ЕГЭ 2013
Математика

C1
C2
C3
C4
C5
C6

А. И. Козко
В. С. Панферов
И. Н. Сергеев
В. Г. Чирский

Задача C5

Задачи с параметром

Под редакцией
А. Л. Семёнова и И. В. Ященко

ФГОС

Разработано МИОО

ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ

А. И. Козко В. С. Панферов
И. Н. Сергеев В. Г. Чирский

ЕГЭ 2013. Математика
Задача С5
Задачи с параметром

Издание третье, исправленное и дополненное

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Издание соответствует новому Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2013

УДК 373:51
ББК 22.1я72
К59

Козко А. И., Панферов В. С., Сергеев И. Н.,
К59 **Чирский В. Г.**
ЕГЭ 2013. Математика. Задача С5. Задачи с параметром / Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2013. — 180 с.

ISBN 978-5-4439-0489-4

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2013. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи С5.

Книга посвящена решению задач с параметрами. В ней рассмотрены и прокомментированы основные типы задач с параметрами и их решений.

Предложеные методы решений, применимы и к другим задачам ЕГЭ 2013 г. типа С: С1, С3, С6. Кроме того, в книге собраны необходимые справочные сведения, даны диагностические работы разного уровня, предложены задачи для самостоятельного решения, а также приведен список литературы для подготовки к экзамену.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по алгебре и началам анализа.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует новому Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Козко Артем Иванович
Панферов Валерий Семенович
Сергеев Игорь Николаевич
Чирский Владимир Григорьевич

ЕГЭ 2013. Математика. Задача С5. Задачи с параметром

Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко

Подписано в печать 30/VII 2012 года. Формат 60 × 90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 11. Тираж 10 000 экз. Заказ № 4800.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано в ОАО «Первая образцовая типография»,
филиал «Дом печати — ВЯТКА»
в полном соответствии с качеством предоставленных оригиналов.
610033, г. Киров, ул. Московская, 122. Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36.

ISBN 978-5-4439-0489-4

Предисловие

В практике конкурсных задач по элементарной математике присутствует особый раздел, который принято называть «задачи с параметром». Задачи этого раздела традиционно считаются трудными. В большей степени это объясняется привычкой школьников к задачам с простой формулировкой: «решить уравнение (неравенство или систему)». В основной же массе задач с параметром в первую очередь следует понять постановку задачи, что зачастую и определяет логику ее решения.

Именно таким задачам и посвящена настоящая книга, в которой рассмотрены основные типы задач с параметрами, а также различные методы их решений.

Читателю предлагаются несколько наборов диагностических задач. Каждый такой набор включает в себя различные типы задач. Начальная диагностическая работа содержит задачи, которые разбираются далее в каждом параграфе. Если задачи диагностической работы вызывают у вас затруднения, попробуйте порешать более простые подготовительные задачи, которые помещены перед диагностической работой. После каждого параграфа предложены задачи для самостоятельного решения (тренировочные). В конце книги приведена рекомендуемая литература.

Наши рекомендации по работе с этой книгой таковы:

- выполните диагностическую работу и сверьте ответы, полученные вами, с ответами в конце книги;
- каждая нерешенная задача и каждый неверный ответ является для вас сигналом к действию;
- внимательно прочитайте предложенные методические рекомендации и примеры решений всех задач диагностической работы, сравнив их с текстами ваших решений и обратив особое внимание на имеющиеся различия между ними;
- последовательно решайте диагностические работы 1—6, перемежая их с тренировочными и подготовительными задачами, прежде всего по тем темам, которые вызывают наибольшие затруднения.

Книга продолжает серию учебных пособий по математике под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко, посвященных подготовке к ЕГЭ по математике в 2013 г.

Надеемся, что навыки решения задач, предлагаемых в настоящей книге, помогут школьникам в будущем успешно сдавать самые разные экзамены по математике.

В подготовке настоящего издания большую помощь авторам оказали студенты механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова А. Трепалин, А. Годнева, О. Заплетина, А. Ильницкая, Е. Кукса, И. Нетай, которые вычитали рукопись, прорешали задачи и выверили ответы к ним.

А. И. Козко, В. С. Панферов,
И. Н. Сергеев, В. Г. Чирский.

Работа над изданием выполнена при поддержке Российского гуманитарного фонда, проект № 08-06000144а.

Введение

Первая часть варианта ЕГЭ 2013 г. представлена задачами типа В (с кратким ответом), а вторая его часть состоит из шести задач типа С (с развернутым ответом), среди которых задача С5 имеет высокий уровень сложности.

Основной целью этой, так сказать, «вузовской» части варианта (в отличие от первой его части, носящей характер «зачета» по курсу математики средней школы) является дифференциация выпускников в отношении их возможностей дальнейшего обучения в вузах с различными требованиями к математической подготовке учащихся. Задания всей части 2 в целом предназначены для проверки знаний на том уровне требований, который традиционен в вузах с профильным экзаменом по математике.

Итогом работы выпускника над каждой задачей типа С является представленные им на экзамене:

- ответ на поставленный в задании вопрос,
- текст решения задачи.

