. Сколько денег было израсходовано?

15. Общая вместимость трех баков составляет 1620 л. Два из них наполнены водой, а третий пустой. Чтобы наполнить его нужно использовать либо все содержимое первого бака и 0,2 содержимого второго, либо все содержимое второго и треть содержимого первого. Найдите наибольшую вместимость баков.

16. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 34. Если к этому числу прибавить 18, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

17. Задумано целое положительное число. К его записи присоединили справа цифру 5 и из полученного нового числа вычли квадрат задуманного числа. Остаток уменьшили на 50 % этого остатка и вычли задуманное число. В результате получили 10. Какое число задумано?

18. Задумано целое положительное число. К его записи присоединили справа цифру 0 и из полученного нового числа вычли утроенное задуманное число. Разность разделили на исходное число, а затем вычли исходное число и в результате получили нуль. Какое число задумано?

19. Найдите двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно 2,7, а разность между искомым числом и числом, написанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 9.

20. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 8 и в остатке 7. Если же это число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 10 и в остатке 1. Найдите исходное число.

21. Если некоторое двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 5, а в остатке 2. Если же к сумме квадратов цифр этого числа прибавить 59,375 % этого числа, то получится исходное число. Найдите это число.

22. Однозначное число увеличили на 10 единиц. Если полученное число увеличить на столько же процентов, как в первый раз, то получится 45. Найдите первоначальное число.

23. Трехзначное число оканчивается цифрой 2. Если ее перенести в начало записи числа, то полученное число будет на 99 больше первоначального. Найдите исходное число.

24. Некоторое двузначное число в 4 раза больше суммы и в полтора раза больше произведения своих цифр. Найдите это число.

25. Найдите два числа, если их среднее арифметическое на 8 больше меньшего из этих чисел, а среднее геометрическое на 2 меньше среднего арифметического.

26. Моторная лодка сначала прошла 60 км против течения реки, а затем 60 км – по течению, затратив в первый раз на 50 мин больше, чем во второй. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

27. От пристани в город отправилась лодка со скоростью 12 км/ч и пароход со скоростью 20 км/ч. Каково расстояние от пристани до города, если лодка пришла туда на 1,5 ч позже парохода, а отправилась в город на полчаса раньше его?

28. На расстоянии 1 км грузовой автомобиль расходует бензина на a л больше, чем легковой. Расходуя 1 л бензина, грузовой автомобиль проходит по той же дороге на 16 км меньше, чем легковой. Каков расход бензина каждого из этих автомобилей на расстояние 1 км?

29. Мотоциклист и велосипедист совершили безостановочную двухчасовую поездку к озеру и обратно. При этом велосипедист проезжал каждый километр на 4 мин медленнее, чем мотоциклист. Сколько километров проехал каждый из них, если известно, что путь, проделанный велосипедистом за это время, на 40 км меньше?

30. Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Спустя 4 ч после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему на мотоцикле выезжает второй турист. С какой скоростью двигался второй турист, если он догнал первого, проехав 56 км?

31. Мотоциклист отправился из пункта A в пункт B. Обратно он выехал с той же скоростью, но через час после выезда увеличил скорость на 6 км/ч. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он затратил на 10 мин меньше, чем на путь от A до B и при этом проехал 240 км?

32. Два туриста должны идти навстречу друг другу из турбаз A и B, расстояние между которыми 30 км. Если первый турист выйдет на 2 ч раньше второго, то они встретятся через 2,5 ч после выхода второго. Если же первый турист выйдет на 2 ч позже, чем второй, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первого. Сколько времени понадобится каждому туристу, чтобы пройти путь от A до B?

33. Некоторое расстояние поезд прошел со скоростью 120 км/ч. После этого, расстояние на 75 км большее, он прошел со скоростью 150 км/ч, а остальное расстояние, на 135 км меньшее пройденного, прошел со скоростью 96 км/ч. Определите среднюю скорость поезда, если все расстояние составило 415 км.

34. Путь от A до B длиной 88 км поезд проходит на 1 ч 15 мин быстрее, чем путь от B до C, длиной 108 км. Найдите скорость поезда на отрезке пути от A до B, если известно, что она на 40 км/ч больше его скорости на отрезке пути от B до C.

35. Расстояние между A и B 100 км. Из A отправились в B одновременно по одной и той же дороге два автобуса, которые должны были прибыть в B в одно и то же время. В действительности первый автобус прибыл в B на 1 час раньше срока, а второй на 3 часа опоздал, так как проезжал за каждый час в среднем на 5 км меньше первого. Определите среднюю скорость каждого автобуса.

36. В одно и тоже время навстречу друг другу должны были выйти инструктор из поселка M и группа туристов из поселка N.

Однако инструктор задержался и вышел позже на 6 ч. При встрече выяснилось, что инструктор прошел на 12 км меньше, чем туристы. После встречи, пешеходы одновременно продолжили путь с прежней скоростью. В результате инструктор пришел в N через 8 ч, а группа туристов пришла в M через 9 ч после встречи. Определите расстояние MN.

37. От станции до турбазы можно пройти по шоссе или тропинкой, причем тропинкой ближе на 5 км. Первый турист пошел по шоссе, а второй – тропинкой со скоростью 3 км/ч. Первый пришел на турбазу позже второго на 1 ч. Найдите скорость первого туриста, если известно, что она выражается целым числом.

38. Поезд был задержан на 30 минут. Увеличив скорость на 5 км/ч, машинист на перегоне в s км ликвидировал опоздание. Определите, какую скорость имел бы поезд на этом перегоне, если бы не было задержки.

39. Расстояние между двумя городами a км. Два автомобилиста, выехав из этих городов навстречу друг другу, встретятся на полпути, если первый выедет на t ч раньше второго. Если же навстречу друг другу они выедут одновременно, то встреча произойдет через $2t$ ч. Определите скорость каждого автомобиля.

40. Скорости пассажирского и товарного поездов относятся как $a : b$. Пассажирский поезд вышел со станции A на 0,5 ч позже товарного, а прибыл на станцию B на 0,5 ч раньше его. Найдите скорости поездов, если расстояние между A и B равно ab км.

41. По двум окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с медленнее, чем другая, и поэтому успевает сделать в 1 мин на 2 оборота меньше. Сколько оборотов за одну минуту совершают эти точки?

42. Два тела движутся по окружности из точки A в противоположных направлениях. Первое тело к моменту их встречи проходит расстояние на 5 м больше второго. Продолжая движение, первое тело оказывается в точке A через 9 с после встречи со вторым, а второе – через 16 с после их встречи. Найдите радиус окружности.

43. Лодка поднялась вверх по реке и вернулась на прежнее место, пройдя при этом за 8 ч путь, равный 25 км. Причем каждые 3 км против течения и каждые 5 км по течению она проплывала за равные промежутки времени. Найдите скорость течения реки.

44. Первое тело, находясь на расстоянии l м от второго, догоняет его через a с после начала движения. Если при таком же начальном расстоянии тела движутся навстречу друг другу, то их встреча происходит через b с. Найдите скорости движения тел.

45. Моторная лодка и парусник, находясь на озере в 60 км друг от друга, движутся навстречу друг другу и встречаются через 2 ч. Если бы моторная лодка находилась в 40 км от парусника и догоняла его, то на это потребовалось бы 2 ч 30 мин. Определите скорость лодки.

46. Велосипедист и мотоциклист одновременно начали движение в одном направлении. Проехав 70 км, мотоциклист развернулся и поехал навстречу велосипедисту. Через какое время после начала движения мотоциклист и велосипедист встретятся, если известно, что скорость мотоциклиста 28 км/ч, а велосипедист движется со скоростью 14 км/ч?

47. Первая бригада может обработать участок земли за 20 ч, а вторая – за 30 ч. За какое время могут обработать этот участок земли две бригады, работая одновременно, если скорости выполнения работы бригадами относятся как 3 : 2?

48. Насос может выкачать из бассейна $\frac{2}{3}$ воды за 450 с. Проработав 0,15 ч, насос остановился. Сколько воды осталось в бассейне, если в нем вмещается 125 м^3 воды?

49. Вследствие повышения квалификации производительность труда рабочего повышалась дважды в течение года на одно и то же число процентов. На сколько процентов возрастала каждый раз производительность его труда, если за одно и то же время рабочий раньше вырабатывал изделий на 2500 тыс. руб., а теперь на 12,36 % больше?

50. Рабочий день уменьшился на один час. На сколько процентов при тех же расценках возросла заработная плата рабочего, если производительность его труда повысилась на 20 % и он работает теперь 7 часов?

51. Выполнять некоторое задание взялись две бригады. Первая бригада может выполнить задание за 1 ч, а вторая – за 0,75 этого времени. Обе бригады начали работу одновременно, но через некоторое время первая бригада прекратила работу, а спустя 10 мин вторая бригада закончила работу. Сколько времени работала первая бригада?

52. Три студенческих отряда выполнили работу, которая оценена в 4110 тыс. рублей. Какую зарплату получил каждый отряд, если первый состоял из 15 человек и работал 20 дней, второй – из 10 человек и работал 22 дня, а число студентов третьего отряда, работавшего 15 дней, на 10 % превышало число студентов второго отряда?

53. Каждая из двух машинисток перепечатывала рукопись объемом 100 страниц. Первая машинистка перепечатывала 10 страниц за то же время, за которое вторая перепечатывала 8 страниц. На сколько страниц в час больше перепечатывала первая машинистка, если она закончила работу на 1,5 часа быстрее второй?

54. В одном бассейне имеется 400 м^3 воды, а в другом – 300 м^3. Открывают краны, через которые наполняются бассейны. Через сколько часов количество воды в бассейнах будет одинаковым, если во второй бассейн наливается в час на 20 м^3 воды больше, чем в первый?

55. Для перевозки 60 т груза было затребовано некоторое количество машин. Ввиду погодных условий, на каждую машину пришлось грузить на 500 кг груза меньше, чем предполагалось, поэтому было дополнительно затребовано 20% первоначального количества машин. Какое количество машин перевозили груз?

56. В кинозале имеются две двери. Через обе двери после сеанса зрители выходят из зала в течение 3 мин 45 с. Если зрителей выпускать через первую дверь, то выход из зала займет на 4 мин меньше, чем в том случае, если зрителей выпускать только через вторую. Сколько времени требуется для выхода зрителей из кинозала через каждую дверь в отдельности?

57. В бассейне проведены три трубы. Первая наполняет его на 4 ч дольше, чем вторая за треть времени, необходимого для наполнения бассейна третьей трубой. Первая и третья трубы, действуя раздельно, могут наполнить бассейн соответственно за 12 и 24 ч. За сколько часов наполнится бассейн, если все трубы будут действовать одновременно?

58. На двух станках требовалось обработать по 150 деталей, причем на втором из них обрабатывали в час на 5 деталей меньше, чем на первом. На втором станке работа была начата на 1 ч раньше, чем на первом, и, кроме того, на первом станке она была прервана на 30 мин. Однако на обоих станках работу выполнили к одному и тому же сроку. Сколько деталей обрабатывали за час два станка?

59. Некоторое вещество при сушке уменьшает свою массу до 200 кг и содержит при этом 75 % воды. Какую первоначальную массу имело вещество, если оно содержало 85 % воды?

60. Морская вода содержит 5 % соли по массе. К 30 кг морской воды добавили 70 кг пресной. Определите концентрацию соли в полученном растворе.

61. Свежие грибы содержат по массе 90 % воды, а сухие – 10 %. Сколько получится сухих грибов из 40 кг свежих?

62. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 55 % олова. Сколько чистого олова необходимо добавить к этому куску сплава, чтобы полученный новый сплав содержал 60 % олова?

63. Сплав меди с серебром содержит меди на 1845 г меньше, чем серебра. Если бы к нему добавили некоторое количество чистого серебра, масса которого составляет треть массы чистого серебра, первоначально содержащегося в сплаве, то получился бы новый сплав, содержащий 16,5 %меди. Какова масса сплава?

64. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих в среднем 12,5 % железа, в оставшейся руде содержание железа повысилось на 20 % и составило 187,5 кг. Какова масса руды?

***Ответы*:** **1.** 8,25. **2.** На 22 л. **3.** 300 га. **4.** 185 станков. **5.** 270. **6.** На 6,09 %. **7.** $\frac{3}{20}$ вклада. **8.** $\frac{24}{18}=\frac{16}{12}$. **9.** $\frac{8}{21}$. **10.** На 380 %. **11.** 16, 20 и 12 шаров. **12.** 105, 135 и 175 км. **13.** 20 однозначных, 8 двузначных и 4 трехзначных. **14.** 2330 тыс. руб. **15.** 630 л. **16.** 35. **17.** 5 или 3. **18.** 7. **19.** 54. **20.** 71. **21.** 32. **22.** 5. **23.** 112. **24.** 48. **25.** 9 и 25. **26.** 21 км/ч. **27.** 60 км. **28.** $\frac{-2a+\sqrt{4a^2+a}}{4}$ и $\frac{2a+\sqrt{4a^2+a}}{4}$ л. **29.** 20 и 60 км. **30.** 56 км/ч. **31.** 48 км/ч. **32.** 6ч и 10ч. **33.** 120 км/ч. **34.** 88 км/ч. **35.** $\frac{-5+5\sqrt{21}}{2}$ и $\frac{5+5\sqrt{21}}{2}$ км/ч. **36.** 84 км. **37.** 4 км/ч. **38.** $\frac{\sqrt{25+40s}-5}{2}$ км/ч. **39.** $\frac{a\left(3-\sqrt{5}\right)}{4t}$ и $\frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{4t}$ км/ч. **40.** $a(a-b)$ и $b(a-b)$ км/ч. **41.** 10 оборотов. **42.** $\frac{35}{2\pi}$ м. **43.** $\frac{5}{6}$ км/ч. **44.** $\frac{l(a+b)}{2ab}$ и $\frac{l(a-b)}{2ab}$ м/с. **45.** 23 км/ч. **46.** Через 3 ч 20 мин. **47.** За 12 ч. **48.** 25 м^3. **49.** На 6 %. **50.** На 5 %. **51.** 20 мин. **52.** 1800 тыс.; 1320 тыс.; 990 тыс. руб. **53.** На $3\frac{1}{3}$ страницы. **54.** Через 5 ч. **55.** 24 машины. **56.** 6 и 10 мин. **57.** За 4 ч. **58.** 45. **59.** $333\frac{1}{3}$ кг. **60.** 1,5 %. **61.** $4\frac{4}{9}$ кг. **62.** 1,5 кг. **63.** 3165 г. **64.** 0,5 т.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Цифра десятков двузначного числа на 3 больше цифры его единиц. Если произведение этого числа и числа, полученного от перестановки его цифр, равно 574, то квадрат произведения цифр числа равен	1) 81; 2) 36; 3) 25; 4) 9; 5) 16.
2	Если произведение цифр двузначного числа на 45 меньше числа, полученного в результате перестановки его цифр, то сумма цифр этого числа равна	1) 8; 2) 9; 3) 10; 4) 7; 5) 5.
3	Велосипедист должен проехать путь из пункта A в пункт B за определенный срок. Если он будет ехать со скоростью 12 км/ч, то опоздает на 0,5 часа, если же он поедет со скоростью 15 км/ч, то приедет на 12 минут раньше намеченного срока. Определите расстояние между пунктами A и B.	1) 24 км; 2) 45 км; 3) 30 км; 4) 89 км ; 5) 42 км.
4	Два автомобиля одновременно начали гонки с одного старта и в одном направлении. Первый стартовал со скоростью 80 км/ч, второй – 60 км/ч. Через полчаса с того же старта и в том же направлении стартовал третий гонщик. Найдите скорость третьего гонщика, если известно, что он догнал первого на 1 час 15 минут позже, чем второго.	1) 89 км/ч; 2) 90 км/ч; 3) 95 км/ч; 4) 100 км/ч; 5) 115 км/ч.
5	Поезд длиной 160 м проходит мимо светофора за 8 с, а мимо платформы – за 28с. Какую длину имеет платформа?	1) 320 м; 2) 210 м; 3) 390 м; 4) 400 м; 5) 550 м.

