2014

Подготовка к ЕГЭ по математике

Теория для решения задач по стереометрии (B10 и B13)

Александр и Наталья Крутицких
www.matematikalegko.ru
01.01.2014

Для решения задач по стереометрии необходимо знать формулы площадей фигур и формулы объёмов тел. Сложных задач нет, все они решаются в 1-2 действия (редко в три действия). Важно увидеть путь решения и какую формулу необходимо применить.

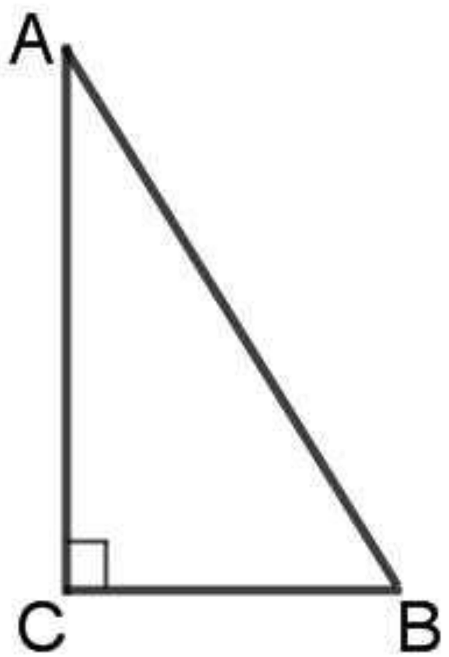
Необходимая теория:

- теорема Пифагора
- теорема косинусов
- определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса в прямоугольном треугольнике
- формулы площадей фигур
- формулы объёмов тел
- отношение площадей подобных фигур
- отношение объёмов подобных тел

Теорема Пифагора

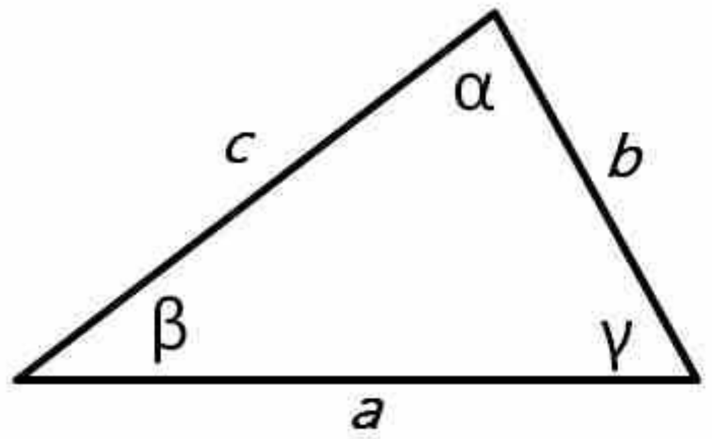
В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$



Теорема косинусов

<u>Теорема:</u> ***квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.***



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Другие стороны:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

*Зная две стороны треугольника и угол между ними мы всегда можем найти третью сторону.

Если нам будут известны все три стороны треугольника, то всегда можно найти любой угол:

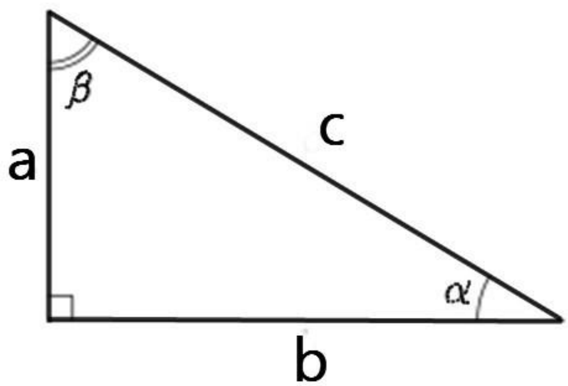
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

Понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса в прямоугольном треугольнике

Гипотенуза прямоугольного треугольника — это сторона, лежащая напротив прямого угла. **Катеты** — стороны, лежащие напротив острых углов.



Катет a, лежащий напротив угла α, называется **противолежащим** (по отношению к углу α). Другой катет b, который лежит на одной из сторон угла α, называется **прилежащим**.

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

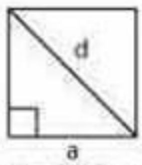
Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике — это отношение прилежащего катета к противолежащему (или, что то же самое, отношение косинуса к синусу):

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Таким образом, зная два-три элемента в прямоугольном треугольнике, мы всегда сможем найти все остальные его элементы (углы и стороны).