По большому счету, ответ к задаче также можно считать неотъемлемой частью ее решения (в широком смысле), что мы и подразумеваем в дальнейшем. Решение записывается в специальный бланк ответов № 2, выдаваемый выпускнику непосредственно на экзамене. За решение задачи С5 на экзамене можно получить оценку в 0, 1, 2, 3 или 4 балла. Не максимально возможное количество баллов за задачу ставится в том случае, если в ее решении присутствуют ошибки, неточности или недостатки обоснования. Подчеркнем, что на экзамене оценивание решения задачи должно производиться в строгом соответствии с заранее утвержденными критериями.

Далеко не праздным является вопрос о том, какие способы решения задачи и записи ее ответа допустимы на едином государственном экзамене. Главным требованием к решению была и остается его математическая правильность, а именно:

- в ответ необходимо включить только верные значения искомой величины, причем все;
- форма записи ответа может быть любой из употребляемых в современной учебной литературе;
- текст решения должен служить реальным обоснованием (точнее, доказательством) правильности полученного ответа;
- при решении задачи любого содержания приемлемы любые математические методы: алгебраические, функциональные, графические, геометрические, логические, комбинаторные и т. д.;

• рациональность решения, равно как и его нерациональность, на экзамене во внимание не принимается.

Новые критерии оценки основываются на следующих принципах.

• Проверяется только математическое содержание представленного решения; погрешности его оформления не являются поводом для снижения оценки.

• Ответ может быть записан в любом виде; оценивается не форма записи ответа, а его правильность.

• Степень подробности обоснований в решении должна быть разумно достаточной; претензии к решению, связанные с отсутствием ссылок на правомерно используемые стандартные факты и правила (как-то: формулы сокращенного умножения, формула корней квадратного уравнения, действия со степенями или логарифмами, свойства неравенств и многие-многие другие), не предъявляются.

• Решение задачи, в котором обоснованно получен правильный ответ, оценивается максимальным числом баллов.

• Наличие правильного ответа при полном отсутствии текста решения оценивается в ноль баллов.

• Некоторые погрешности решений, не оказавшие существенного влияния на его обоснованность и принципиальную правильность, могут расцениваться как описки и не приводить к снижению оценки.

• Если на каком-либо этапе решения допущена грубая ошибка, то другие его этапы, проведенные в работе правильно, могут быть, тем не менее, оценены положительно, в соответствии с критериями.

• При определении итоговой оценки решения выбирается максимально возможное число баллов, которое можно выставить за него в соответствии с утвержденными критериями.

• При проверке оригинальных или нестандартных решений на экзамене вырабатываются частные критерии их оценки, соответствующие (аналогичные) общим.

Подготовка к предлагаемой форме экзамена по математике состоит не в натаскивании выпускника на какие-то определенные типы задач, а в систематическом и обстоятельном изучении самого предмета как на уроках в школе, так и в процессе самостоятельной работы ученика.

При подготовке к пробному и основному экзамену ЕГЭ по математике рекомендуем учесть следующие три аспекта.

• Во-первых, единый государственный экзамен в целом опирается, конечно же, на школьную программу. Поэтому уверенное знание программы по математике и хорошее владение ею — необходимое условие успешной сдачи ЕГЭ. Эта программа в основном определена и подкреплена огромным количеством самых разнообразных учебников. Однако среди обилия учебников по математике советуем выбирать те, что отличаются большей глубиной проникновения в излагаемый материал и рассчитаны на более вдумчивого учащегося.

Эти качества учебников способны в перспективе оказать экзаменуемому существенную помощь.

• Во-вторых, чтобы подготовиться к какому-либо экзамену, вообще, нужно, для начала, изучить историю вопроса, а именно: узнать, какие задачи давались на экзамене в прошлые годы, какими методами предполагалось их решать, каковы были требования к их оформлению и т. п. Кроме того, следует сделать поправку на предполагаемые нововведения, для чего имеет смысл внимательно изучить демоверсию предстоящего экзамена, доступные пробные или тренировочные варианты, а также другие материалы, дающие более полное представление о будущих задачах.

• В-третьих, желательно иметь некоторый запас прочности, т. е. знать и уметь несколько больше того минимума, который вытекает из опыта предыдущих экзаменов. Ведь не секрет, что варианты экзаменационных заданий постепенно развиваются и усложняются: то, что раньше казалось новым и трудным для восприятия, со временем становится привычным и элементарным. В общем, нельзя ориентироваться только на вчерашний день. А учитывая, что ожидаемые в 2013 году задачи типа С будут в значительной мере опираться на опыт вступительных экзаменов, хорошо бы приобрести и проработать современные пособия для поступающих в вузы, содержащие грамотные подборки задач и возможных методов их решения.

Подготовительные задачи

1. Найдите все значения a, при каждом из которых общая часть двух отрезков $[-1; 1]$ и $[a; a+1]$ а) является отрезком, б) состоит из одной точки, в) пустая.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых общая часть полуинтервала $(0; 2]$ и интервала $(a-1, a)$ а) является интервалом, б) является полуинтервалом, в) является отрезком, г) пустая.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых общая часть двух множеств $|x| \geqslant 1$ и $[a-2; a+2]$ а) является отрезком, б) состоит из точек двух отрезков, в) состоит из отрезка и отдельной точки, г) пустая.