№	Задания	Варианты ответов
6	Стоя на ступеньках движущегося эскалатора, пассажир спускается вниз за 56 с. Если он пойдет по неподвижному эскалатору с той же скоростью, то спустится вниз за 42 с. За какое время пассажир метро спускается по движущемуся эскалатору?	1) 24 с; 2) 23 с; 3) 10 с 4) 17 с; 5) 19 с.
7	Из города A в город B вышел пешеход, а через 2 часа после его выхода из города B выехал ему навстречу велосипедист. К моменту встречи пешеход прошел треть пути от A до B. Если бы велосипедист выехал не через 2, а через 4 часа после выхода пешехода, то к моменту встречи пешеход прошел бы половину пути от A до B. За какое время велосипедист проезжает путь от B до A?	1) 1 ч; 2) 2 ч; 3) 2 ч 10 мин; 4) 1 ч 15 мин; 5) 45 мин.
8	Две точки движутся по двум окружностям, радиусы которых относятся как $1:6$. Найдите среднее арифметическое скоростей движения этих точек, если за 10 с точка, движущаяся по большой окружности, прошла на 2 м больше и совершила при этом в 5 раз меньше оборотов.	1) 2 м; 2) 1,8 м; 3) 1,5 м; 4) 1,1 м; 5) 0,95 м.
9	Два завода взялись выполнять заказ за 12 дней. Через два дня завод A был закрыт на реконструкцию и в дальнейшем над выполнением заказа работал только завод B. Зная, что производительность завода B составляет $66\frac{2}{3}$ % от производительности завода A, определите дополнительное время, необходимое заводам для выполнения заказа.	1) 15; 2) 17; 3) 20; 4) 21; 5) 32.

№	Задания	Варианты ответов
10	Выработка продукции за каждый год работы предприятия возрастала на 4 %. На сколько процентов возросла выработка продукции за два года работы предприятия?	1) 4; 2) 8; 3) 8,16; 4) 16; 5) 9,5.
11	Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 4 %, а за следующий год она увеличилась на 8 %. Найдите средний ежегодный прирост продукции за этот период.	1) $\left(100-\sqrt{78}\right)$ %; 2) 78 %; 3) 22 %; 4) $12\sqrt{78}$ %; 5) $\left(12\sqrt{78}-100\right)$ %
12	В начале года в сбербанк на книжку было внесено некоторое количество денег, а в конце года было взято обратно 882 рубля. Еще через год на книжке снова оказалось 882 рубля. Сколько денег было внесено на книжку в сбербанк, если сбербанк начисляет в год 5 %?	1) 1000 руб.; 2) 2000 руб.; 3) 1550 руб.; 4) 1640 руб.; 5) 2010 руб.
13	Слав золота с серебром, содержащий 120г серебра, сплавлен с 100 г чистого золота. В результате содержание золота в сплаве повысилось на 20 %. Сколько золота было в сплаве?	1) 108 г; 2) 80 г; 3) 113 г; 4) 45 г; 5) 100 г.
14	К раствору, содержащему 40 г соли и 160 г воды, добавили воду, после чего концентрация раствора уменьшилась на 10 %. Сколько воды добавили в раствор?	1) 200 г; 2) 165 г; 3) 150 г; 4) 120 г; 5) 115 г.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	5	2	5	4	4	1	2
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	4	1	3	5	4	2	1

22 ПЛАНИМЕТРИЯ

Планиметрией называют раздел геометрии, в котором изучают свойства фигур, расположенных в одной плоскости. Основными геометрическими фигурами на плоскости являются *точка* и *прямая*.

22.1. Углы и прямые

Часть прямой линии, ограниченная с одной стороны и неограниченная с другой, называется *полупрямой* или *лучом*. Полупрямые прямой a, на которые она разбивается точкой A, называются дополнительными. Часть прямой линии, ограниченная с двух сторон, называется *отрезком*.

Углом называется фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки (рис. 22.1). Эту точку называют вершиной угла (точка O), а лучи – сторонами угла (лучи OA и OB).

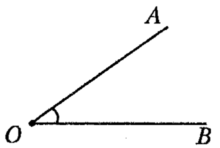


Рис. 22.1

Рис. 22.2

Угол называется *развернутым*, если его стороны являются дополнительными прямыми одной прямой. На рисунке 22.2 угол AOB развернутый.

Основной единицей измерения углов является угол в один градус (обозначается $1°$), равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла.

Развернутый угол равен $180°$.

Наряду с градусной мерой угла употребляется и радианная мера. Один *радиан* равен $\frac{180}{\pi}$ градусов.

Два угла называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а две другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми. На рисунке 22.3 углы AOC и BOC являются смежными. *Сумма смежных углов равна* $180°$.

Прямым углом называется угол, равный 90° (рис. 22.4).

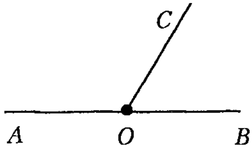


Рис. 22.3

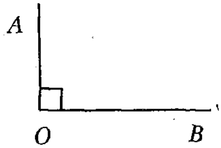


Рис. 22.4

Два угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого. На рисунке 22.5 углы AOC и DOB – вертикальные. *Вертикальные углы равны.*

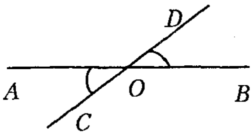


Рис. 22.5

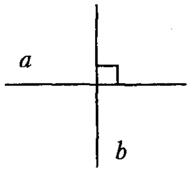


Рис. 22.6

Взаимное расположение прямых на плоскости

Две прямые на плоскости могут пересекаться, быть параллельными, или совпадать.

В результате пересечения двух прямых получаем две пары вертикальных углов: углы AOC и BOD, AOD и BOC на рисунке 22.5.

Прямые, которые пересекаются под прямым углом, называются взаимно перпендикулярными: прямые a и b на рисунке 22.6. Через каждую точку прямой можно провести только одну перпендикулярную к ней прямую.

Прямые, которые не пересекаются, называются параллельными. Через каждую точку плоскости можно провести прямую, параллельную данной прямой, и притом только одну.

Если две параллельные прямые AB и CD пересечь третьей прямой AC (секущей), то при этом получим две пары внутренних односторонних и две пары внутренних накрест лежащих углов.

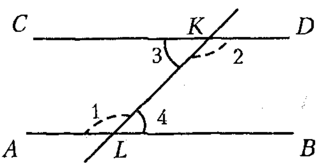


Рис. 22.7

На рисунке 22.7 углы ALK и CKL, а также углы BLK

и DKL внутренние односторонние, а углы ALK и DKL, а также углы BLK и CKL внутренние накрест лежащие.

Накрест лежащие углы равны ($\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$ на рисунке 22.7), а сумма внутренних односторонних углов равна $180°$ ($\angle 1+\angle 3=180°$ и $\angle 2+\angle 4=180°$ на рисунке 22.7).

Признаки параллельности прямых:

1) если прямая c параллельна прямым a и b, то прямые a и b параллельны;

2) если внутренние накрест лежащие углы прямых a и b с секущей c равны или сумма внутренних односторонних углов равна $180°$, то прямые a и b параллельны.

22.2. Многоугольник

Многоугольником $A_1A_2...A_n$ называется фигура, состоящая из точек A_1, A_2, ..., A_n и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1. Точки A_1, A_2, ..., A_n называют *вершинами* многоугольника, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 – его *сторонами*. Две вершины называются *смежными*, если они соединяются стороной многоугольника.

Диагональю многоугольника называют отрезок, соединяющий две несмежные вершины.

Многоугольник называется *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую его сторону.

Сумму внутренних углов произвольного выпуклого многоугольника находят по формуле $S_n=180°\cdot(n-2)$, где n – число сторон (углов) многоугольника.

Периметром многоугольника называют сумму длин всех его сторон.

Многоугольник называется *правильным*, если все его стороны равны и все его углы равны.

22.3. Соотношения между сторонами и углами в треугольнике

Сумма углов любого треугольника равна $180°$.

Любая сторона треугольника меньше суммы длин двух других его сторон.

1. Рассмотрим **прямоугольный треугольник**: a и b – катеты,

c – гипотенуза, α – острый угол (рис. 22.8).

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы треугольника равен сумме квадратов его катетов: $c^2 = a^2 + b^2$.

Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике:

1) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ (отношение противолежащего катета к гипотенузе);

2) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ (отношение прилежащего катета к гипотенузе);

3) $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ (отношение противолежащего катета к прилежащему).

4) если катет лежит против угла $30°$, то он равен половине гипотенузы.

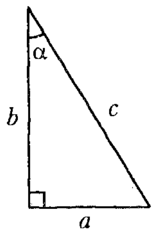


Рис. 22.8

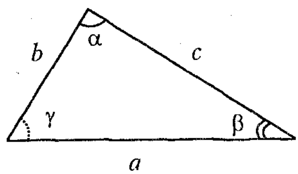


Рис. 22.9

2. Рассмотрим **косоугольный треугольник**: a, b, c – стороны, α, β, γ – противолежащие им углы (рис. 22.9).

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих же сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

22.4. Линии в треугольнике

1. *Биссектрисой* треугольника называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника, заключенный между вершиной треугольника и точкой пересечения биссектрисы угла и стороны треугольника.

Свойства биссектрисы треугольника:

1) три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром окружности, вписанной в треугольник;

2) биссектриса делит сторону треугольника на отрезки пропорциональные двум другим его сторонам ($\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ на рис. 22.10).

2. *Медианой* треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

Свойства медианы треугольника:

1) медиана делит треугольник на два равновеликих (имеющих равные площади) треугольника;

2) медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины;

3) если медиана проведена к гипотенузе, то она равна половине гипотенузы.

3. *Высотой* треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противолежащую сторону.

Свойства высоты треугольника:

1) если высота проведена из вершины равнобедренного треугольника на его основание, то она является так же биссектрисой и медианой этого треугольника;

2) если высота проведена из вершины прямого угла треугольника к гипотенузе, то она является средним геометрическим проекции катетов на гипотенузу: $h=\sqrt{a_c \cdot b_c}$ (рис. 22.11).

3) для всякого треугольника зависимость между его высотами h_a, h_b, h_c и радиусом вписанной окружности r выражается формулой $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.

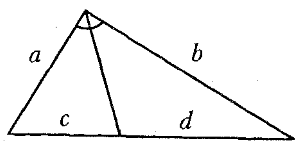


Рис. 22.10

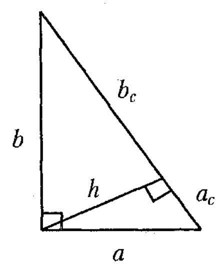


Рис. 22.11

22.5. Формулы для вычисления площади треугольника

Для вычисления площади треугольника можно применять одну из следующих формул:

1) $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$, где a – сторона равностороннего треугольника;

2) $S=\frac{1}{2}ah_a$, где a – сторона, h_a – высота, проведенная к стороне a произвольного треугольника;

3) $S=\frac{1}{2}ab$, где a и b – катеты прямоугольного треугольника;

4) $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, где a и b – стороны, α – угол между ними произвольного треугольника;

5) формула Герона: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c – стороны, p – полупериметр произвольного треугольника и $p=\frac{a+b+c}{2}$.

22.6. Признаки равенства и подобия треугольников

Два треугольника *равны*, если выполняется одно из следующих условий:

1) две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника;

2) два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и стороне другого треугольника;

3) три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника.

Два треугольника *подобны*, если:

1) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключенные между соответственными сторонами, равны;

2) два угла одного треугольника равны двум углам другого;

3) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого.

Площади подобных треугольников (многоугольников) пропорциональны квадратам их соответственных линий.

22.7. Четырехугольники

1. *Параллелограммом* называется четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны.

Рассмотрим параллелограмм: a, b – смежные стороны, h_a – высота, проведенная к стороне a, α – острый угол, d_1, d_2 – диагонали, φ – угол между диагоналями (рис. 22.12).

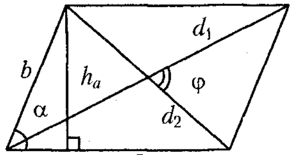


Рис. 22.12

Свойства параллелограмма:

1) противолежащие стороны параллелограмма равны;

2) противолежащие углы параллелограмма равны;

3) диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам;

4) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.

Площадь параллелограмма можно вычислить по одной из формул: $S = ah_a$; $S = ab\sin\alpha$; $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$.

Периметр параллелограмма можно вычислить по формуле

$$P = 2\cdot(a+b).$$

2. *Ромбом* называется параллелограмм, все стороны которого равны.

Рассмотрим ромб: a – сторона, α – острый угол, h – высота, d_1, d_2 – диагонали (рис. 22.13).

Ромбу присущи все свойства параллелограмма и следующие специальные ***свойства***:

1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;

2) диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов.

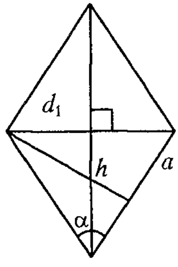


Рис. 22.13

Периметр ромба можно вычислить по формуле $P = 4a$.

Площадь ромба можно вычислить по одной из формул:

$$S = ah\ ;\ S = a^2 \sin\alpha\ ;\ S = \frac{1}{2}d_1 d_2 .$$

3. *Прямоугольником* называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

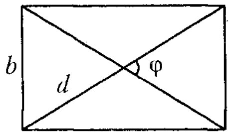


Рис. 22.14

Рассмотрим прямоугольник: a, b – смежные стороны, $d_1 = d_2$ диагонали, φ – угол между диагоналями (рис. 22.14). Прямоугольнику присущи все свойства параллелограмма.

Периметр прямоугольника можно вычислить по формуле

$$P = 2\cdot(a+b) .$$

Площадь прямоугольника можно вычислить по одной из формул:

$$S = ab\ ;\ S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi .$$

4. *Квадратом* называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

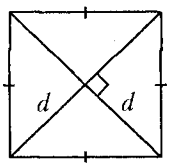


Рис. 22.15

Рассмотрим квадрат: a – сторона, $d_1 = d_2$ – диагонали (рис. 22.15). Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника.

Периметр квадрата можно вычислить по формуле $P = 4a$.
Площадь квадрата можно вычислить по одной из формул:

$$S = a^2\ ;\ S = \frac{1}{2}d^2 .$$

5. *Трапецией* называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются основаниями, а не параллельные стороны – боковыми. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется равнобедренной.

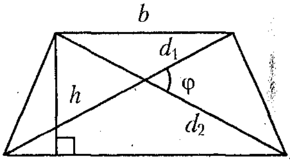


Рис. 22.16

Рассмотрим трапецию: a, b – основания, h – высота, d_1, d_2 – диагонали, φ – угол между диагоналями (рис. 22.16).

Площадь трапеции можно вычислить по одной из формул:

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h, \quad S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

Свойства средней линии трапеции:

1) средняя линия трапеции равна полусумме оснований;

2) средняя линия трапеции параллельна основаниям.

22.8. Окружность и круг

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от некоторой данной точки, называемой центром окружности.

Отрезок, соединяющий центр окружности и любую точку окружности, называется *радиусом* окружности. На рисунке 22.17 отрезки OA, OB и OD – радиусы окружности, причем $R = OA = OB = OD$.

Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности. На рисунке 22.17 отрезки AC и AB – хорды.

Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром окружности. Диаметр состоит из двух радиусов. На рисунке 22.17 хорда AB – диаметр окружности и $AB = 2R$.

Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью, включая точки окружности.

Круговым сектором называется часть круга, ограниченная радиусами и дугой, на которую опираются радиусы.

Круговым сегментом называется часть круга, отсекаемая хордой.

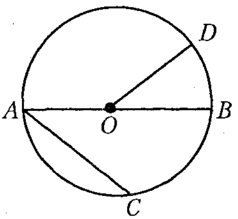


Рис. 22.17

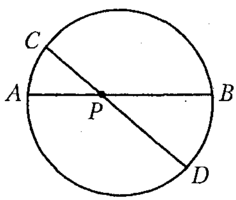


Рис. 22.18

Свойство пересекающихся хорд: если через точку P, лежащую внутри окружности, проведены две хорды AB и CD, то произведения отрезков хорд равны: $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ (рис. 22.18).

Свойства касательных:

1) отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны ($AB = AC$ на рисунке 22.19);

2) радиус окружности перпендикулярен касательной в точке касания ($OB \perp AB$ на рисунке 22.19).

Если окружность вписана в угол, то ее центр лежит на биссектрисе этого угла (на рисунке 22.19 луч AO – биссектриса угла CAB).

Свойство касательной и секущей: если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению секущей и ее внешней части ($AB^2 = AC \cdot AD$ на рисунке 22.20).

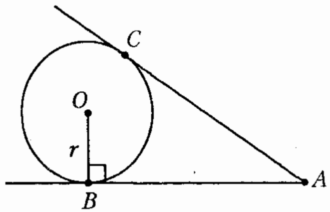


Рис. 22.19

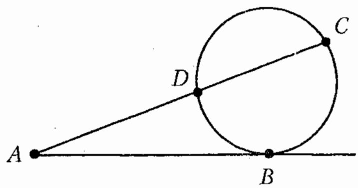


Рис. 22.20

Свойства линий в касающихся и пересекающихся окружностях:

1) линия центров двух пересекающихся окружностей проходит через их точку касания;

2) общая внутренняя касательная двух внешним образом касающихся окружностей перпендикулярна их линии центров;

3) общая касательная двух внутренним образом касающихся окружностей перпендикулярна их линии центров;

4) общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их линии центров и делится точкой их пересечения пополам.