Формулы площадей и объёмов

ПЛОЩАДЬ

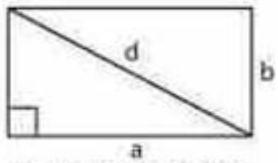


квадрат

$S = a^2$

$P = 4a$ $\quad$ P – сумма сторон фигуры

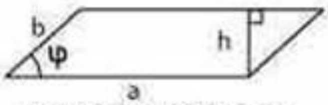
$d = a\sqrt{2}$ $\quad$ d – длина диагонали



прямоугольник

$S = a \cdot b$

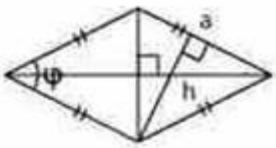
$d = \sqrt{a^2 + b^2}$



параллелограмм

$S = a \cdot h$

$S = a \cdot b \cdot \sin\varphi$ $\quad$ h – высота

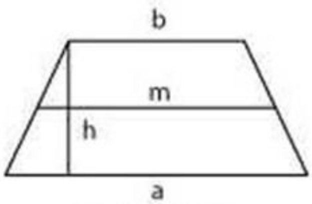


ромб

$S = a \cdot h$

$S = a^2 \cdot \sin\varphi$ $\quad$ h – высота

$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$ $\quad$ d_1 и d_2 – диагонали

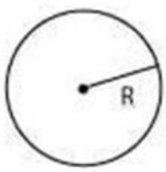


трапеция

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ $\quad$ a и b – основания

h – высота

$m = \frac{a+b}{2}$ – средняя линия

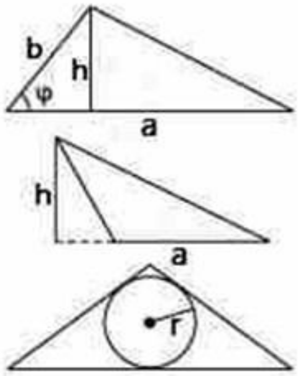


круг

$S = \pi R^2$

$L = 2\pi R = \pi D$ $\quad$ D – диаметр

L – длина окружности



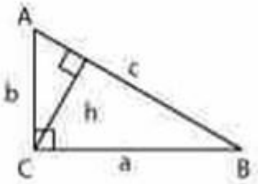
треугольник

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\varphi$$

$S = p \cdot r$ $\quad p$ – полупериметр

r – радиус вписаной окружности



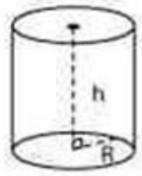
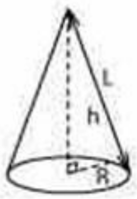
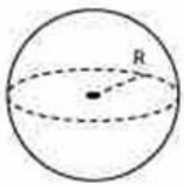
прямоугольный треугольник

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

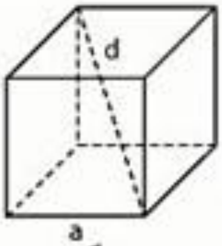
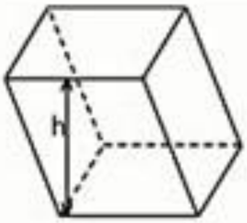
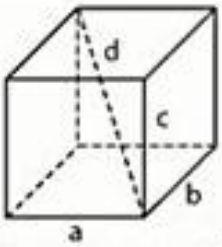
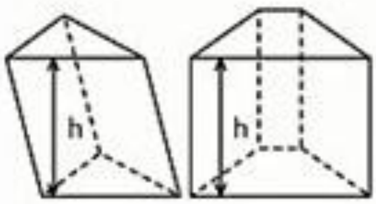
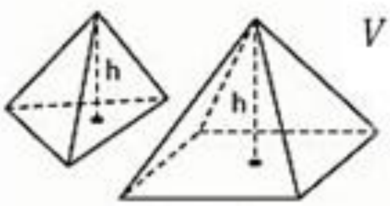
$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ОБЪЁМ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 цилиндр $V = \pi R^2 h$ R – радиус основания h – высота	$S = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} =$ $= 2\pi R^2 + 2\pi Rh$
 конус $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$	$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \pi R^2 + \pi RL$ L – образующая $L = \sqrt{R^2 + h^2}$
 шар $V = \frac{4}{3}\pi R^3$	$S = 4\pi R^2$

МНОГОГРАННИКИ

ОБЪЁМЫ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 куб $V = a^3$ a – ребро куба	$S = 6a^2$ $d = a\sqrt{3}$ длина диагонали
 параллелепипед $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн}$ – площадь основания h – высота
 прямоугольный параллелепипед $V = a \cdot b \cdot c$	$S = 2ab + 2ac + 2bc$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 призма $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн}$ – площадь основания h – высота
 пирамида $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок}$

Отношение площадей подобных фигур

Отношение площадей двух подобных фигур равно

квадрату коэффициента подобия.

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2 \quad <=> \quad S_2 = k^2 \cdot S_1$$

То есть, при изменении (увеличении или уменьшении) всех линейных размеров фигуры в k раз, отношение площади полученной к площади исходной фигуры будет равно k^2.

Отношение объёмов подобных тел

Отношение объёмов двух подобных тел равно

кубу коэффициента подобия.

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3 \quad <=> \quad V_2 = k^3 \cdot V_1$$

То есть, при изменении (увеличении или уменьшении) всех линейных размеров тела в k раз, отношение объёма полученного тела к объёму исходного будет равно k^3.