Для каждого значения a решите относительно x (**4—46**).

4. $ax = 1$.

5. $ax < 1$.

6. $ax \geqslant 1$.

7. $(a^2 - 9)x = a + 3$.

8. $\dfrac{x-a}{x-5} = 0$.

9. $\dfrac{x-a}{a+2} = 0$.

10. $\dfrac{x+1}{x^2-a^2} = 0$.

11. $\dfrac{a(x-a)}{x-4} = 0$.

12. $x^2 = a$.

13. $x^2 = -a$.

14. $x^2 > a$.

15. $x^2 \leqslant -a$.

16. $x^3 = a$.

17. $x^3 > a$.

18. $x^3 \leqslant -a$.

19. $|x| = a$.

20. $|a| = x$.

21. $|x-3| < a$.

22. $|x-3| > a$.

23. $\sqrt{x} = -a$.

24. $a\sqrt{x} = 0$.

25. $\sqrt{x} > a$.

26. $\sqrt{x} \leqslant -a$.

27. $x \geqslant \dfrac{a}{x}$.

28. $x < \dfrac{a}{x}$.

29. $2^x < a$.

30. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < a$.

31. $2^x \geqslant a$.

32. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geqslant a$.

33. $\log_a x < 1$.

34. $\log_x a < 1$.

35. $\sin x = a$.

36. $\cos^2 x = a$.

37. $\operatorname{tg} x = a$.

38. $|\sin x| = a$.

39. $\cos |x| = a$.

40. $\arccos x = a$.

41. $\arcsin x = a$.

42. $\sin x < a$.

43. $\sin x \geqslant a$.

44. $\cos x \leqslant a$.

45. $\cos x > a$.

46. $\sin x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$.

47. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - x + a = 0$$

не имеет действительных корней.

48. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$$

не имеет действительных корней.

49. Найдите все целые значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a-12)x^2 + 2(a-12)x + 2 = 0$$

не имеет действительных корней.

50. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

51. Для каждого значения a решите уравнение

$$ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0.$$

52. Найдите все значения a, при каждом из которых отношение корней уравнения

$$ax^2 - (a+3)x + 3 = 0$$

равно 1,5.

53. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов действительных корней уравнения

$$x^2 - ax + a - 2 = 0$$

минимальна.

54. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(2-x)(x+1)=a$$

имеет два различных неотрицательных решения.

55. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a-3)x^2-2ax+5a=0$$

имеет решение и все решения этого уравнения положительные.

56. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$$

имеет два корня, один из которых больше 3, а другой меньше 2.

Диагностическая работа

1. При каком наибольшем отрицательном значении a функция

$$y=\sin\left(24x+\frac{a\pi}{100}\right)$$

имеет максимум в точке $x_0=\pi$?

2. При каждом значении a решите неравенство

$$|x+a|>a.$$

3. Найдите все такие значения x, при которых неравенство

$$(4-2a)x^2+(13a-27)x+33-13a>0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1<a<3$.

4. При каждом значении a решите неравенство

$$ax^2+x+3a^3>0.$$

5. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(x^2-6|x|+a)^2+10(x^2-6|x|+a)+26=\cos\left(\frac{16\pi}{a}\right)$$

имеет ровно два корня.

6. При каждом значении a решите неравенство

$$ax^4+x^3+(2a+3a^3)x^2+2x+6a^3>0.$$

7. Определите все значения a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3+(a^2-9a)x^2+8ax-64=0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

8. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\cos x-2\sqrt{x^2+9}\leqslant-\frac{x^2+9}{a+\cos x}-a$$

имеет единственное решение.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y\geqslant x^2+2a,\\ x\geqslant y^2+2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

10. При каких значениях y уравнение

$$\frac{25}{\sqrt{x-1}}+\frac{4}{\sqrt{y-2}}=14-\sqrt{x-1}-\sqrt{y-2}$$

имеет решения?

11. При каких значениях a уравнение

$$3^{x^2+2ax+4a-3}-2=\left|\frac{a-2}{x+a}\right|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке $[-4; 0]$?

12. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

13. При каждом значении a решите неравенство

$$\sqrt{x+2a}>x+\sqrt{2a}.$$

14. При каждом значении a найдите все пары натуральн x, y, удовлетворяющие неравенству $xy \leqslant 3-a^2$.

15. При каких значениях a системы уравнений

$$\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ x^2+y^2=a\end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases}x+y=0,\\ x^2+y^2=a\end{cases}$$

равносильны?

§ 1
Простейшие уравнения и неравенства с параметром

Цель данного параграфа состоит в том, чтобы на простейших примерах познакомить читателя с задачами с параметрами. Для решения данных задач ничего кроме здравого смысла не требуется. Если сразу непонятно, как решать задачу, мы советуем вчитываться в нее, до тех пор пока не станет ясно условие.

В некоторых задачах для нахождения параметров достаточно просто подставлять в неравенство (уравнение или систему) точку: так решается следующий пример.

Пример 1.1. При каком наибольшем отрицательном значении a функция

$$y=\sin\left(24x+\frac{a\pi}{100}\right)$$

имеет максимум в точке $x_0=\pi$?