Длины и площади:

$C = 2\pi R$ – ***длина окружности*** радиуса R;

$l = \frac{C}{360^\circ} n^\circ = \frac{2\pi R}{360^\circ} n^\circ$ – ***длина дуги окружности*** радиуса R с центральным углом n°;

$S = \pi R^2$ – ***площадь круга*** радиуса R;

$S_{сект.} = \frac{S_{кр}}{360^\circ} n^\circ = \frac{\pi R^2}{360^\circ} n^\circ$ – ***площадь кругового сектора*** радиуса R с центральным углом n°.

22.9. Вписанные и центральные углы

Угол является *центральным*, если его вершина лежит в центре окружности, а стороны являются радиусами окружности (угол AOB на рис. 22.21). Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.

Угол является *вписанным* в окружность, если его вершина лежит на окружности, а стороны являются непересекающимися хордами этой окружности (угол ACB на рис. 22.22).

Свойства углов, вписанных в окружность:

1) угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла: на рисунке 22.23 $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$;

2) вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 22.24);

3) вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые (рис. 22.25).

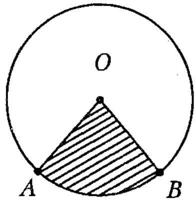


Рис. 22.21

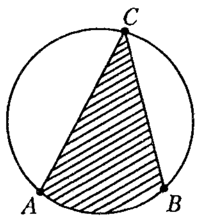


Рис 22.22

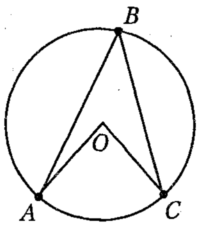


Рис. 22.23

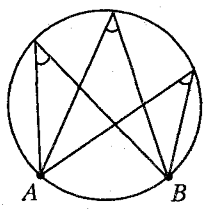


Рис. 22.24

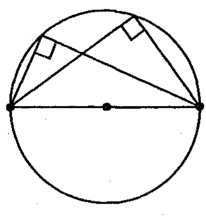


Рис. 22.25

23. 10. Вписанная и описанная окружность

Окружность *вписана* в n-угольник, если она касается всех его сторон (рис. 22.26).

Свойства вписанной окружности:

1) в любой треугольник можно вписать окружность;

2) в четырехугольник $ABCD$ (рис. 22.26) можно вписать окружность, если суммы длин его противолежащих сторон равны:

$$AD + BC = AB + DC\ .$$

Окружность *описана* около n-угольника, если все его вершины лежат на окружности (рис. 22.27).

Свойства описанной окружности:

1) около любого треугольника можно описать окружность;

2) около четырехугольника $ABCD$ (рис. 22.27) можно описать окружность, если суммы его внутренних противолежащих углов равны: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

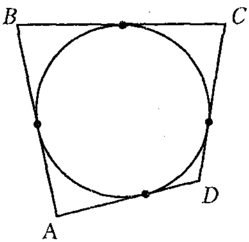


Рис. 22.26

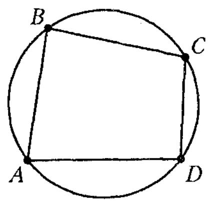


Рис. 22.27

Расположение центров окружностей, вписанных в треугольник:

а) в произвольном треугольнике центр окружности расположен в треугольнике;

б) центром окружности является точка пересечения биссектрис треугольника;

в) в равностороннем треугольнике центром окружности является точка пересечения высот, биссектрис, медиан треугольника;

г) в равнобедренном треугольнике центр окружности лежит на биссектрисе треугольника, проведенной из вершины к его основанию.

Расположение центров окружностей, описанных около треугольников:

а) если треугольник остроугольный, то центр окружности лежит в треугольнике:

– в правильном треугольнике центром окружности является точка пересечения высот, биссектрис, медиан (центры вписанной и описанной окружностей совпадают, точка O на рис. 22.28);

– в равнобедренном треугольнике центр окружности лежит на биссектрисе треугольника, проведенной из вершины к его основанию (точка O на рис. 22.29);

б) если треугольник прямоугольный, то центр окружности лежит на середине гипотенузы (точка O на рис. 22.30);

в) если треугольник тупоугольный, то центр окружности лежит вне треугольника (точка O на рис. 22.31).

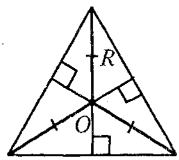


Рис. 22.28

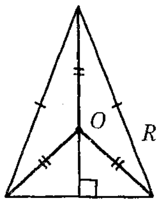


Рис. 22.29

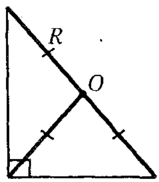


Рис. 22.30

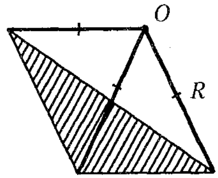


Рис. 22.31

22.11. Формулы для вычисления радиусов вписанной и описанной окружностей

R – радиус описанной, r – радиус вписанной окружности.

Для ***равностороннего*** треугольника со стороной a:

$$R=\frac{a}{\sqrt{3}},\ r=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Для ***произвольного треугольника*** со сторонами a, b, c и площадью S: $R=\frac{abc}{4S}$, $r=\frac{2S}{a+b+c}$.

Для ***прямоугольного треугольника*** с катетами a, b и гипотенузой c: $R=\frac{c}{2}$, $r=\frac{a+b-c}{2}$.

Для ***квадрата*** со стороной a и диагональю d: $R=\frac{d}{2}$, $r=\frac{a}{2}$.

Для ***прямоугольника*** с диагональю d: $R=\frac{d}{2}$.

Для ***ромба*** с высотой h: $r=\frac{h}{2}$.

Для ***трапеции*** с высотой h, при условии, что в трапецию можно вписать окружность: $r=\frac{h}{2}$.

Если около трапеции $ABCD$ (рис. 22.32) можно описать окружность, то: 1) проведя диагональ трапеции и рассмотрев один из полученных треугольников, например, треугольник ABD со сторонами a, b, c и площадью S; 2) по формуле $R = \frac{abc}{4S}$ найдем радиус окружности описанной около треугольника ABD, а значит и около трапеции $ABCD$.

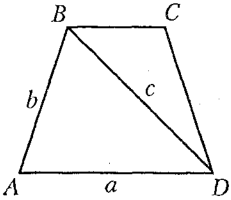


Рис. 22.32

22.12. Шестиугольник

Рассмотрим ***правильный шестиугольник*** со стороной a.

Правильный шестиугольник состоит из шести правильных треугольников (рис. 22.33). Точка O (точка пересечения его больших диагоналей) является центром вписанной и описанной окружностей.

Периметр правильного шестиугольника можно вычислить по формуле $P = 6a$.

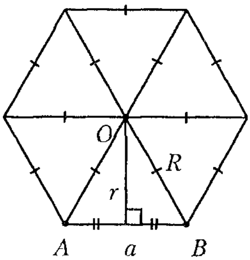


Рис. 22.33

Площадь правильного шестиугольника можно вычислить по формуле

$$S = 6S_{\Delta AOB} = 6\frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.$$

Радиусы вписанной и описанной окружностей можно вычислить по формулам:

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad R = a.$$

Тест для проверки теоретических знаний

Укажите все варианты правильных ответов (1–3):

1. Вертикальными являются углы (рис. A):

1) 1 и 3;	2) 1 и 7;
3) 5 и 7;	4) 2 и 6;
5) 6 и 8;	6) 3 и 5.

2. Смежными являются углы (рис. A):

1) 1 и 2;	2) 1 и 6;
3) 2 и 3;	4) 7 и 8;
5) 7 и 6;	6) 5 и 8.

3. Если прямые a и b параллельны (рис. A), то:

1) $\angle 1 = \angle 7$; 2) $\angle 6 = \angle 4 = \angle 2$;
3) $\angle 4 + \angle 7 = 180°$; 4) $\angle 8 = \angle 6 = \angle 2$;
5) $\angle 4 + \angle 5 = 180°$; 6) $\angle 3 = \angle 6$.

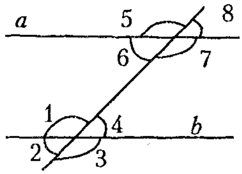


Рис. А

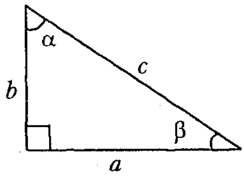


Рис. Б

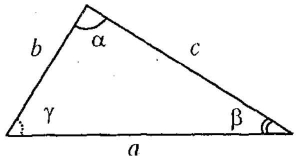


Рис. В

Установите соответствие (4–11):

4. Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике (рис. $Б$):

1) $\frac{a}{b}$; а) $\operatorname{ctg} \alpha$;
2) $\frac{b}{a}$; б) $\sin\beta$;
3) $\frac{a}{c}$; в) $\operatorname{tg} \alpha$;
4) $\frac{b}{c}$. г) $\cos\beta$.

5. Соотношение меду сторонами и углами в произвольном треугольнике (рис. B):

1) c^2; а) $\frac{c}{\cos\gamma}$;
2) b^2; б) $\frac{a}{\sin\alpha}$;
3) $\cos\gamma$; в) $\frac{c\sin\alpha}{a}$;
4) $\frac{b}{\sin\beta}$. г) a^2+b^2;

д) $a^2+b^2-2ab\cos\gamma$;
е) $a^2+c^2-2ac\cos\beta$;
ж) $a^2+c^2-2ac\cos\alpha$;
з) $a^2+b^2-2ab\cos\alpha$.

6. Периметр многоугольника:

МНОГОУГОЛЬНИК	ФОРМУЛА
1) квадрат со стороной a;	а) $a+b+c$;
2) ромб со стороной b;	б) $a+b+2c$;
3) параллелограмм со сторонами a и b;	в) $2(a+b)$;
4) равнобедренная трапеция с основаниями a, b и боковой стороной c;	г) nb 4
5) правильный n-угольник со стороной b.	д) $4b$;
	е) $2a^2$;
	ж) $4a$.

7. Площадь многоугольника:

МНОГОУГОЛЬНИК	ФОРМУЛА
1) правильный треугольник со стороной a;	а) $S=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$;
2) квадрат с диагональю d;	б) $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$;
3) параллелограмм со сторонами a, b и углом α между ними;	в) $S=ab$;
4) ромб с диагоналями d_1 и d_2;	г) $S=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$;
5) правильный шестиугольник со стороной a;	д) $S=\frac{1}{2}(a+b)h$;
6) трапеция с диагоналями d_1, d_2 и углом φ между ними .	е) $S=\frac{1}{2}d^2$;
	ж) $S=\frac{1}{2}d_1d_2$;
	з) $S=ab\sin\alpha$.

8. Свойства четырехугольника

1) в четырехугольник можно вписать окружность, если;	а) суммы его противолежащих углов равны $180°$;
2) около четырехугольника можно описать окружность, если.	б) сумма его внутренних углов равна $360°$;
	в) его противолежащие стороны попарно раны;

г) суммы длин противолежащих сторон не равны;

д) суммы длин противолежащих сторон равны.

9. Радиус окружности, вписанной в многоугольник:

ФОРМУЛА	МНОГОУГОЛЬНИК
1) $r=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$;	а) равнобедренная трапеция с основаниями a, b и боковой стороной c;
2) $r=\dfrac{2S}{a+b+c}$;	б) правильный многоугольник со стороной a;
3) $r=\dfrac{a+b-c}{2}$;	в) ромб с высотой h;
4) $r=\dfrac{a}{2}$;	г) квадрат со стороной a;
5) $r=\dfrac{h}{2}$.	д) треугольник с катетами a, b и гипотенузой c;
	е) треугольник со сторонами a, b, c и площадью S;
	ж) треугольник со стороной a .

10. Радиус окружности, описанной около многоугольника:

ФОРМУЛА	МНОГОУГОЛЬНИК
1) $R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$;	а) треугольник со сторонами a, b, c и площадью S;
2) $R=\dfrac{abc}{4S}$;	б) треугольник с катетами a, b и гипотенузой c;
3) $R=\dfrac{c}{2}$;	в) прямоугольник с диагональю d;
4) $R=\dfrac{d}{2}$.	г) треугольник со стороной a;
	д) ромб со стороной a;
	е) равнобедренная трапеция с основаниями a, b и боковой стороной c.

11. Окружность:

ФОРМУЛА	ПРИМЕНЕНИЕ
1) $C = 2\pi R$;	а) длина дуги окружности радиуса R с центральным углом $n°$;
2) $l = \frac{\pi R}{180°} n°$;	б) длина окружности радиуса R;
3) $S = \pi R^2$;	в) длина хорды окружности радиуса R;
4) $S = \frac{\pi R^2}{360°} n°$.	г) площадь круга радиуса R;
	д) площадь кругового сектора радиуса R с центральным углом $n°$;
	е) площадь кругового сегмента.

Укажите все правильные варианты ответов:

12. Свойства касательных к окружности:

1) отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны;

2) отрезки касательных, проведенных из разных точек к окружности, равны;

3) радиус окружности перпендикулярен касательной;

4) радиус окружности перпендикулярен касательной в точке касания;

5) если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению секущей и ее внешней части;

6) если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка секущей равен произведению секущей и касательной.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6
Вариант правильного ответа	1, 3, 5	1, 3, 4, 5, 6	1, 2, 3, 4, 5	1 – в; 2 – а; 3 – г; 4 – б	1 – д; 2 – е; 3 – в; 4 – б	1 – ж; 2 – д; 3 – в; 4 – б; 5 – г

Номер задания	7	8	9	10	11	12
Вариант правильного ответа	1 – г; 2 – е; 3 – з; 4 – ж; 5 – а; 6 – б	1 – д; 2 – а	1 – ж; 2 – е; 3 – д; 4 – г; 5 – в	1 – г; 2 – а; 3 – б; 4 – в	1 – б; 2 – а; 3 – г; 4 – д	1; 4, 5

Примеры

Пример 1. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной равной 5 см проведена медиана боковой стороны. Найдите основание треугольника, если медиана равна 4 см.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с боковыми сторонами $AB = CB = 5$ см и медианой $AO = 4$ см (рис. 22.34).

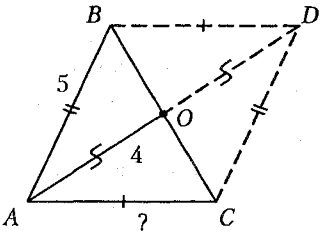


Рис. 22.34

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$. Тогда диагональ параллелограмма $AD = 8$ см. По свойству диагоналей параллелограмма получим: $AD^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2$ или $64 + 25 = 2 \cdot 25 + 2AC^2$, откуда $AC = \sqrt{19{,}5}$ см.

Ответ: $\sqrt{19{,}5}$ см.

Пример 2. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона соответственно равны 5 и 10 см. Найдите биссектрису угла при основании треугольника.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием AC (рис. 22.35). Согласно условию задачи $AC = 5$ см, $AB = BC = 10$ см. Проведем биссектрису AD угла BAC. Полагая $CD = x$ см, запишем $BD = (10 - x)$ см. По свойству биссектрисы треугольника получим: $\frac{AC}{DC} = \frac{AB}{DB}$ или $\frac{5}{x} = \frac{10}{10 - x}$, $10 - x = 2x$, откуда $x = \frac{10}{3}$ см.

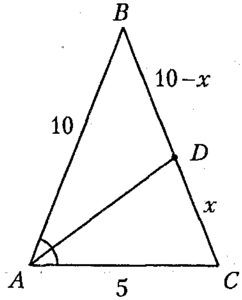


Рис. 22.35

Найдем косинус угла ACB. По теореме косинусов получим:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\angle C,$$

или $100 = 25 + 100 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos\angle C$, откуда $\cos\angle C = \frac{1}{10}$.

Биссектрису AD найдем из треугольника ADC. По теореме косинусов $AD^2 = 25 + \frac{100}{9} - 2 \cdot 5 \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{295}{9}$, откуда $AD = \frac{\sqrt{295}}{3}$ см.

Ответ: $\frac{\sqrt{295}}{3}$ см.

Пример 3. Из внешней точки к окружности проведены касательная и секущая. Длина касательной составляет $\frac{2}{3}$ внутреннего отрезка секущей. Определите длину секущей, если длина касательной равна 6 см.