Решение. Максимумы функции $\sin t$ достигаются в точках вида $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Следовательно, чтобы у исходной функции достигался максимум в точке $x_0=\pi$, должно существовать такое число $n\in\mathbb{Z}$, что

$$24\pi+\frac{a\pi}{100}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \iff \frac{a}{100}=\frac{1}{2}+2m, m\in\mathbb{Z} \iff$$
$$\iff a=50+200m, m\in\mathbb{Z}.$$

Остается лишь выбрать среди чисел вида $a=50+200m$, $m\in\mathbb{Z}$, наибольшее отрицательное. Это будет число -150, получающееся при $m=-1$, так как если $m\geqslant 0$, то $50+200m\geqslant 50>0$.

Ответ: $a=-150$.

Пример 1.2. При каждом значении a решите неравенство

$$\frac{x-a}{x-a-1}\leqslant 0.$$

Решение. При любом фиксированном значении a это обычное рациональное неравенство. Поэтому к нему можно применить метод интервалов. Напомним, что для этого следует расположить на

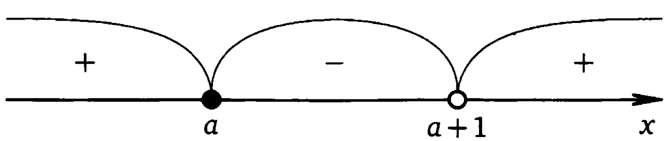

Рис. 1

числовой оси числа a и $a+1$, в которых обращаются в ноль, соответственно, числитель и знаменатель. Ясно, что при любом a число $a+1$ больше, чем a. Поэтому получаем такое расположение, как показано на рис. 1.

Ответ: $x \in [a; a+1)$ при любом a.

Пример 1.3. При каждом значении a решите неравенство

$$\frac{x-1}{x-a} > 0.$$

Решение. Как и выше, будем применять метод интервалов. Однако здесь возникает небольшая трудность — мы не знаем, как расположены числа 1 и a? Ведь a может быть как меньше 1, так и больше или равно 1. Но это означает, что нам следует рассмотреть эти три случая.

1) Пусть $a < 1$. Тогда получаем такое расположение точек, показанное на рис. 2.

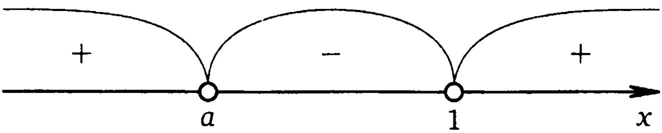

Рис. 2

Метод интервалов дает часть ответа: если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a) \cup \cup (1; +\infty)$.

2) Пусть $a = 1$. Тогда получаем неравенство $\frac{x-1}{x-1} > 0$, при $x \neq 1$ равносильное верному неравенству $1 > 0$. Его решение — вся область определения неравенства, т. е. $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

3) Пусть $a > 1$. Тогда точки расположены так, как показано на рис. 3.

Рис. 3

Метод интервалов приводит к частичному ответу: если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$.

Объединим части ответов.

Ответ: если $a<1$, то $x\in(-\infty;a)\cup(1;+\infty)$, если $a=1$, то $x\in\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$, если $a>1$, то $x\in(-\infty;1)\cup(a;+\infty)$.

Пример 1.4. При каждом значении a решите неравенство

$$\frac{x}{x+a}>1.$$

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\frac{x}{x+a}-1>0 \iff \frac{x-x-a}{x+a}>0 \iff \frac{-a}{x+a}>0 \iff \frac{a}{x+a}<0.$$

При $a>0$ это неравенство равносильно неравенству $x+a<0$, $x<-a$ и его решение $x\in(-\infty;-a)$

При $a=0$ получаем неравенство $\frac{0}{x}<0$, $0<0$, у которого нет решений.

При $a<0$ это неравенство равносильно такому: $x+a>0$, или $x>-a$, имеющему решения $x\in(-a;+\infty)$.

Ответ: если $a<0$, то $x\in(-a;+\infty)$, если $a=0$, то $x\in\varnothing$, если $a>0$, то $x\in(-\infty;-a)$.

Пример 1.5. При каждом значении a решите неравенство

$$\frac{a}{x+a}>1.$$

Решение. Преобразуем это неравенство:

$$\frac{a}{x+a}-1>0 \iff \frac{a-x-a}{x+a}>0 \iff \frac{-x}{x+a}>0 \iff \frac{x}{x+a}<0.$$

Решение вполне аналогично решению примера 1.3. А именно, расположим на оси точки $-a$ и 0. Возможны 3 случая: $a>0$, тогда $-a<0$ и точки располагаются как показано на рис. 4.

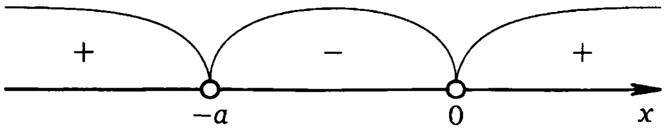

Рис. 4

Получаем решение $x\in(-a;0)$.

Во втором случае $a=0$, тогда мы получаем $\frac{x}{x}<0$, или $1<0$ при $x\neq0$. Это неравенство не имеет решений. Наконец, при $a<0$ число $-a>0$ и точки располагаются, как показано на рис. 5, т. е. $x\in(0;-a)$.

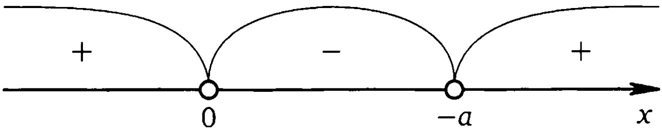

Рис. 5

Объединяя части ответа, получаем окончательный результат.

Ответ: если $a<0$, то $x\in(0;-a)$, если $a=0$, то $x\in\varnothing$, если $a>0$, то $x\in(-a;0)$.

Пример 1.6. При каждом значении a решить неравенство

$$\frac{(x-1)(x-a)}{\left(x-\frac{a+1}{2}\right)}>0.$$

Решение. Заметим, что при любом фиксированном значении a это обычное рациональное неравенство, для решения которого применим метод интервалов. Однако нам неизвестно, как располагаются точки 1, a, $\frac{a+1}{2}$ на числовой оси. Рассмотрим различные возможные случаи. Для этого попарно сравним числа 1 и a, 1 и $\frac{a+1}{2}$, a и $\frac{a+1}{2}$. Находим

$$\begin{array}{ccc} a\vee 1, & \frac{a+1}{2}\vee 1, & a\vee\frac{a+1}{2}, \\ a\vee 1, & a+1\vee 2, & 2a\vee a+1, \\ a\vee 1, & a\vee 1, & a\vee 1. \end{array}$$

Таким образом, при $a<1$ выполнено неравенство

$$a<\frac{a+1}{2}<1,$$

при $a=1$ получаем, что все числа a и $\frac{a+1}{2}$ равны 1. При $a>1$ выполнено неравенство

$$1<\frac{a+1}{2}<a.$$

Рассмотрим эти три случая.

I. Пусть $a<1$. Тогда $1>\frac{a+1}{2}>a$. Применим метод интервалов (рис. 6). Получаем частичный ответ: если $a<1$, то $x\in\left(a;\frac{a+1}{2}\right)\cup\cup(1;+\infty)$.

II. Пусть $a=1$. Тогда $a=\frac{a+1}{2}=1$. Применим метод интервалов (рис. 7). Получаем частичный ответ: если $a=1$, то $x\in(1;+\infty)$.

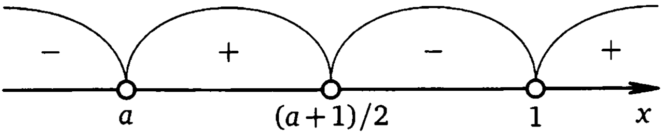

Рис. 6

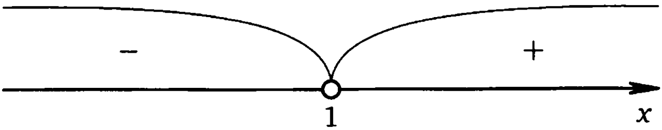

Рис. 7

III. Пусть $a > 1$. Тогда $a > \frac{a+1}{2} > 1$. Применим метод интервалов (рис. 8). Получаем частичный ответ: если $a < 1$, то $x \in \left(1; \frac{a+1}{2}\right) \cup$ $\cup\, (a; +\infty)$.

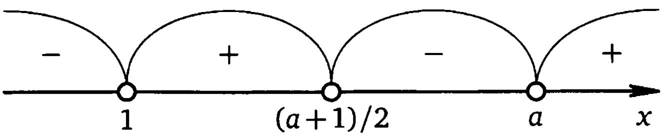

Рис. 8

Ответ: если $a < 1$, то $x \in \left(a; \frac{a+1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$, если $a = 1$, то $x \in$ $\in (1; +\infty)$, если $a > 1$, то $x \in \left(1; \frac{a+1}{2}\right) \cup (a; +\infty)$.

Пример 1.7. Для каждого значения a решите неравенство

$$(a+4)\sqrt{5-x} > a+3.$$

Решение. Область определения задается неравенством $5 - x \geqslant 0$. Следующий шаг — преобразование неравенства к удобному виду. Рассмотрим отдельно случаи $a+4<0$, $a+4>0$ и $a+4=0$.

I. Пусть сначала $a+4=0$, тогда

$$0 \cdot \sqrt{5-x} > -1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > -1.$$

Последнее неравенство справедливо во всей ОДЗ. Получаем частичный ответ: если $a = -4$, то $x \leqslant 5$.

II. Пусть $a+4<0$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{5-x} < \frac{a+3}{a+4}.$$

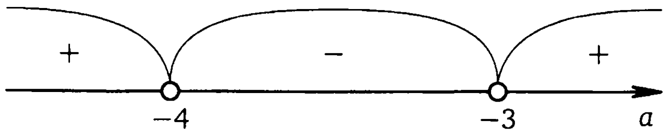

Рис. 9

Поскольку $\frac{a+3}{a+4}>0$ при $a<-4$ (рис. 9), то

$$\sqrt{5-x}<\frac{a+3}{a+4} \quad\Leftrightarrow\quad 5-x<\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2<x.$$

С учетом ОДЗ получаем частичный ответ: если $a<-4$, то $x\in$ $\in\left(5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2; 5\right]$.