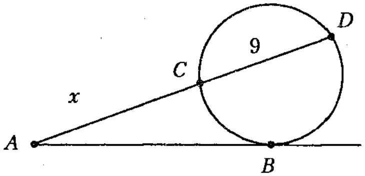


Рис. 22.36

Решение. Отметим вне окружности точку A и проведем из этой точки к окружности секущую AD и касательную AB (рис. 22.36). Определим внутренний отрезок секущей: $CD = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$ см.

Пусть внешний отрезок секущей $AC = x$ см. По свойству касательной и секущей запишем:

$$AB^2 = AD \cdot AC, \text{ или } 36 = (x+9) \cdot x,\ x^2 + 9x - 36 = 0,\ x = 3.$$

Тогда $AD = 3 + 9 = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

Пример 4. Дана точка P, удаленная на 7 см от центра окружности радиуса 11 см. Через эту точку проведена хорда длиной 18см. В каком отношении точка P делит хорду?

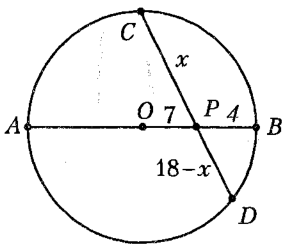


Рис. 22.37

Решение. Рассмотрим окружность (рис. 22.37) радиуса $R = AO = BO = 11$ см. Отметим на диаметре AB точку P так, что $OP = 7$ см, $PB = 4$ см. Через точку P проведем хорду $CD = 18$ см. Тогда, если $CP = x$ см, то $PD = (18 - x)$ см.

По свойству пересекающихся хорд имеем: $AP \cdot BP = CP \cdot DP$ или

$18\cdot 4=x(18-x)$, $x^2-18x+72=0$, откуда $x_1=12$, $x_2=6$. Получили отрезки длиной 12 и 6см. Тогда $CP:PD=2:1$.

Ответ: $2:1$.

Пример 5. В круговой сектор, дуга которого содержит $60°$, вписан круг. Найдите процентное отношение площади этого круга к площади сектора.

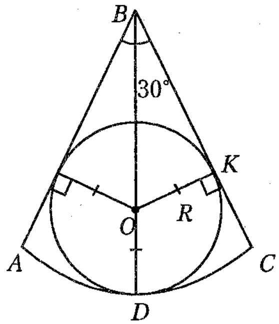


Рис. 22.38

Решение. В круговой сектор ABC (рис. 22.38) впишем круг с центром в точке O: $OK=R_{кр.}$, $BD=R_{сект.}$. Поскольку прямая BC является касательной к кругу, то $OK\perp BK$. Согласно условию задачи $\angle ABC=60°$, тогда $\angle OBK=30°$, так как центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Рассмотрим ΔOBK: $OB=2OK=2R_{кр.}$ (по свойству катета, лежащего против угла $30°$). Так как $R_{сект.}=BO+DO$, то $R_{сект.}=3R_{кр.}$. Найдем площадь круга и площадь сектора:

$$S_{кр.}=\pi R_{кр.}^2;\ S_{сект.}=\frac{\pi R_{сект.}^2}{360°}\cdot 60°=\frac{\pi 9R_{кр.}^2}{6}=\frac{3\pi R_{кр.}^2}{2}.$$

Составим отношение площади круга к площади сектора:

$$\frac{S_{кр.}}{S_{сект.}}=\frac{\pi R_{кр.}^2 2}{3\pi R_{кр.}^2},\ \frac{S_{кр.}}{S_{сект.}}=\frac{2}{3}\ \text{или}\ \frac{200}{3}\%.$$

Ответ: $66\frac{2}{3}\%$.

Пример 6. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 8 см, а радиус окружности, вписанной в треугольник равен 3см. Найдите площадь треугольника.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Точка O является центром вписанной в треугольник окружности (рис. 22.39). Так как радиусы вписанной в треугольник окружности перпендикулярны сторонам треугольника в точках касания, то

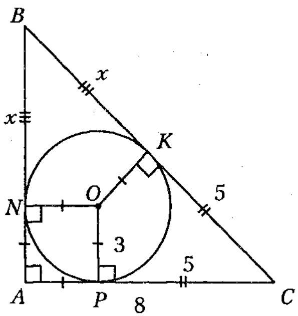


Рис. 22.39

имеем квадрат $ANOP$ со стороной 3 см. Если катет $AC=8$ см, а сторона квадрата $AP=3$ см, то $PC=5$ см.

Пусть отрезок $NB=x$ см. По свойству касательных $CP=CK=5$ см и $BN=BK=x$ см. Тогда по теореме Пифагора $BC^2=AC^2+AB^2$ или $25+10x+x^2=64+9+6x+x^2$, откуда $4x=48$, $x=12$ см.

Найдем катет AB:

$$AB=AN+BN=3+12=15\ (\text{см}).$$

Найдем площадь треугольника:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AB,\ S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 15=60\,(\text{см}^2).$$

Ответ: 60 см^2.

Пример 7. Длины оснований равнобедренной трапеции относятся как 5 : 12, а длина ее высоты равна 17 см. Вычислите площадь круга, описанного около трапеции, если известно, что средняя линия трапеции равна ее высоте.

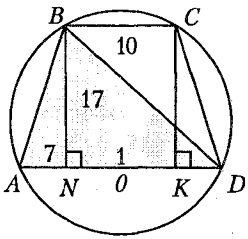


Рис. 22.40

Решение. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ (рис. 22.40) и проведем диагональ трапеции BD. Радиус окружности, описанной около треугольника ABD, найдем по формуле

$$R=\frac{AB\cdot BD\cdot AD}{4\cdot S_{\Delta ABD}}=\frac{AB\cdot BD\cdot AD}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot BN},$$

$$R=\frac{AB\cdot BD}{2\cdot BN}.$$

Зная, что $BC:AD=5:12$ и вводя коэффициент пропорциональности k, получим $BC=5k$, $AD=12k$. Так как длина средней линии трапеции равна высоте трапеции, то $\frac{1}{2}(5k+12k)=17$, откуда $k=2$. Тогда $BC=10$ см, $AD=24$ см.

Поскольку четырехугольник $BCKN$ является прямоугольником, то $NK=10$ см, тогда $AN=KD=\frac{1}{2}(24-10)=7$ (см). Согласно теореме Пифагора запишем:

$$AB=\sqrt{AN^2+BN^2}\,,\ AB=\sqrt{17^2+7^2}=\sqrt{338}\ (\text{см});$$
$$BD=\sqrt{BN^2+ND^2}\,,\ BD=\sqrt{17^2+17^2}=17\sqrt{2}\ (\text{см}).$$

Найдем радиус окружности, описанной около треугольника ABD, а, следовательно, и около трапеции $ABCD$:

$$R=\frac{\sqrt{338}\cdot17\sqrt{2}}{2\cdot17}=\frac{2\cdot13}{2}=13\ (\text{см}).$$

Согласно формуле $S=\pi R^2$ найдем площадь круга:

$$S=169\pi\ \text{см}^2.$$

Ответ: 169π см^2.

Пример 8. Диагональ равнобедренной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 2 см, периметр равен 23 см. Найдите площадь трапеции.

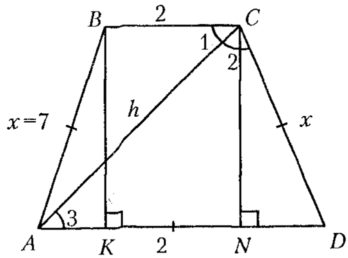


Рис. 22.41

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$ (рис. 22.41) и проведем ее диагональ AC. Углы 1 и 3 равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC с секущей AC. Так как диагональ AC является биссектрисой угла BCD, то $\angle1=\angle2$. В таком случае треугольник ACD – равнобедренный с боковыми сторонами CD и AD.

Пусть $AB=CD=AD=x$ см. Согласно условию задачи $P_{тр.}=23$ см и $23=2+3x$, откуда $x=7$ см. Так как $KN=2$ см, то $AK=ND=$ $=\frac{1}{2}\cdot(7-2)=\frac{5}{2}$ (см). Рассмотрим ΔABK : по теореме Пифагора $h=\sqrt{49-\frac{25}{4}}=\frac{3\sqrt{19}}{2}$.

Согласно формуле $S=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot h$ найдем площадь трапеции:

$$S=\frac{1}{2}\cdot(7+2)\cdot\frac{3\sqrt{19}}{2}=\frac{27\sqrt{19}}{4}\ (\text{см}^2).$$

Ответ: $\frac{27\sqrt{19}}{4}$ см^2.

Пример 9. В трапеции длины оснований равны 5 и 10, а длины диагоналей равны 13 и 14. Найдите площадь трапеции.

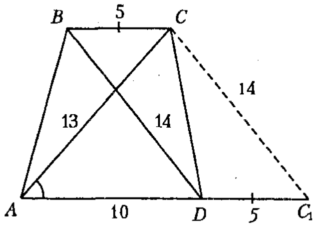


Рис. 22.42

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$ (рис. 22.42). На продолжении стороны AD отложим отрезок DC_1, равный отрезку BC, то есть $DC_1 = 5$. Имеем параллелограмм $DBCC_1$ ($BC = DC_1$, $BC \parallel DC_1$), значит $BD = CC_1 = 14$.

Так как $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta CDC_1} = \frac{1}{2} 5h_{тр.}$, то $S_{тр.} = S_{ACC_1}$.

Площадь треугольника ACC_1 найдем по формуле Герона:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(13+14+15) = 21$.

Получим: $S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{4^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

Ответ: 84.

Пример 10. В большем из двух концентрических кругов проведена хорда длиной 32 см, которая касается меньшего круга. Определите отношение длин меньшей и большей окружностей, если ширина образовавшегося кольца равна 8 см.

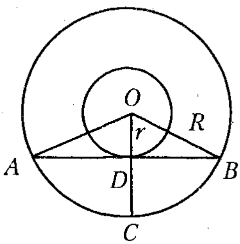


Рис. 22.43

Решение. Рассмотрим два круга с общим центром в точке O (рис. 22.43). Пусть R – радиус большего круга, а r – радиус меньшего круга, AB – хорда, касающаяся меньшего круга. Тогда $OD = r$, $OA = OB = OC = R$ и $OC = OD + DC$. Поскольку ширина образовавшегося кольца равна 8 см, то $R - r = 8$ см и $OD = R - 8$.

Так как хорда AB касается меньшего круга, то $AB \perp OD$, тогда OD высота и медиана равнобедренного треугольника AOB и $AD = DB = 16$ см.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ODB. По теореме Пифагора $OB^2 = OD^2 + DB^2$ или $R^2 = (R-8)^2 + 16^2$, $R^2 = R^2 - 16R + 64 + 16^2$, $16R = 64 + 16^2$, откуда $R = 20$ см и $r = 20 - 8 = 12$ (см).

Найдем отношение длин меньшей и большей окружностей:

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{2\pi\cdot r}{2\pi\cdot R}=\frac{r}{R}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}.$$

Ответ: $3:5$.

Пример 11. Круг разделен на два сегмента хордой, равной стороне правильного вписанного треугольника. Найдите отношение площадей этих сегментов.

Решение. Рассмотрим круг радиуса R и правильный треугольник ABC, вписанный в круг (рис. 22.44). Так как вписанный в окружность угол ABC равен $60°$, то соответствующий ему центральный угол AOC равен $120°$. Найдем площадь треугольника AOC: $S_{AOC}=\frac{1}{2}R^2\sin 120°=\frac{\sqrt{3}R^2}{4}$.

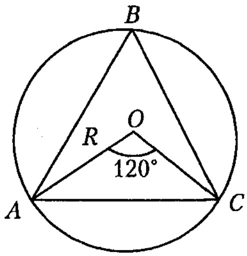


Рис. 22.44

Найдем площадь сектора AOC:

$$S_{сект.}=\frac{\pi R^2}{360°}\cdot 120°=\frac{\pi R^2}{3}.$$

Найдем площадь сегмента, вычитая из площади сектора AOC площадь треугольника AOC:

$$S_{сегм.1}=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{\sqrt{3}R^2}{4}=\frac{R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}.$$

Найдем площадь второго сегмента, вычитая из площади круга площадь первого сегмента:

$$S_{сегм.2}=\pi R^2-\frac{R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}=\frac{R^2\left(8\pi+3\sqrt{3}\right)}{12}.$$

Найдем отношение площадей этих сегментов:

$$\frac{R^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{12}:\frac{R^2\left(8\pi+3\sqrt{3}\right)}{12}=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Основание равнобедренного треугольника равно 30, а длина боковой стороны 25. Найдите высоту треугольника, проведенную к боковой стороне.

2. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см. Радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно равны $\frac{8}{3}$ и $\frac{25}{3}$ см. Найдите основание треугольника.

3. Дан треугольник со сторонами 5, 7 и 9 см. Проведена окружность, касающаяся обеих меньших сторон и имеющая центр на большей стороне треугольника. Найдите отрезки, на которые центр окружности делит большую сторону треугольника.

4. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15 см. Найдите отрезки, на которые точка касания вписанной окружности делит гипотенузу.

5. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если основание его равно 3, а длина высоты, проведенной к основанию, равна длине отрезка, соединяющего середины основания и боковой стороны.

6. В треугольнике длины сторон относятся как 4 : 3 : 2. В него вписан полукруг с диаметром, лежащим на большей стороне. Найдите отношение площади круга к площади треугольника.

7. Определите острые углы прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная к его гипотенузе, делит прямой угол в отношении 4 : 5.

8. В треугольнике с основанием 25 см проведен отрезок, параллельный основанию. Найдите длину половины этого отрезка, если площадь полученной трапеции составляет 0,75 площади треугольника.

9. Длина основания равнобедренного треугольника равна 10, а длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $3\sqrt{10}$. Найдите длину боковой стороны треугольника.

10. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC составляет с основанием AC угол, котангенс которого равен 2. Найдите синус угла ABC.

11. Длины сторон прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 см. Найдите сумму длин катетов треугольника.

12. В треугольнике длины двух сторон составляют 3 и 6 см. Найдите периметр треугольника, если сумма высот, проведенных к этим сторонам, в два раза больше третьей высоты.

13. В прямоугольный треугольник с углом $30°$ вписан ромб со стороной 6 см, причем угол $60°$ у них общий, а все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите полупериметр треугольника.

14. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна $\sqrt{3}$ и вдвое больше своей проекции на боковую сторону. Найдите площадь треугольника.

15. В прямоугольном треугольнике длины медиан катетов равны 6 и 8 см. Найдите длину гипотенузы треугольника.

16. В правильный треугольник вписан квадрат, сторона которого равна $2\sqrt{3}-3$. Найдите сторону треугольника.

17. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, основание равно 12 см. К окружности, вписанной в треугольник, проведены касательные, параллельные высоте треугольника и отсекающие от данного треугольника два прямоугольных треугольника. Найдите сумму периметров этих треугольников.

18. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найдите площадь круга, вписанного в треугольник.

19. Прямая, параллельная основанию, делит площадь треугольника пополам. Длина отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника, равна $18\sqrt{2}$ см. Найдите длину основания треугольника.

20. Через вершины произвольного четырехугольника проведены прямые, параллельные его диагоналям. Найдите отношение площади четырехугольника, образованного этими прямыми, к площади данного четырехугольника.

21. Ромб, у которого сторона равна меньшей диагонали, равновелик кругу радиуса $\sqrt{3\pi}$. Определите сторону ромба.

22. Середины двух смежных сторон квадрата соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Радиус круга, вписанного в образовавшийся треугольник, равен $2\sqrt{5}-\sqrt{2}$ см. Найдите площадь квадрата.

23. Площадь прямоугольника равна 9 см^2, а величина одного из углов, образованного диагоналями, равна $60°$. Найдите отношение большей и меньшей стороны прямоугольника.

24. В квадрате, сторона которого рана 2, середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Найдите площадь внутреннего треугольника.

25. Квадрат, площадь которого равна 2, срезан по углам так, что образовался правильный восьмиугольник. Определите площадь этого восьмиугольника.

26. Определите сторону ромба, зная, что площадь его равна 6, а длины диагоналей относятся как 2 : 3.

27. В ромб, который делится своей диагональю на два правильных треугольника, вписана окружность. Найдите радиус окружности, если сторона ромба равна $\frac{8}{\sqrt{3}}$.

28. Площадь ромба равна 150 см^2, а одна из его диагоналей равна 15 см. Найдите высоту ромба.

29. На сторонах ромба как на диаметрах построены полуокружности, обращенные внутрь ромба. Определите площадь полученной розетки, если диагонали ромба равны 6 и 8.

30. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне AB. Длины сторон AB и AD соответственно равны $\sqrt{13}$ и 7. Найдите диагонали параллелограмма.

31. В параллелограмме со сторонами 12 и 4 см проведены диагонали. Найдите разность между периметрами двух смежных треугольников.

32. В параллелограмме $ABCD$ высота, проведенная из вершины B тупого угла к стороне AD, делит ее в отношении $5:3$, считая от вершины D. Найдите отношение AD к AB, если отрезок AC в два раза длиннее отрезка BD.

33. Величина одного из углов параллелограмма равна $120°$, а меньшая диагональ равна $2\sqrt{31}$ см. Высота параллелограмма равна $5\sqrt{3}$ см. Найдите большую диагональ параллелограмма.

34. В ромб с углом $150°$ вписан круг, а в круг – квадрат. Найдите отношение площади ромба к площади квадрата.

35. В квадрат вписан другой квадрат, вершины которого лежат на серединах сторон первого, а в этот квадрат вписан круг. Какую часть площади данного квадрата составляет площадь круга?

36. В квадрате $ABCD$ точка E – середина стороны BC, а точка F – середина стороны CD. Найдите тангенс угла EAF.

37. Разность между площадью круга и площадью вписанного в него квадрата равна $2\sqrt{3}(\pi-2)$. Найдите периметр правильного шестиугольника, вписанного в этот круг.

38. Вычислите площадь трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), если длины ее оснований относятся как $5:3$ и площадь треугольника ADM равна 50 см^2, где M – точка пересечения прямых AB и CD.

39. Прямые, содержащие боковые стороны равнобедренной трапеции, пересекаются под прямым углом. Найдите полупериметр трапеции, если ее площадь равна 12 см^2, а длина высоты равна 2 см.

40. Один из углов трапеции равен $30°$, а прямые, содержащие боковые стороны трапеции, перпендикулярны. Найдите длину меньшей боковой стороны трапеции, если длины оснований равны 8 см и 12 см.

41. Разность длин оснований равнобедренной трапеции равна 14 см, а сумма длин ее оснований равна 28 см. Вычислите площадь трапеции при условии, что в эту трапецию можно вписать окружность.

42. Около круга описана равнобедренная трапеция с острым углом $60°$. Длина средней линии трапеции равна 4 см. Найдите диаметр круга.

43. В трапеции диагонали равны 4 и 7, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 5. Найдите сумму длин оснований трапеции.

44. Основания трапеции равны 4 и 3, углы при большем основании равны $30°$ и $60°$. Найдите площадь трапеции.

45. Вычислите площадь трапеции, параллельные стороны которой соответственно равны 16 и 44 см, а непараллельные – 17 и 25 см.

46. В равнобедренной трапеции длина средней линии равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

47. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 2. Определите диаметр круга, если угол при основании трапеции равен $150°$.

48. В равнобедренной трапеции сумма длин оснований равна 64 см. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите ее площадь.

49. Трапеция разбита диагоналями на четыре треугольника. Найдите отношение площадей треугольников, прилегающих к боковым сторонам трапеции.

50. Окружность радиуса 7,5 см вписана в равнобедренную трапецию с боковой стороной, равной 17 см. Найдите разность длин оснований трапеции.

51. Найдите высоту равнобедренной трапеции с основаниями 9 и 21 см, если длина окружности, описанной около этой трапеции, равна $21{,}25\pi$ см.

52. На сторонах равностороннего треугольника вне его построены квадраты. Их вершины, лежащие вне треугольника, последовательно соединены. Определите площадь полученного шестиугольника, если сторона данного треугольника равна $\sqrt[4]{3}$.

53. Внутри круга взята точка K на расстоянии 13 см от центра. Через эту точку проведена хорда. Точка K делит хорду на отрезки, длины которых равны 14 и 4 см. Найдите диаметр круга.

54. В равносторонний треугольник вписана окружность радиуса $\sqrt{3}$. Этой окружности и сторон треугольника касаются три малые окружности. Найдите радиусы этих окружностей.

55. Каждая из трех равных окружностей радиуса $\sqrt{3}$ касается двух других. Найдите площадь треугольника, образованного общими внешними касательными к этим окружностям.

56. В правильный треугольник вписана окружность и около него описана окружность. Найдите площадь образовавшегося кольца, если сторона треугольника равна 2.

57. В окружность, длина которой равна $2\sqrt{3}\pi$, вписан правильный треугольник. На его высоте как на стороне построен другой правильный треугольник, в который вписана новая окружность. Найдите длину этой окружности.

58. В окружности проведены две хорды $AB=2$ и $AC=3$. Длина дуги AB в два раза меньше длины дуги AC. Найдите радиус окружности.

59. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами $90°$ и $60°$. Найдите длины окружностей, если квадрат расстояния между их центрами равен $2\sqrt{3}+4$.

60. В сегмент, дуга которого $60°$, вписан квадрат. Вычислите площадь квадрата, если площадь круга равна $\left(29+4\sqrt{51}\right)\pi$.

61. Две окружности радиусов 6 см и 3 см касаются внешним образом. Найдите расстояния от точки касания окружностей до их общих касательных.

62. В сектор AOB с радиусом $\sqrt{2}+1$ и углом $90°$ вписана окружность, касающаяся отрезков OA, OB и дуги AB. Найдите радиус окружности.

63. В пересечение равных кругов вписан ромб. Найдите площадь ромба, если радиус каждой из окружностей равен 7,5 см, а квадрат стороны ромба равен 45 см^2.

64. В острый угол, равный $60°$, вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус большей окружности равен 3. Найдите радиус меньшей окружности.

65. Три окружности разных радиусов попарно касаются друг друга. Отрезки, соединяющие их центры, образуют прямоугольный треугольник. Найдите радиус большей окружности, если радиусы меньшей и средней окружностей равны 2 и 4 см.

66. Круг, радиус которого равен $\sqrt{2}$, разделен на два сегмента хордой, равной стороне вписанного квадрата. Определите площадь меньшего из этих сегментов.

67. Определите площадь кругового кольца, заключенного между двумя концентрическими окружностями, длины которых равны 3π и 2π.

68. В правильный шестиугольник, сторона которого равна 2, вписана окружность, и около него же описана окружность. Определите площадь кругового кольца, заключенного между этими окружностями.

69. Круг радиуса 3 разделен двумя концентрическими с ним окружностями на три равновеликие фигуры. Найдите радиусы этих окружностей.

70. Сторона квадрата, вписанного в окружность, отсекает сегмент, площадь которого равна $(2\pi-4)$ см^2. Найдите сторону квадрата.

Ответы: **1.** 24. **2.** 16 см. **3.** 3,75 и 5,25 см. **4.** 5 и 12 см. **5.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **6.** $\frac{3\pi\sqrt{15}}{25}$. **7.** $40°$ и $50°$. **8.** 6,25 см. **9.** $4\sqrt{10}$. **10.** 0,96. **11.** 7 см. **12.** 13 см. **13.** $13{,}5+4{,}5\sqrt{3}$ см. **14.** $3\sqrt{3}$. **15.** $4\sqrt{5}$ см. **16.** 1. **17.** 24 см. **18.** 25π см^2. **19.** 36 см. **20.** 2. **21.** $\pi\sqrt[4]{12}$. **22.** 144 см^2. **23.** $\sqrt{3}$. **24.** 1,5. **25.** $4(\sqrt{2}-1)$. **26.** $\sqrt{6{,}5}$. **27.** 2. **28.** 12 см. **29.** $12{,}5\pi-24$. **30.** 6 и $2\sqrt{22}$. **31.** 8 см. **32.** 2. **33.** $2\sqrt{91}$ см. **34.** 4. **35.** $\frac{\pi}{8}$. **36.** 0,75. **37.** $6\sqrt[4]{12}$. **38.** 32 см^2. **39.** $6+2\sqrt{2}$ см. **40.** 2 см. **41.** $98\sqrt{3}$ см^2. **42.** $2\sqrt{3}$ см. **43.** $\sqrt{30}$. **44.** $\frac{7\sqrt{3}}{8}$. **45.** 450 см^2. **46.** 100. **47.** 1. **48.** 1024 см^2. **49.** 1. **50.** 16 см. **51.** 8 см. **52.** $3(1+\sqrt{3})$. **53.** 30 см. **54.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **55.** $6(2\sqrt{3}+3)$. **56.** π. **57.** $1{,}5\pi$. **58.** $\frac{4}{\sqrt{7}}$. **59.** 4π и $2\sqrt{2}\pi$. **60.** 1. **61.** 0 и 4с м. **62.** 1. **63.** 36 см^2. **64.** 1. **65.** 6 см. **66.** $\frac{\pi}{2}-1$. **67.** $\frac{5\pi}{4}$. **68.** π. **69.** $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$. **70.** 4 см.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Если около правильного шестиугольника со стороной 2 описать окружность и в этот же шестиугольник вписать окружность, то площадь образовавшегося кольца будет равна	1) π^2; 2) $0{,}2\pi^2$; 3) 3π; 4) 2π; 5) π.
2	В треугольнике ABC проведена высота BD. Если $BD=4$, $BC=4\sqrt{5}$, а $AB=4\sqrt{2}$, то площадь треугольника равна	1) 48; 2) 24; 3) 18; 4) 96; 5) 74.
3	Если один из внутренних углов треугольника равен $56°$, а внешний угол при второй вершине равен $94°$, то внешний угол этого треугольника при третьей вершине равен	1) $150°$; 2) $30°$; 3) $124°$; 4) $142°$; 5) $38°$.
4	Прямая, параллельная стороне правильного треугольника, делит высоту, проведенную к этой стороне, в отношении $1:3$, считая от вершины. Если половина длины отрезка этой прямой, заключенного между другими сторонами треугольника, равна 1,125, то радиус окружности, описанной около треугольника, равен	1) $\sqrt{3}$; 2) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$; 3) $3\sqrt{3}$; 4) 1; 5) 3.
5	Окружность диаметра 5 вписана в ромб $ABCD$ и касается стороны AD в точке N. Если площадь ромба равна 65, то длина отрезка AN равна	1) 6,5; 2) 2,25; 3) 2,5; 4) 0,5; 5) 5,5.

№	Задания	Варианты ответов
6	На стороне AC треугольника ABC взята точка D так, что $AD=6$, $DC=8$. Если высота треугольника, проведенная из вершины A, равна 7, то длина перпендикуляра DH, проведенного на сторону BC, равна	1) 7; 2) 4; 3) 3; 4) 1,2; 5) 2.
7	В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Большая диагональ составляет с меньшей боковой стороной угол $60°$. Если длина меньшей диагонали равна 10, то сумма длин оснований трапеции равна	1) 25; 2) $5\sqrt{3}$; 3) 5; 4) 10; 5) 20.
8	Если две стороны треугольника равны 7 и 5, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 3, то площадь треугольника равна	1) $12\sqrt{3}$; 2) $3\sqrt{6}$; 3) $6\sqrt{6}$; 4) $7{,}5\sqrt{3}$; 5) $3{,}75\sqrt{3}$.
9	Продолжение общей хорды AB двух окружностей пересекает их общую касательную MN в точке K. Если $KA=8$, а расстояние MN между точками касания равно 24, то длина отрезка AB равна	1) 14; 2) 7; 3) 10; 4) 16; 5) 21.
10	Если в равнобокой трапеции меньшее основание равно боковой стороне и равно 4, а площадь трапеции $8+4\sqrt{3}$, то острый угол трапеции равен	1) $30°$; 2) $38°$; 3) $15°$; 4) $45°$; 5) $70°$.
11	Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K так, что $BK=4$. Если площадь параллелограмма равна 12, а величина угла A равна $30°$, то длина отрезка CK равна	1) 21; 2) 2; 3) 6; 4) 8; 5) 1,5.

№	Задания	Варианты ответов
12	Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Если площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S, то периметр параллелограмма равен	1) $\frac{4R^3}{S}$; 2) $\frac{16R^3}{S}$; 3) $8RS$; 4) RS^2; 5) $\frac{R^2}{2S}$.
13	Окружность с центром в точке O проходит через вершину A треугольника ABC, касается прямой BC в точке B и пересекает сторону AC в точке D. Если $\angle AOB = 110°$, $\angle ABD = 120°$, то угол C равен	1) 130°; 2) 25°; 3) 10°; 4) 40°; 5) 95°.
14	Две стороны остроугольного треугольника равны 20 см и 23,2 см. Если радиус вписанной в треугольник окружности равен 6,4 см, то радиус описанной около этого треугольника окружности равен	1) 16 см; 2) 13 см; 3) 9,5 см; 4) 14 см; 5) 14,5 см.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	5	2	4	3	4	2	5
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	3	3	1	2	2	4	5

23 СТЕРЕОМЕТРИЯ

Стереометрией называют раздел геометрии, в котором изучают свойства пространственных фигур. Простейшими фигурами в пространстве являются *точка, прямая* и *плоскость*.

23.1. Свойства прямых и плоскостей

Две прямые в пространстве параллельны, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Две прямые в пространстве скрещиваются, если не существует такой плоскости, в которой они обе лежат.

Признак скрещивающихся прямых. Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещиваются.

Плоскость и прямая, не принадлежащая плоскости, параллельны, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой, принадлежащей плоскости, то она параллельна и плоскости.

Свойства плоскости и прямой, параллельной плоскости:

1) если плоскость содержит прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой;

2) если через каждую из двух параллельных прямых проведены пересекающиеся плоскости, то линия их пересечения параллельна данным прямым.

Две плоскости параллельны, если они не имеют общих точек.

Признак параллельности плоскостей: если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, принадлежащей плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости: если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна плоскости.

Свойства прямой, перпендикулярной плоскости:

1) если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости;

2) прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой плоскости.

Признак перпендикулярности плоскостей: если плоскость содержит перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная к ней, называется наклонной к плоскости.

Теорема о трех перпендикулярах. Для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна проекции этой наклонной на плоскость.

На рисунке 23.1 прямая b – наклонная к плоскости, прямая c – проекция этой наклонной на плоскость и поскольку $a \perp c$, то $a \perp b$.

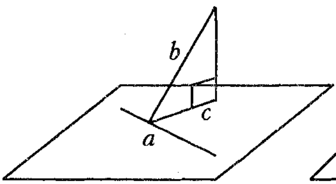


Рис. 23.1

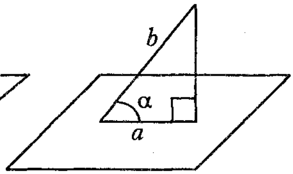


Рис. 23.2

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее проекцией на плоскость. На рисунке 23.2 прямая b – наклонная к плоскости, прямая a – проекция этой наклонной на плоскость, α – угол между этой наклонной и плоскостью.

Двугранный угол образуется в результате пересечения двух плоскостей. Прямая, полученная в результате пересечения двух плоскостей, называется *ребром* двугранного угла. Две полуплоскости с общим ребром называются *гранями* двугранного угла.

Полуплоскость, граница которой совпадает с ребром двугранного угла и которая делит двугранный угол на два равных угла, называется *биссекторной* плоскостью.

Двугранный угол измеряется соответствующим *линейным углом*. Линейным углом двугранного угла называется угол между перпендикулярами, проведенными в каждой грани к ребру.

23.2. Призма

Многогранник, две грани которого равные n – угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней – параллелограммы, называется *n-угольной призмой.*

Два n-угольника являются основаниями призмы, параллелограммы – боковыми гранями. Стороны граней называются *ребрами* призмы, а концы ребер – *вершинами* призмы.

Высотой призмы называется отрезок перпендикуляра, заключенный между основаниями призмы.

Диагональю призмы называется отрезок, соединяющий две вершины оснований, не лежащие в одной грани.

Прямой призмой называется призма, боковые ребра которой перпендикулярны плоскостям оснований (рис. 23.3).

Наклонной призмой называется призма, боковые ребра которой являются наклонными к плоскостям оснований (рис. 23.4).

Объем и площадь поверхности призмы высоты h находят по формулам:

$$V = S_{осн.} \cdot h\,,\ S_{пов.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}\,.$$

Площадь ***боковой поверхности прямой призмы*** можно вычислить по формуле $S_{бок.} = P_{осн.} \cdot h$.

Объем и площадь поверхности наклонной призмы (рис. 23.4) можно вычислить также иначе: $V = S_{сеч.} \cdot l$, $S_{бок.} = P_{сеч.} \cdot l$,

где ΔPNK – сечение, перпендикулярное ребру l.

Правильной призмой называется прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник.

Параллелепипедом называется призма, все грани которой – параллелограммы.

Прямым параллелепипедом называется параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскостям оснований.

Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, основанием которого является прямоугольник.