III. Пусть $a+4>0$, тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{5-x}>\frac{a+3}{a+4}.$$

Выражение $\frac{a+3}{a+4}$ (рис. 9) отрицательно при $a\in(-4;-3)$, равно нулю при $a=-3$ и положительно при $a>-3$. Рассмотрим несколько случаев:

IIIa. Пусть $a\geqslant-3$. Тогда (рис. 9) $\frac{a+3}{a+4}\geqslant 0$ и, следовательно, исходное неравенство равносильно

$$\sqrt{5-x}>\frac{a+3}{a+4} \quad\Leftrightarrow\quad 5-x>\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad 5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2>x.$$

Все полученные значения входят в ОДЗ. Следовательно получаем частичный ответ: если $a\geqslant-3$, то $x<5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2$.

IIIb. Пусть $a\in(-4;-3)$. Тогда (рис. 9) $\frac{a+3}{a+4}<0$ и, следовательно, неравенство $\sqrt{5-x}>\frac{a+3}{a+4}$ выполнено на всей области допустимых значений. Получаем частичный ответ: если $a\in(-4;-3)$, то $x\leqslant 5$.

Остается собрать все полученые результаты в ответ.

Ответ: если $a<-4$, то $x\in\left(5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2; 5\right]$; если $a\in[-4;-3)$, то $x\leqslant 5$; если $a\geqslant-3$, то $x<5-\left(\frac{a+3}{a+4}\right)^2$.

Тренировочные задачи к § 1

1. Найдите все значения a, при которых множество решений неравенства

$$\frac{a}{x-a} > 0,$$

содержит точку $x = 1$.

2. При каком наименьшем положительном значении b функция

$$y = \sin\left(20x + \frac{b\pi}{150}\right)$$

имеет минимум в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$?

3. При каких значениях b уравнение

$$b^4x + b^2 + (2+\sqrt{2})b + 2\sqrt{2} = b^2(b+\sqrt{2}) + 4x$$

имеет бесконечно много корней?

4. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\log_a(x^2+2) > 1$$

выполняется для всех значений x.

5. Известно, что $x = 1$, $y = -1$ — одно из решений системы

$$\begin{cases} 2ax + by = \sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{1111\pi}{6}\right), \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$$

Найдите все решения данной системы.

6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

7. Для каждого значения c решите уравнение

$$4^x + c \cdot 25^x = 3 \cdot 10^x.$$

8. Для каждого значения $b \leqslant 0$ решите неравенство (относительно x)

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \geqslant b.$$

9. Для любого допустимого значения a решите неравенство

$$\log_{2a}(\log_3 x^2) > 1$$

и найдите, при каком значении a множество точек x, не являющихся решением неравенства, представляет собой промежуток, длина которого равна 6?

10. Для каждого значения c решите неравенство

$$\sqrt{c^2 - x^2} \geqslant 2 - c.$$

11. Для каждого значения a решите неравенство

$$a - 2 < (a-1)\sqrt{x+1}.$$

12. Для каких значений p отношение суммы коэффициентов многочлена $(px^2 - 7)^{18}$ к его свободному члену минимально?

13. Для каждого допустимого значения b решите неравенство

$$\sqrt{7 + \log_b x^2} + (\log_b |x|)(1 + 2\log_x b) > 0.$$

14. Для каждого значения a решите уравнение

$$\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|} = a.$$

15. Для каждого значения a решите неравенство

$$\log_{1/9}(x^2 - 6x - a^2 - 5a + 12) < -1$$

и найдите, при каких значениях a множество чисел, не являющихся решениями этого неравенства, представляет собой отрезок числовой оси, длина которого меньше $2\sqrt{3}$.

16. При каждом значении a решите уравнение

$$2^{(ax+3)/(x^2+3)} + 2^{(4x^2-ax+9)/(x^2+3)} = 10.$$

17. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-6,5}(x^2+1) = \log_{a-6,5}((a-5)x)$$

имеет два различных решения.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x^3-1)(x^2-16)}{\lg(15a-x) - \lg(x-a)} = 0$$

имеет единственное решение.

19. При каких значениях p уравнение

$$4(x-\sqrt{p\cdot 7^p})x+p+7(7^p-1)=0$$

имеет корни и каковы знаки корней при различных значениях p?

20. При каких значениях b уравнение

$$25^x-(2b+5)5^{x-1/x}+10b\cdot 5^{-2/x}=0$$

имеет ровно два решения?

21. Найдите все значения a, при которых множество решений неравенства

$$x(x-2)\leqslant(a+1)(|x-1|-1)$$

содержит все члены некоторой бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 1,7, и положительным знаменателем.

22. Найдите все значения a, при которых неравенство $x^2+a\leqslant 0$ имеет решение и все его решения удовлетворяют неравенству $(x+2a)\sqrt{3-x}\leqslant 0$.

23. Найдите все значения p, при каждом из которых множество решений неравенства

$$(p-x^2)(p+x-2)<0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2\leqslant 1$.

24. Пусть

$$f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}-3,\quad g(x)=\sqrt{x}-a.$$

При каждом a решите неравенство $f(g(x))\leqslant 0$.

25. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x+a(y+1)=2a,\\ x^3+a(2y^3+1)=ay^3+2a \end{cases}$$

разрешима и имеет не более двух решений.

26. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+1}x+\log_x(19-8a)=2$$

имеет по крайней мере два корня и при этом произведение всех его корней не менее 0,01.

27. Найдите все пары a и b, при которых найдутся два различных корня уравнения

$$x^3 - 5x^2 + 7x = a,$$

которые будут также корнями уравнения

$$x^3 - 8x + b = 0.$$

28. Из трех значений a: $-1{,}2$; $-0{,}67$; $-0{,}66$ найдите все те значения, при каждом из которых уравнение

$$\left(2^{a+4} + 15(x+a)\right)\left(1 + 2\cos\left(\pi\left(a + \frac{x}{2}\right)\right)\right) = 0$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0 \leqslant x \leqslant 1$.

29. Найдите все a, при каждом из которых уравнения

$$(2a-1)x^2 + 6ax + 1 = 0 \quad \text{и} \quad ax^2 - x + 1 = 0$$

имеют общий корень.

30. Считая известным, что при любом $a > 0$ уравнение

$$2x^3 + x^2 - x - a - 1 = 0$$

имеет единственный положительный корень x_0 (зависящий от a), найдите все $a > 0$ при которых выполнено неравенство

$$12x_0^3 - 7x_0 > 6a + 1.$$

§ 2
Простейшие задачи с модулем

Напомним неравенства

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|, \quad |x|-|y| \leqslant |x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Следует отметить, что в первом из них равенство достигается тогда и только тогда, когда оба числа имеют одинаковый знак, а во втором — когда оба числа имеют одинаковый знак и $|x| \geqslant |y|$.

Пример 2.1. При каждом a решите неравенство

$$|x+a| > a.$$

Решение. Вновь отметим, что при каждом конкретном значении a получается вполне стандартная задача, поэтому можно применить метод интервалов для модулей.

Отметим сначала, что при $a<0$ это неравенство верное (так как модуль числа — неотрицательная величина) при любом x. Поэтому получаем часть ответа: если $a<0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

Если $a=0$, то $|x|>0$ и $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Если $a>0$, то следует рассмотреть два случая: $x<-a$ и $x \geqslant -a$. В первом из них исходное неравенство равносильно неравенству

$$-x-a>a \quad \Leftrightarrow \quad -x>2a \quad \Leftrightarrow \quad x<-2a.$$

Так как $a>0$, число $-2a$ меньше, чем $-a$. Поэтому $x \in (-\infty; -2a) \subset$ $\subset (-\infty; -a)$ и пересечение этих областей совпадает с $(-\infty; -2a)$.

Во втором случае, т.е. при $x+a \geqslant 0$, получаем $x+a>a$, $x>0$, $x \in (0; +\infty)$. Так как $-a<0$, множество $[-a; +\infty)$ содержит множество $(0; +\infty)$, а их пересечение равно $(0; +\infty)$. Поэтому при $a>0$ решением неравенства будет $(-\infty; -2a) \cup (0; +\infty)$.

Объединим части ответа: если $a<0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$, если $a=0$, то $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, если $a>0$, то $x \in (-\infty; -2a) \cup (0; +\infty)$.

Заметим, что при $a=0$ число $-2a=0$, поэтому последние две части ответа можно объединить так: если $a \geqslant 0$, то $x \in (-\infty; -2a) \cup$ $\cup (0; +\infty)$.

Ответ: если $a<0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$, если $a \geqslant 0$, то $x \in (-\infty; -2a) \cup$ $\cup (0; +\infty)$.

Пример 2.2. При каждом a решите неравенство

$$|x+a| < x.$$

Решение. Как и в предыдущей задаче, рассмотрим два случая.

1) Пусть $x+a<0$. Тогда получаем

$$-x-a<x \quad \Leftrightarrow \quad 2x>-a \quad \Leftrightarrow \quad x>-\frac{a}{2}.$$

Рассматриваемая область задана условием $x<-a$. Часть ответа получается как решение системы неравенств

$$\begin{cases} x>-\frac{a}{2}, \\ x<-a. \end{cases}$$

Если $a>0$, то число $-a$ меньше, чем $-\frac{a}{2}$, и эта система не имеет решений.

Если $a=0$, то получаем систему

$$\begin{cases} x>0, \\ x<0, \end{cases}$$

очевидно, не имеющую решений.

Если $a<0$, то $-a>-\frac{a}{2}$ и получаем $x \in \left(-\frac{a}{2}; -a\right)$.

Итак, часть ответа в первом случае: если $a<0$, то $x \in \left(-\frac{a}{2}; -a\right)$, если $a \geqslant 0$, то $x \in \varnothing$.

2) Пусть $x+a \geqslant 0$. Тогда получаем неравенство $x+a<x$, $a<0$ которое верно при $a<0$ в рассматриваемой области, т. е. при $x \geqslant -a$ или $x \in [-a; +\infty)$. При $a \geqslant 0$ это неверное неравенство, не имеющее решений.

Часть ответа: если $a<0$, то $x \in [-a; +\infty)$, если $a \geqslant 0$, то $x \in \varnothing$.

Объединяя части ответа, получаем: если $a<0$, то $x \in \left(-\frac{a}{2}; -a\right) \cup$ $\cup [-a; +\infty) = \left(-\frac{a}{2}; +\infty\right)$, если $a \geqslant 0$, то $x \in \varnothing$.