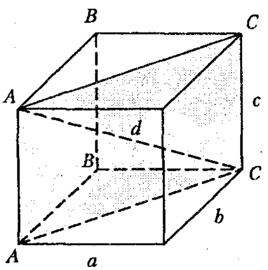


Рис. 23.3

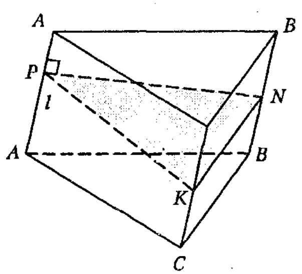


Рис. 23.4

Свойство диагонали прямоугольного параллелепипеда Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, где a, b, c – длины ребер, выходящих из одной вершины, d – диагональ параллелепипеда (рис. 23.3).

Объем прямоугольного параллелепипеда находят по формуле

$$V = abc.$$

Кубом называется прямоугольный параллелепипед с равными ребрами. Все грани куба – квадраты.

Объем, площадь поверхности и диагональ куба с ребром a находят по формулам:

$$V = a^3,\ S_{пов.} = 6a^2,\ d^2 = 3a^2.$$

23.3. Пирамида

Многогранник, одна грань которого – многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной, называется *пирамидой*. Многоугольник называется основанием пирамиды, а треугольники – боковыми гранями.

Высотой пирамиды называется отрезок перпендикуляра, проведенного из вершины пирамиды к плоскости основания.

Если все *боковые ребра пирамиды равны* или наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота опускается в центр *описанной окружности.*

Если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом (*двугранные углы при основании равны*), то высота опускается в центр *вписанной окружности.*

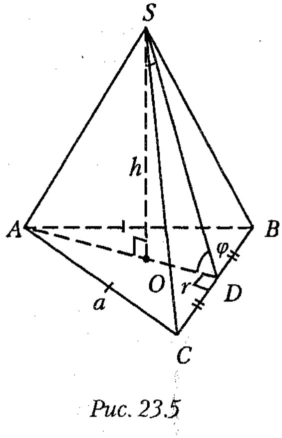


Рис. 23.5

Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник, а высота опускается в центр вписанной и описанной окружности многоугольника, лежащего в основании пирамиды. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из её вершины, называется *апофемой.*

Например, на рисунке 23.5 изображена ***правильная треугольная*** пирамида $SABC$ (тетраэдр): $AB = BC = AC = a$, $OD = r$ – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, $OA = R$ – радиус окружности, описанной около треугольника ABC, $SO = h$ – высота пирамиды, $SD = l$ – апофема, $\angle SAO = \alpha$ – угол наклона бокового ребра SA к плоскости основания, $\angle SDO = \varphi$ – угол наклона боковой грани SBC к плоскости основания пирамиды.

Треугольная пирамида называется *тетраэдром*. Тетраэдр называется правильным, если все его ребра равны.

Объем пирамиды и площадь ее поверхности находят по формулам:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h\text{, } S_{пов.} = S_{осн.} + S_{бок.}\text{,}$$

где h – высота пирамиды

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды находят по формуле $S_{бок} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot h_{бок}$, где $h_{бок.}$ – апофема пирамиды.

Усеченной пирамидой называется многогранник, вершинами которого служат вершины основания пирамиды и вершины её сечения плоскостью, параллельной основанию пирамиды. Основания усеченной пирамиды – подобные многоугольники.

Объем усеченной пирамиды находят по формуле

$$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)\text{,}$$

где S_1 и S_2 – площади оснований, h – высота усеченной пирамиды.

23.4. Правильные многогранники

Правильным многогранником называется выпуклый многогранник, у которого все грани – правильные многоугольники с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Грани правильного многогранника могут быть или равносторонними треугольниками, или квадратами, или правильными пятиугольниками.

Если у правильного многогранника грани – правильные треугольники, то соответствующими многогранниками являются правильный *тетраэдр* (он имеет 4 грани), правильный *октаэдр* (он имеет 8 граней), правильный *икосаэдр* (он имеет 20 граней).

Если у правильного многогранника грани – квадраты, то многогранник называется *кубом* или *гексаэдром* (он имеет 6 граней).

Если у правильного многогранника грани – правильные пятиугольники, то многогранник называется *додекаэдром* (он имеет 12 граней).

23.5. Цилиндр

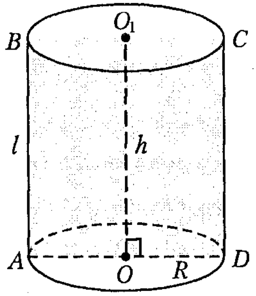


Рис. 23.6

Цилиндром называется фигура, полученная в результате вращения прямоугольника вокруг одной из его сторон.

На рисунке 23.6 прямая OO_1 – ось вращения; $OO_1 = h$ – высота, l – образующая; $ABCD$ – осевое сечение цилиндра, полученного вращением прямоугольника OO_1CD вокруг стороны OO_1.

Объем и площадь поверхности цилиндра находят по формулам:

$V = S_{осн.} \cdot h$, $S_{осн.} = \pi R^2$, $S_{пов.} = 2S_{осн.} + S_{бок.}$, $S_{бок.} = 2\pi Rl$,

где R – радиус основания, h – высота, l – образующая цилиндра.

23.6. Конус

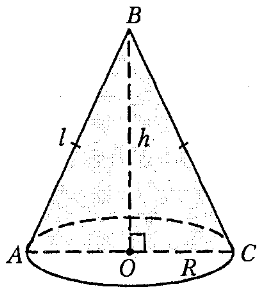


Рис. 23.7

Конусом называется фигура, полученная в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов. На рисунке 23.7 прямая OB – ось вращения; $OB = h$ – высота, l – образующая, ΔABC – осевое сечение конуса, полученного вращением прямоугольного треугольника OBC вокруг катета OB.

Объем и площадь поверхности конуса находят по формулам:

$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$, $S_{осн} = \pi R^2$, $S_{пов.} = S_{осн.} + S_{бок.}$, $S_{бок.} = \pi Rl$,

где R – радиус основания, h – высота, l – образующая конуса.

Усеченным конусом называется часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания.

Площадь поверхности и объем усеченного конуса находят по формулам:

$$S_{бок.} = \pi(R_1 + R_2)l,\ V = \frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2\right),$$

где R_1 и R_2 - радиусы оснований, h – высота усеченного конуса.

23.7. Сфера и шар

Сферой называется фигура, полученная в результате вращения полуокружности вокруг ее диаметра.

Площадь сферы радиуса R находят по формуле $S_{сф.} = 4\pi R^2$.

Шаром называется фигура, полученная вращением полукруга вокруг его диаметра.

Объем шара радиуса R находят по формуле $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Сечение шара плоскостью, проходящей через его центр, называется большим кругом.

Касательной плоскостью к сфере (шару) называется плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку. Эту точку называют точкой касания сферы и плоскости. Касательная плоскость перпендикулярна радиусу сферы в точке касания.

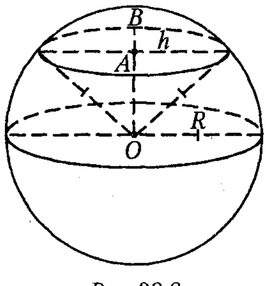


Рис. 23.8

Сферическим (шаровым) сегментом называется часть сферы (шара), отсекаемая плоскостью. Высотой h шарового сегмента называется длина отрезка диаметра, перпендикулярного основанию шарового сегмента, расположенного между этим основанием и сферой (на рис. 23.8 $AB = h$).

Площадь сферической поверхности и объем шарового сегмента находят по формулам:

$$S_{пов.} = 2\pi Rh,\ V_{сегм.} = \pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right),$$

где R – радиус шара; h – высота сегмента.

Шаровым сектором называется тело, полученное вращением кругового сектора вокруг одного из ограничивающих круговой сектор радиусов. Высотой шарового сектора называется высота части его сферической поверхности.

Объем шарового сектора находят по формуле

$$V_{сект.} = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где R – радиус шара; h – высота сегмента.

23.8. Комбинации многогранников и тел вращения

1. Многогранник и шар.

Шар вписан в многогранник, если он касается всех граней многогранника.

Шар описан около многогранника, если все вершины многогранника лежат на поверхности шара.

Решение задач, как правило, необходимо начинать с определения расположения центра шара и радиуса шара.

В прямоугольном параллелепипеде с высотой h и диагональю d центром вписанного и описанного шара является точка пересечения диагоналей параллелепипеда; радиус вписанного шара находят по формуле $R_{вп.} = \frac{h}{2}$, а радиус описанного шара – по формуле $R_{оп.} = \frac{d}{2}$.

В произвольном многограннике центром шара, вписанного в многогранник, является точка пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов многогранника, а центром шара, описанного около многогранника, является точка пересечения всех плоскостей, проходящих через середины ребер многогранника и перпендикулярных им.

2. Комбинация тел вращения.

Шар вписан в конус, если он касается основания конуса в его центре, а боковой поверхности – по окружности. Центр шара находится на оси конуса и равноудален от центра основания и образующей конуса.

Шар описан около конуса, если вершина и окружность основания конуса лежат на поверхности шара. Центр шара лежит на прямой, содержащей ось конуса, и равноудален от вершины и точек окружности основания конуса.

Шар вписан в цилиндр, если он касается оснований цилиндра в их центрах, а боковой поверхности цилиндра по большой окружности шара, параллельной основаниям. Центр шара лежит на середине оси цилиндра, а радиус шара находят по формуле $R_{вп.} = \frac{h}{2}$, где h – высота цилиндра.

Шар описан около цилиндра, если окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара. Центр шара лежит на середине оси цилиндра, а радиус шара находят по формуле $R_{оп.} = \frac{d}{2}$, где d – диагональ осевого сечения цилиндра.

Конус вписан в цилиндр, если основание конуса совпадает с одним из оснований цилиндра, а вершина конуса совпадает с центром другого основания цилиндра.

При решении задач целесообразно строить вспомогательное сечение, проходящее через ось цилиндра или конуса и центр шара. При этом в сечении цилиндра будет получаться прямоугольник, в сечении конуса – равнобедренный треугольник, в сечении шара – круг с радиусом, равным радиусу шара.

Тест для проверки теоретических знаний

Установите соответствие (1–7):

1. Призма:

ВИД	ХАРАКТЕРИСТИКА
1) правильная;	а) прямая призма, основание – правильный многоугольник;
2) прямая;	б) все грани – параллелограммы;
3) правильная прямоугольная;	в) все грани – квадраты;
4) параллелепипед;	г) боковые ребра – перпендикуляры к плоскостям оснований;
5) прямой параллелепипед;	д) боковые ребра наклонены к плоскости основания;
6) прямоугольный параллелепипед;	е) основание – правильный многоугольник;
7) куб.	ж) основание – параллелограмм, боковые грани – прямоугольники;
	з) основание – квадрат, боковые грани – прямоугольники;
	и) все грани – прямоугольники.

2. Пирамида:

ВИД	ХАРАКТЕРИСТИКА
1) правильная;	а) основание – правильный n-угольник;
2) тетраэдр;	б) основание – n-угольник;
3) правильный тетраэдр;	в) все грани – треугольники;
4) четырехугольная;	г) все грани – правильные треугольники;
5) правильная четырехугольная;	д) основание – прямоугольник;
6) n-угольная;	е) основание – квадрат, боковые ребра равны;
7) правильная треугольная.	ж) основание – правильный треугольник;
	з) основание – правильный n-угольник, боковые ребра равны;
	и) основание – правильный треугольник, боковые ребра равны.

3. Высота пирамиды:

ОПУСКАЕТСЯ	ПРИ УСЛОВИИ, ЧТО
1) в центр окружности, вписанной в основание;	а) ребра равны;
2) в центр окружности, описанной около основания;	б) основание – прямоугольный треугольник;
3) на середину гипотенузы;	в) основание – прямоугольный треугольник, ребра равны;
4) в точку, являющуюся центром вписанной и описанной окружностей основания.	г) правильный тетраэдр;
	д) двугранные углы при основании равны;
	е) тетраэдр .

4. Площадь боковой поверхности многогранника:

ФОРМУЛА	МНОГОГРАННИК
1) $S = 4a^2$;	а) правильная пирамида;
2) $S = P_{осн.} \cdot h$;	б) прямая призма;

ФОРМУЛА	МНОГОГРАННИК
3) $S=\frac{1}{2}P_{осн}\cdot h_{бок}$.	в) куб с ребром a;
	г) призма;
	д) пирамида.

5. Объем многогранника:

ФОРМУЛА	МНОГОГРАННИК
1) $V=a^3$;	а) наклонная призма, h – высота;
2) $V=S_{осн.}\cdot h$;	б) пирамида, h – высота;
3) $V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$;	в) усеченная пирамида, h – высота;
	г) куб с ребром a;
	д) куб с ребром h.

6. Площадь поверхности тела вращения:

ФОРМУЛА	ТЕЛО ВРАЩЕНИЯ
1) $S=4\pi R^2$;	а) конус, R – радиус основания, h – высота, l – образующая;
2) $S=\pi R^2+\pi Rl$;	б) сфера радиуса R;
3) $S=\pi R^2+2\pi Rl$;	в) цилиндр, R – радиус основания, h – высота, l – образующая;
	г) усеченный конус.

7. Объем тела вращения:

ФОРМУЛА	ТЕЛО ВРАЩЕНИЯ
1) $V=\frac{2}{3}\pi R^2 h$;	а) шар радиуса R;
2) $V=\frac{4}{3}\pi R^3$;	б) конус;
3) $V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$;	в) усеченный конус, R_1 и R_2 – радиусы оснований, h – высота;
4) $V=\frac{\pi h}{3}\left(R_1^2+R_2^2+R_1R_2\right)$;	г) цилиндр;
5) $V=S_{осн.}\cdot h$.	д) шаровой сектор, R – радиус шара; h – высота сегмента;
	е) шаровой сегмент.

Ответы

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7
Вариант правильного ответа	1 – а; 2 – г; 3 – з; 4 – б; 5 – ж; 6 – и; 7 – в	1 – з; 2 – в; 3 – г; 4 – д; 5 – е; 6 – б; 7 – и	1 – а; 2 – д; 3 – в; 4 – г	1 – в; 2 – б; 3 – а	1 – г; 2 – а; 3 – б	1 – б; 2 – а; 3 – в	1 – д; 2 – а; 3 – б; 4 – в; 5 – г

Примеры

Пример 1. Вычислите объем правильного тетраэдра с ребром, равным a.

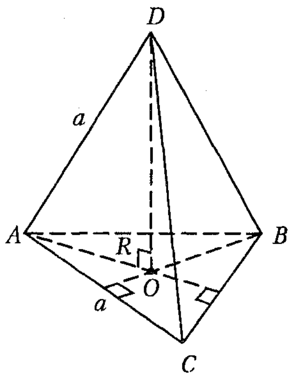


Рис. 23.9

Решение. Так как тетраэдр правильный (рис. 23.9), то его высота опускается в центр треугольника ABC: точку O, точку пересечения высот, биссектрис и медиан этого треугольника. Тогда $OA = R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ – радиус окружности, описанной около ΔABC; $DO = h$ – высота тетраэдра.

Найдем высоту тетраэдра. Рассмотрим треугольник AOD. По теореме Пифагора $OD^2 = AD^2 - AO^2$ или $h^2 = a^2 - R^2$.

Тогда $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$.

Объем тетраэдра вычислим по формуле $V = \frac{1}{3}S_{осн.}h$,

где $S_{осн.} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

Запишем: $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}a^2}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Пример 2. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c, и острым углом $30°$. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Найдите объем пирамиды.

Решение. Основанием пирамиды является треугольник ABC: $\angle C = 90°$; $AB = c$ (рис. 23.10). Так как боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды опускается в центр окружности, описанной около этого треугольника (на рисунке 23.10 точка O). Тогда $AO = R = \frac{c}{2}$ и высота пирамиды $h = SO$.

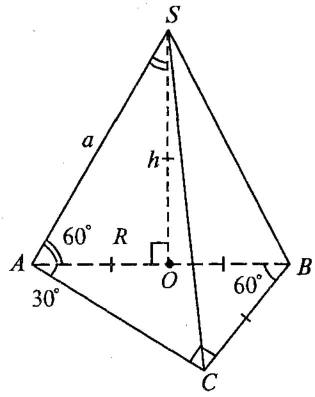


Рис. 23.10

Рассмотрим прямоугольный треугольник SAO. Угол SAO является углом наклона бокового ребра к плоскости основания, так как отрезок AO – проекция ребра AS на плоскость основания и $\angle SAO = 60°$. Тогда $\operatorname{tg} 60° = \frac{SO}{AO}$ и $SO = \frac{\sqrt{3}c}{2} = h$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC: $CB = \frac{c}{2}$ по свойству катета, лежащего против угла $30°$; $\angle B = 60°$. Площадь треугольника найдем по формуле $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CB \cdot \sin\angle B$, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} c \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}c^2}{8}$. Найдем объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} h,\ V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}c^2}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}c}{2} = \frac{c^3}{16}.$$

Ответ: $\frac{c^3}{16}$.

Пример 3. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 6 и 6 см. Боковые грани пирамиды образуют с ее основанием равные двугранные углы, содержащие по $45°$. Определите объем пирамиды.

Решение. Основанием пирамиды (рис. 23.11) служит равнобедренный треугольник ABC: $AB = CB = 6$ см, $AC = 5$ см. Так как боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы, то высота пирамиды опускается в центр

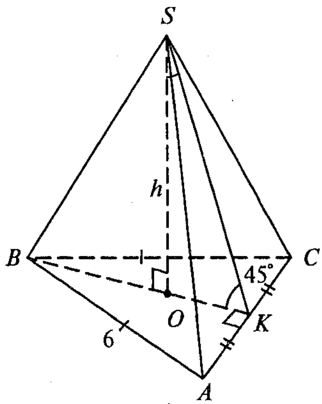


Рис. 23.11

окружности, вписанной в треугольник ABC, то есть в точку O, лежащую на высоте BK этого треугольника.

Тогда $AK = CK = 2{,}5$ см; $OK = r$, где r – радиус окружности, вписанной в основание пирамиды и $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$.

Площадь треугольника ABC найдем по формуле Герона $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{5+6+6}{2} = 8{,}5$ (см) и $S_{\Delta ABC} = \sqrt{8{,}5 \cdot (8{,}5-5)(8{,}5-6)^2} = \dfrac{5\sqrt{119}}{4}$ (см^2). Следовательно

$$r = \frac{5\sqrt{119}}{2 \cdot 17} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{17}} \text{ (см)}.$$

Угол SKB – линейный угол двугранного угла $SACB$, так как $BK \perp AC$ и $SK \perp AC$, и согласно условию задачи $\angle SKB = 45°$. Значит треугольник SOK равнобедренный и $h = r = \dfrac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{17}}$ см.

Согласно формуле $V = \dfrac{1}{3} S_{осн} h$ найдем объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\sqrt{119}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{17}} = \frac{25 \cdot 7}{24} = \frac{175}{24} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $\dfrac{175}{24}$ см^3.

Пример 4. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 6 см, а диагонали его боковых граней равны 4 и 5 см. Определите объем параллелепипеда.

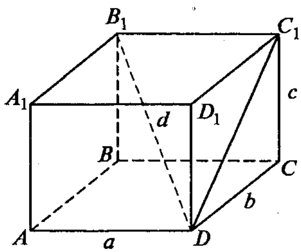


Рис. 23.12

Решение. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед (рис. 23.12), где a, b, c – три его измерения; $d = 6$ см – диагональ. Запишем свойство диагонали прямоугольного параллелепипеда: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Рассмотрим треугольник DCC_1. Так как $DC_1 = 4$ см, то $b^2 + c^2 = 16$. Рассмотрим треугольник DAA_1. Так как $A_1D = 5$ см, то $a^2 + c^2 = 25$.

Запишем и решим систему уравнений $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 36, \\ b^2 + c^2 = 16, \\ a^2 + c^2 = 25. \end{cases}$ Из второго уравнения системы выразим b^2:

$b^2 = 16 - c^2$. Из третьего уравнения выразим a^2: $a^2 = 25 - c^2$. Подставим полученные значения a^2 и b^2 в первое уравнение системы и найдем значение c:

$$25 - c^2 + 16 - c^2 + c^2 = 36,\ c^2 = 5,\ c = \sqrt{5}\ \text{см}.$$

Зная c, определим значения a и b: $b^2 = 16 - 5 = 11$, $b = \sqrt{11}$ см; $a^2 = 25 - 5 = 20$, $a = 2\sqrt{5}$ см.

Согласно формуле $V = abc$ найдем объем параллелепипеда. Получим $V = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{5} = 10\sqrt{11}$ (см^3).

Ответ: $10\sqrt{11}$ см^3.

Пример 5. Определите объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с плоскостью боковой грани угол $30°$, а сторона основания равна 2.

Решение. Согласно условию задачи основанием призмы является квадрат со стороной 2 (рис. 23.13).

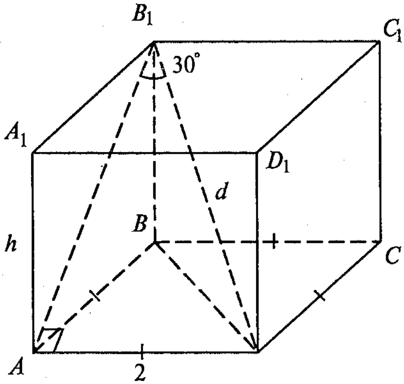


Рис. 23.13

Так как отрезок AB_1 является проекцией диагонали призмы DB_1 на грань AA_1B_1B, то угол AB_1D является углом наклона диагонали призмы к плоскости боковой грани и $\angle AB_1D = 30°$.

Рассмотрим треугольник AB_1D. По свойству катета лежащего против угла $30°$ запишем $B_1D = 4$.

Так как согласно свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда $d^2 = AD^2 + AB^2 + AA_1^2$, то $16 = 4 + 4 + h^2$, $h^2 = 8$, $h = 2\sqrt{2}$.

Найдем объем призмы по формуле $V = S_{осн}h$. Получим

$$V = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}.$$

Ответ: $8\sqrt{2}$.

Пример 6. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 119, а объем его равен 7π. Найдите высоту этого цилиндра.

Решение. Площадь боковой поверхности и объем цилиндра найдем по формулам $S_{бок.} = 2\pi Rh$ и $V = \pi R^2 h$, где R – радиус основания, h – высота цилиндра. Тогда согласно условию задачи запишем: $\begin{cases} 2\pi Rh = 119, \\ \pi R^2 h = 7\pi. \end{cases}$ Разделим первое уравнение системы на второе и получим: $\frac{2\pi Rh}{\pi R^2 h} = \frac{119}{7\pi}$, $\frac{2}{R} = \frac{17}{\pi}$, $R = \frac{2\pi}{17}$. Найдем h из первого уравнения системы: $h = \frac{119}{2\pi R} = \frac{119 \cdot 17}{2\pi \cdot 2\pi} = \frac{2023}{4\pi^2}$.

Ответ: $\frac{2023}{4\pi^2}$.

Пример 7. Радиус основания конуса равен $\sqrt{15}$, а угол при вершине в развертке его боковой поверхности равен $90°$. Определите объем конуса.

Решение. Рассмотрим конус радиуса $R = \sqrt{15}$ (рис. 23.14) и развертку его боковой поверхности – круговой сектор радиуса l (рис. 23.15).

Найдем длину окружности в основании конуса $C_{окр.} = 2\pi R = 2\sqrt{15}\pi$ и длину дуги в развертке боковой поверхности конуса $C_{дуги} = \frac{2\pi l}{360°} \cdot 90° = \frac{\pi l}{2}$. Так как $C_{окр.} = C_{дуги}$, то $2\pi R = \frac{\pi l}{2}$ и $l = 4R = 4\sqrt{15}$.

Рассмотрим треугольник AOS. Согласно теореме Пифагора запишем: $h^2 = l^2 - R^2$, $h = \sqrt{16 \cdot 15 - 15} = 15$.

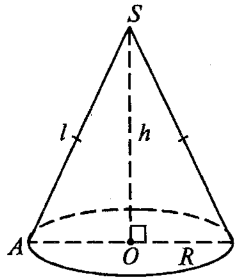


Рис. 23.14

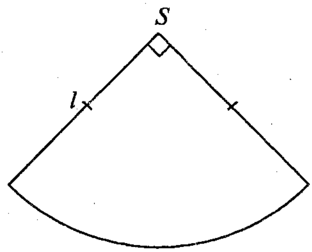


Рис. 23.15

Найдем объем конуса по формуле $V = \frac{1}{3} S_{осн} h$. Получим $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 15 \cdot 15 = 75\pi$.

Ответ: 75π.

Пример 8. В конус, осевое сечение которого – равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объем конуса, если объем шара равен $\frac{9\pi}{16}$ см^3.

Решение. Запишем формулу для нахождения объема шара: $V_ш = \frac{4}{3}\pi R_ш^3$. Радиус шара найдем, решая уравнение $\frac{4}{3}\pi R_ш^3 = \frac{9\pi}{16}$, откуда получим $R_ш = \frac{3}{4}$ см. Так как осевым сечением конуса является равносторонний треугольник ABC (рис. 23.16), то центр шара (точка O_1) лежит на высоте конуса и радиус шара равен радиусу r окружности, вписанной в треугольник ABC, т. е. $R_ш = r$.

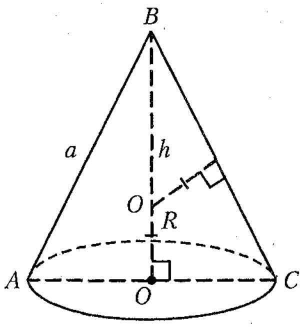


Рис. 23.16

В свою очередь радиус окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной a, находят по формуле $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Следовательно, $a = 2\sqrt{3}\cdot r$, $a = 2\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см).

Найдем радиус основания конуса и его высоту:

$$R_{кон.} = \frac{1}{2}\cdot a = \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ (см)};$$

$$h_{кон.} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2},\ h_{кон.} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4} \text{ (см)}.$$

Согласно формуле $V = \frac{1}{3}S_{осн}h$ найдем объем конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2\cdot\frac{9}{4} = \frac{81\pi}{64} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: $\frac{81\pi}{64}$ см^3.

Пример 9. Равнобедренная трапеция с основаниями 12 и 13 см и острым углом 60° вращается вокруг меньшего основания. Вычислите поверхность полученной фигуры вращения.

Решение. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями $BC = 12$ см и $AD = 13$ см (рис. 23.17). Вращая трапецию вокруг основания BC, получим тело, боковая поверхность которого состоит из боковой поверхности цилиндра и боковой поверхности двух равных конусов: $S_{пов.} = S_{бок.цил.} + 2S_{бок.кон.}$. В трапеции $ABCD$ из вершин B и C проведем высоты BN и CM. Тогда

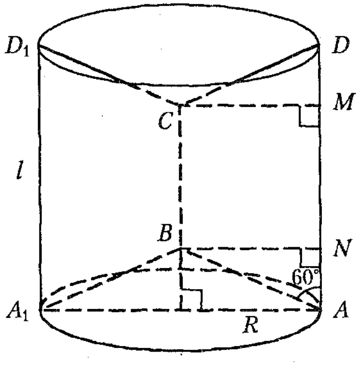


Рис. 23.17

$BN = CM = R_{цил.} = R_{кон.} = h_{тр.}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABN: $\angle BAN = 60°$, $AN = \frac{1}{2}(AD - NM) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ (см), тогда $AB = 2AN = 1$ (см) и $BN = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (см).

Согласно формуле $S_{бок.цил.} = 2\pi R_{цил.} l_{цил.}$ получим:

$S_{бок.цил.} = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 13 = 13\sqrt{3}\pi$ (см^2).

Согласно формуле $S_{бок.кон.} = \pi R_{кон.} l_{кон.}$ получим: $S_{бок.кон.} = \pi \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ (см^2).

Найдем площадь поверхности тела вращения:

$$S_{пов.} = 13\sqrt{3}\pi + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}\pi}{2} = 14\sqrt{3}\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $14\sqrt{3}\pi$ см^2.

Пример 10. Найдите отношение радиуса шара, описанного около правильного тетраэдра, к радиусу шара, вписанного в этот тетраэдр.

Решение. Пусть ребро тетраэдра равно a. Высота правильного тетраэдра опускается в центр правильного треугольника ABC (рис. 23.18), поэтому $OA = R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $OD = r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Центры описанного около правильного тетраэдра и вписанного в него шаров совпадают и лежат на высоте тетраэдра SO (точка O_1).

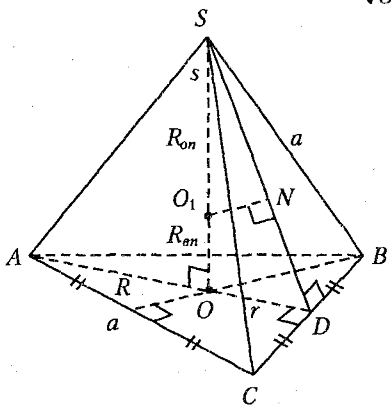


Рис. 23.18

Поскольку точки A, B, C, S лежат на поверхности описанного шара, то $O_1A = O_1C = O_1B = O_1S = R_{опис.}$ Угол ADS – угол наклона боковой грани к плоскости основания (SD и AD – перпендикуляры к ребру CD). Вписанный шар касается всех граней тетраэдра, следовательно, его радиус является перпендикуляром к плоскостям граней, то есть $R_{впис.} = O_1O = O_1N$.

Так как $\Delta SOD \sim \Delta SNO_1$ ($\angle SNO_1 = \angle SOD = 90°$ и $\angle S$ – общий), то запишем $\frac{OD}{NO_1} = \frac{SD}{SO_1}$ или $\frac{r}{R_{впис.}} = \frac{SD}{R_{опис.}}$, откуда $R_{опис.} = \frac{R_{впис.} \cdot SD}{r}$.

Длину отрезка SD найдем по теореме Пифагора из треугольника SDB: $SD = \sqrt{SB^2 - DB^2}$, $CD = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Найдем отношение радиусов описного около тетраэдра и вписанного в тетраэдр шаров:

$$\frac{R_{опис.}}{R_{впис.}} = \frac{R_{впис.} \cdot SD}{r \cdot R_{впис.}} = \frac{SD}{r} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{2a} = 3.$$

Ответ: 3.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из точки, квадрат расстояния от которой до плоскости равен 50, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45°. Расстояние между основаниями наклонных равно 10. Найдите угол между наклонными.

2. На ребре двугранного угла, равного 120°, взят отрезок AB. Из его концов в различных гранях к нему восстановлены перпендикуляры AC длиной 1 см и BD длиной 2 см. Расстояние между точками C и D равно 4 см. Вычислите длину отрезка AB.

3. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 и 4, а угол между ними содержит 120°. Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.

4. В основании наклонной призмы лежит параллелограмм со сторонами 3 и 6 дм и острым углом 45°. Боковое ребро призмы наклонено к плоскости основания под углом 30°. Объем призмы равен $18\sqrt{2}$ дм³. Найдите длину бокового ребра.

5. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб. Плоскость, проведенная через одну из сторон нижнего основания и противоположную сторону верхнего основания, образует с плоскостью основания угол 45°. Полученное сечение имеет площадь, равную $2\sqrt{2}$. Определите боковую поверхность параллелепипеда.

6. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 0,1 и 0,4 дм и тупым углом 120°. Большая диагональ параллелепипеда равна 50 мм. Определите его объем.

7. Определите объем правильной шестиугольной призмы, у которой наибольшая диагональ равна $\sqrt{3}$, а боковые грани – квадраты.

8. Найдите объем куба, если расстояние от его диагонали до непересекающегося с ней ребра равно 1.

9. Основание призмы – квадрат со стороной, равной $4-\sqrt{3}$. Одна из боковых граней – также квадрат, другая – ромб с углом $60°$. Определите полную поверхность призмы.

10. Основанием параллелепипеда служит квадрат со стороной, равной 2. Одна из вершин верхнего основания одинаково отстоит от всех вершин нижнего основания и удалена от плоскости этого основания на расстояние, равное $\sqrt{3}$. Определите полную поверхность параллелепипеда.

11. Определите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна $\sqrt{2}$ и составляет с одной гранью угол $30°$, а с другой – $45°$.

12. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна 5. Площади диагональных сечений равны 3 и 4. Определите объем и боковую поверхность параллелепипеда.

13. Наибольшая диагональ правильной шестиугольной призмы равна d и составляет с плоскостью основания угол $60°$. Найдите объем призмы.

14. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны $\sqrt{5}$ и 5. Диагональ параллелепипеда наклонена к боковой грани, содержащей сторону основания, равную $\sqrt{5}$, под углом $60°$. Найдите объем параллелепипеда.

15. Основанием наклонной треугольной призмы служит равносторонний треугольник со стороной 10, боковое ребро призмы равно стороне основания и наклонено к плоскости основания под углом $60°$. Найдите объем призмы.

16. Найдите объем правильной треугольной призмы со стороной основания a, если площадь основания призмы равна половине площади ее боковой поверхности.

17. В правильной треугольной призме площадь сечения, проходящего через боковое ребро перпендикулярно противолежащей боковой грани, равна $\sqrt{3}$. Сторона основания призмы равна $\sqrt{2}$. Найдите полную поверхность призмы.

18. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 10 см и образует с плоскостью основания угол $60°$. Боковая поверхность параллелепипеда равна $70\sqrt{3}$ см^2. Найдите площадь основания.

19. Определите объем прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ равна 2, а длины ребер относятся как $1:2:3$.

20. Площади боковых граней прямой треугольной призмы равны 3, 4 и 5. Ее боковое ребро равно 6. Определите объем призмы.

21 Площадь основания и объем правильной четырехугольной призмы соответственно равны 18 и 15. Вычислите ее полную поверхность.

22. Найдите боковую поверхность правильной треугольной призмы с высотой 7, если прямая, проходящая через центр верхнего основания и точку K – середину стороны нижнего основания, наклонена к плоскости боковой грани, содержащую точку K, под углом $30°$.

23. Правильная шестиугольная призма, боковые ребра которой равны 3 см, рассечена диагональной плоскостью на две равные четырехугольные призмы. Определите боковую поверхность четырехугольной призмы, если объем шестиугольной призмы равен $18\sqrt{3}$ см^3.

24. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно высоте основания, а площадь сечения, проведенного через это ребро и высоту основания, равна $3\sqrt{3}$. Определите объем призмы.

25. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 6 и 4 и образуют угол $30°$. Боковая поверхность равна 2. Определите объем параллелепипеда.

26. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда относятся как $0{,}2:0{,}3$, а диагональное сечение представляет собой квадрат с площадью, равной 9. Определите объем параллелепипеда.

27. Измерения прямоугольного параллелепипеда 6, 2, и 3. Найдите площадь грани такого куба, чтобы объемы этих тел относились как их поверхности.

28. Определите объем наклонной треугольной призмы, у которой площадь одной из боковых граней равна 4, а расстояние от плоскости этой грани до противолежащего ребра равно 6.

29. Куб объемом $64\sqrt[4]{27}$ пересечен плоскостью, проходящий через середины трех его ребер, выходящих из одной вершины. Найдите площадь сечения.

30. Вычислите объем правильного тетраэдра, если радиус окружности, описанной около его грани, равен 8.

31. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании равен $45°$. Определите объем и полную поверхность пирамиды.

32. Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен $90°$. Найдите квадрат отношения площади основания пирамиды к ее боковой поверхности.

33. Основанием правильной пирамиды служит шестиугольник. Боковое ребро, равное $\sqrt[3]{2}$, составляет с высотой пирамиды угол $30°$. Определите объем пирамиды.

34. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна ее боковому ребру и равна 2. Найдите полную поверхность пирамиды и ее объем.

35. Апофема правильной шестиугольной пирамиды равна $\sqrt[4]{3}$, а боковая грань пирамиды наклонена к плоскости ее основания под углом $60°$. Найдите полную поверхность пирамиды.

36. Найдите полную поверхность правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, если апофема пирамиды образует с ее высотой угол $30°$.

37. Основание четырехугольной пирамиды – прямоугольник с диагональю, равной $\sqrt{6}$, и углом $120°$ между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол $45°$. Найдите объем пирамиды.

38. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1 см, а ее боковая поверхность равна 3 см^2. Найдите объем пирамиды.

39. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 3, 3 и 5. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Определите объем пирамиды.

40. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 11, а высота равна 7. Определите объем пирамиды.

41. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами 8 и 6. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $45°$. Определите объем усеченной пирамиды.

42. Боковые ребра правильной усеченной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно a и b $(a > b)$. Найдите объем усеченной пирамиды.

43. Определите диагональ правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее объем равен 872 см^3, а длины сторон оснований 14 и 10 см.

44. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол $45°$, а площадь диагонального сечения равна 81.

45. Основанием пирамиды служит ромб с острым углом $30°$. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Определите объем и полную поверхность пирамиды, если радиус вписанного в ромб круга равен 1.

46. Объем правильной треугольной пирамиды равен 9 см^3, двугранные углы при основании равны $45°$. Найдите полную поверхность пирамиды.

47. В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и имеют длины $\sqrt{12}$, $\sqrt{15}$ и $\sqrt{18}$ см. Найдите объем пирамиды.

48. Высота правильного тетраэдра равна h. Вычислите его полную поверхность.

49. Каждое из боковых ребер пирамиды равно 4. Ее основанием служит прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как $3:4$, а гипотенуза равна 6. Вычислите объем пирамиды.

50. В основании пирамиды лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углом $45°$. Среднее по величине боковое ребро равно $\sqrt{2}$. Найдите объем и полную поверхность пирамиды.

51. По стороне основания, равной a, определите боковую поверхность и объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой площадь диагонального сечения равна площади основания.

52. Найдите отношение объема правильной шестиугольной пирамиды к объему правильной треугольной пирамиды, если стороны оснований этих пирамид равны и в 2 раза меньше их апофем.

53. В пирамиде $FACB$ через медиану BK основания ABC и середину L бокового ребра FA проведена плоскость. Найдите отношение объема многогранника $BCKLF$ к объему пирамиды $ABKL$.

54. В правильном тетраэдре $SABC$ построено сечение, проходящее через ребро AC и точку K, принадлежащую ребру SB, причем длина отрезка BK в два раза больше длины отрезка KS. Найдите объем пирамиды $KABC$, если ребро тетраэдра равно 3.

55. Цилиндр образован вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. Найдите объем цилиндра, если площадь прямоугольника равна 15, а длина окружности, описанной точкой пересечения его диагоналей, равна 15π.

56. Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите отношение площади его основания к боковой поверхности.

57. Найдите объем конуса, если его боковая поверхность равна 3 и расстояние от центра основания до образующей равно 1.

58. Высота конуса разделена на три равных отрезка и через точки деления параллельно основанию проведены плоскости, разбивающие конус на три части. Найдите объем среднего усеченного конуса, если объем данного конуса равен V.

59. Боковая поверхность конуса развернута на плоскости в сектор, центральный угол которого содержит $120°$, а ее площадь равна 6π. Найдите объем конуса.

60. Вычислите поверхность тела, полученного при вращении ромба площадью $\frac{4}{\pi}$ вокруг одной из его сторон.

61. На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность с центром в точке O, а на отрезках OA и OB построены полуокружности, расположенные в той же полуплоскости с границей AB, что и первая. Найдите отношение объема и поверхности тела, которое образовано вращением вокруг AB фигуры, ограниченной этими полуокружностями, если $AB = 20$ см.

62. Металлический шар переплавлен в конус, площадь основания которого в 3 раза меньше площади боковой поверхности. Высота конуса равна 4. Найдите диаметр шара.

63. Определите объем октаэдра (правильного восьмигранника), ребро которого равно $3\sqrt{2}$.

64. Центр верхнего основания правильной четырехугольной призмы и середины сторон нижнего основания служат вершинами вписанной в призму пирамиды, объем которой равен 6. Найдите объем призмы.

65. На основаниях цилиндра с квадратным осевым сечением построены два конуса с вершинами в середине оси цилиндра. Найдите сумму полных поверхностей конусов, если высота цилиндра равна $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

66. Определите объем шара, вписанного в правильную пирамиду, у которой высота равна 3, а двугранный угол при основании равен $60°$.

67. Конус и полушар имеют общее основание, радиус которого равен 5. Найдите боковую поверхность конуса, если его объем равен объему полушара.

68. Найдите отношение поверхности и объема шара соответственно к поверхности и объему вписанного в шар куба.

69. Найдите отношение поверхности и объема шара соответственно к полной поверхности и объему описанного вокруг него конуса с равносторонним осевым сечением.

70. Определите поверхность шара, описанного около конуса, у которого радиус основания равен 2, а высота равна 4.

71. В шар вписан конус, образующая которого равна диаметру основания. Найдите отношение поверхности шара к полной поверхности конуса.

72. Металлический шар радиуса $\sqrt[3]{2}$ переплавлен в конус, площадь основания которого в 3 раза меньше боковой поверхности. Вычислите высоту конуса.

73. Осевое сечение конуса – равносторонний треугольник. Найдите отношение объема вписанного в конус шара к объему конуса.

Ответы: **1.** $60°$. **2.** 3 см. **3.** $36\sqrt{2}$. **4.** 4 дм. **5.** 8. **6.** $4\sqrt{3}$ см^3. **7.** $\frac{27\sqrt{5}}{50}$. **8.** $2\sqrt{2}$. **9.** $13(4-\sqrt{3})$. **10.** 24. **11.** 0,5. **12.** $\sqrt{30}$; 10. **13.** $\frac{9d^3}{64}$. **14.** $\frac{25\sqrt{6}}{3}$. **15.** 375. **16.** $0{,}125a^3$. **17.** $6+\sqrt{3}$. **18.** 12см^2. **19.** $\frac{12\sqrt{14}}{49}$. **20.** 1. **21.** $36+10\sqrt{2}$. **22.** 294. **23.** 30 см^2. **24.** $3\sqrt[4]{27}$. **25.** 1,2. **26.** $\frac{162}{13}$. **27.** 9. **28.** 12. **29.** 6. **30.** $128\sqrt{6}$. **31.** $\frac{a^3}{24}$; $\frac{a^2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{4}$. **32.** $\frac{1}{3}$. **33.** $\frac{3}{8}$. **34.** $2+2\sqrt{7}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **35.** 4,5. **36.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **37.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **38.** $\frac{\sqrt{47}}{24}$ см^3. **39.** $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. **40.** $126\sqrt{3}$. **41.** $\frac{148\sqrt{2}}{3}$. **42.** $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{3}}{12}$. **43.** 18 см. **44.** 486. **45.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$; 24. **46.** $9\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$см^2. **47.** $6\sqrt{10}$ см^3. **48.** $1{,}5h^2\sqrt{3}$. **49.** $\frac{72\sqrt{7}}{25}$. **50.** $\frac{1}{3}$; $2+\sqrt{2}$. **51.** $3a^2$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **52.** $\frac{6\sqrt{1833}}{47}$. **53.** 3. **54.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **55.** 225π. **56.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **57.** 1. **58.** $\frac{7V}{27}$. **59.** $\frac{8\pi}{3}$. **60.** 16. **61.** $\frac{5}{3}$ см. **62.** $2\sqrt[3]{2}$. **63.** 36. **64.** 36. **65.** $8\pi(\sqrt{2}-1)$. **66.** $\frac{4\pi}{3}$. **67.** $\pi 25\sqrt{5}$. **68.** $S_1:S_2=\pi:2$; $V_1:V_2=\pi\sqrt{3}:2$. **69.** $S_1:S_2=V_1:V_2=4:9$. **70.** 25π. **71.** $16:9$. **72.** 4. **73.** $\frac{4}{9}$.

Контрольный тест

№	Задания	Варианты ответов
1	Площадь боковой поверхности конуса равна $2\pi\sqrt{13}$. Если радиус конуса в полтора раза меньше его высоты, то площадь основания конуса равна	1) 4π; 2) 6π; 3) $4\pi\sqrt{3}$; 4) $2\pi\sqrt{3}$; 5) 12π.
2	Диагональ правильной четырехугольной призмы образует угол 30° с боковым ребром. Во сколько раз суммы площадей оснований призмы меньше площади ее боковой поверхности?	1) $2\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{6}$; 4) $\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{6}$.
3	Площадь боковой поверхности цилиндра равна 30. Если осевым сечением цилиндра является квадрат, то площадь полной поверхности цилиндра равна	1) 32; 2) 52; 3) 36; 4) 45; 5) 30.
4	Вершины прямоугольного треугольника с катетами 5 и 6 лежат на поверхности сферы. Если площадь сферы равна 125π, то расстояние от центра сферы до плоскости треугольника равно	1) π; 2) 31,24; 3) 4; 4) 9,3; 5) 23,5.
5	В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AB = 6$ и боковой стороной $BC = 5$ из центра O, вписанной в треугольник окружности, восстановлен перпендикуляр OK к плоскости треугольника ABC. Если расстояние от точки K до прямой AB равно 3,5, то длина отрезка OK равна	1) 10; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{19}$; 4) 5,5 5) 25.
6	В правильной треугольной пирамиде боковое ребро образует с высотой угол 60°. Если площадь боковой поверхности пирамиды равна $3\sqrt{7}$, то сторона ее основания равна	1) 4; 2) 2,9; 3) $2\sqrt{7}$; 4) 3; 5) $2\sqrt{3}$.

№	Задания	Варианты ответов
7	В треугольную пирамиду вписан конус, площадь основания которого равна π. Если площадь боковой поверхности пирамиды равна $7\sqrt{10}$, а объем пирамиды равен 7, то периметр ее основания равен	1) 14; 2) 7,7; 3) 21; 4) $7\sqrt{7}$; 5) $2\sqrt{10}$.
8	В конус вписана пирамида *SABCD*, основанием которой служит трапеция *ABCD*. Если угол *BAD* равен $45°$, основания трапеции $BC=6$, $AD=30$, а образующая конуса равна $\sqrt{810}$, то высота пирамиды равна	1) 12; 2) 24; 3) 26; 4) $6\sqrt{10}$; 5) $3{,}25\sqrt{10}$.
9	Если около правильной треугольной призмы, сторона основания которой вдвое меньше высоты, описать шар, то отношение объема шара к объему призмы будет равно	1) $\frac{64\pi}{27}$; 2) $2\pi\sqrt{3}$; 3) π; 4) 18π; 5) 32.
10	Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна $9\sqrt{3}$, а ее боковое ребро равно $3\sqrt{2}$. Если через сторону основания пирамиды перпендикулярно противолежащему боковому ребру провести плоскость, то площадь полученного сечения будет равна	1) 9,5; 2) 9; 3) 10; 4) 12,2; 5) $6\sqrt{10}$.
11	В прямой параллелепипед, объем которого равен 36, вписана сфера. Если половина одной из сторон основания параллелепипеда равна 2, то диаметр сферы равен	1) 6; 2) 10; 3) 4,5; 4) 4; 5) 3.
12	Основанием прямой призмы служит равнобедренная трапеция *ABCD* со сторонами $AB=CD=13$ см, $BC=11$ см и $AD=21$ см. Если объем призмы равен 1728 см^3, то площадь ее диагонального сечения равна	1) 72 см^2; 2) 180 см^2; 3) 222 см^2; 4) 150 см^2; 5) 70 см^2.

№	Задания	Варианты ответов
13	В основании четырехугольной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Ребро PB перпендикулярно плоскости основания и имеет длину $\sqrt[4]{2}$. Точка M – середина ребра PC. Если плоскость BMD образует с плоскостью основания пирамиды угол 45°, то площадь треугольника BMD равна	1) $2\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{12}$; 3) 2; 4) 12; 5) 1.
14	В конус вписан шар радиуса 1. Если образующая конуса видна из центра вписанного в конус шара под углом α, то радиус шара, описанного около конуса, равен	1) $\sin 4\alpha$; 2) $\frac{\sin 3\alpha}{3}$; 3) $-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin 4\alpha}$; 4) $2\cos\alpha$; 5) $5\cos\alpha$.

Ответы

Номер задания	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Номер правильного ответа	1	3	4	3	2	5	1
Номер задания	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Номер правильного ответа	2	1	2	5	2	5	3

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башмаков М. И.* Алгебра и начала анализа: учеб. для 10–11 кл. сред. шк. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1992.

2. *Вавилов В. В.* Задачи по математике. Уравнения и неравенства: справ. пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

3. *Веременюк В. В.* Практикум по математике: подготовка к тестированию и экзамену / В. В. Веременюк, В. В. Кожушко. – Мн.: ТетраСистемс, 2005.

4. *Выгодский М. Я.* Справочник по элементарной математике. – Изд. 27-е, испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

5. *Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И.* Курс алгебры для 8-го класса в задачах. – Львов, Журнал «Квантор», 1991.

6. *Гусак Г. М., Капуцкая Д. А.* Математика для подготовительных отделений вузов: справ. пособие. Под ред. А. А. Гусака. – Мн.: Выш. шк., 1989.

7. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: учеб. пособие для 10–11 кл. сред. шк. / Б. М. Ивлев, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1990.

8. *Метельский Н. В.* Математика. Курс средней школы для поступающих в вузы и техникумы. Изд. 2-е, стереотип. – Мн.: «Вышэйш. школа», 1973.

9. *Процко С. В.* Руководство к решению конкурсных задач по математике: справ. пособие. – Мн.: ТетраСистемс, 2000.

10. Сборник задач для поступающих в вузы. Под ред. Сканави М. И.: ОНИКС-XXI век, АЛЬЯНС-В, 2000.

11. *Цыпкин А. Г., Пинский А. И.* Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. / Под ред. В. И. Благодатских. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984.

СОДЕРЖАНИЕ