Ответ: если $a<0$, то $x \in (-\frac{a}{2}; +\infty)$, если $a \geqslant 0$, то $x \in \varnothing$.

Пример 2.3. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$5|x-3a|+|x-a^2|+4x=a$$

1) имеет бесконечное множество решений, 2) не имеет решений.

Решение. Исходное уравнение можно заменить совокупностью следующих систем:

$$1)\ \begin{cases} 5(x-3a)+(x-a^2)+4x=a, \\ x\geqslant 3a, \\ x\geqslant a^2; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 5(3a-x)+(x-a^2)+4x=a, \\ x\leqslant 3a, \\ x\geqslant a^2; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} 5(x-3a)+(a^2-x)+4x=a, \\ x\geqslant 3a, \\ x\leqslant a^2; \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} 5(3a-x)+(a^2-x)+4x=a, \\ x\leqslant 3a, \\ x\leqslant a^2. \end{cases}$$

Преобразуем систему 1):

$$\begin{cases} x=\frac{1}{10}\cdot(a^2+16a), \\ \frac{1}{10}\cdot(a^2+16a)\geqslant 3a, \\ \frac{1}{10}\cdot(a^2+16a)\geqslant a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{10}\cdot(a^2+16a), \\ a(a-14)\geqslant 0, \\ a(-9a+16)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{10}\cdot(a^2+16a), \\ a\in(-\infty;0]\cup[14;+\infty), \\ a\in\left[0;\frac{16}{9}\right]. \end{cases}$$

Данная система совместна только при $a=0$. При этом также $x=0$. Система 2) равносильна системе

$$\begin{cases} 14a-a^2=0, \\ x\leqslant 3a, \\ x\geqslant a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0, \quad a=14, \\ x\leqslant 3a, \\ x\geqslant a^2. \end{cases}$$

и она разрешима тоже лишь при $a=0$. Ее единственное решение $x=0$. Система 3) сводится к системе

$$\begin{cases} x=\frac{1}{8}\cdot(16a-a^2), \\ \frac{1}{8}\cdot(16a-a^2)\geqslant 3a, \\ \frac{1}{8}\cdot(16a-a^2)\leqslant a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{8}\cdot(16a-a^2), \\ a(a+8)\leqslant 0, \\ a(9a-16)\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{8}\cdot(16a-a^2), \\ a\in[-8;0], \\ a\in(-\infty;0]\cup\left[\frac{16}{9};+\infty\right). \end{cases}$$

Два последних ее неравенства имеют общее множество решений $-8\leqslant a\leqslant 0$. Для каждого a из этого отрезка первое уравнение дает единственное значение x. Наконец, система 4) принимает вид

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cdot(a^2+14a), \\ \frac{1}{2}\cdot(a^2+14a)\leqslant 3a, \\ \frac{1}{2}\cdot(a^2+14a)\leqslant a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}\cdot(a^2+14a), \\ a(a+8)\leqslant 0, \\ a(-a+14)\leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}\cdot(a^2+14a), \\ a\in[-8;0], \\ a\in(-\infty;0]\cup[14;+\infty). \end{cases}$$

Два последних неравенства также имеют общее множество решений $-8\leqslant a\leqslant 0$. При каждом значении a из первого уравнения находим единственное значение x.

Подведем итоги. При $a<-8$ и при $a>0$ ни одна из систем 1)—4) не имеет решений и исходное уравнение тоже не имеет решений. При $-8\leqslant a\leqslant 0$ имеют решение системы 3) и 4), а при $a=0$ имеют решения все системы 1)—4).Но множество решений каждой из систем при фиксированном $a\in[-8,0]$ конечное? поэтому исходное уравнение не может иметь бесконечного множества решений ни при каком значении a.

Ответ: уравнение 1) не имеет бесконечного множества решений ни при каком значении a, 2) не имеет решений при $a\in(-\infty;-8)\cup$ $\cup(0;+\infty)$.

Тренировочные задачи к § 2

1. Для каждого a решите уравнение
$$x|x+1|+a=0.$$

2. Для каждого a решите неравенство
$$|x+2a|\leqslant\frac{1}{x}.$$

3. При каких значениях уравнение
$$2|x-a|+a-4+x=0$$
имеет решение и все решения удовлетворяют неравенству $0\leqslant x\leqslant 4$?

4. При каждом a решите уравнение
$$|x+2|+a|x-4|=6.$$

5. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$$
имеет ровно одно решение.

6. Найдите все значения a, при которых неравенство
$$x^2+4x+6a|x+2|+9a^2\leqslant 0$$
имеет не более одного решения.

7. Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение
$$2x-|x-k^2|=11k-3\cdot|x+4k|$$
1) не имеет решений, 2) имеет конечное непустое множество решений.

8. Определите, при каких значениях a уравнение
$$x-\frac{a}{2}=4\left|4|x|-a^2\right|$$
имеет ровно три корня. Найдите эти корни.

9. При каких значениях a уравнение
$$2|x-9a|-2a^2+35+x=0$$
не имеет решений? При каких значениях a уравнение имеет хотя бы одно решение и все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-30;63]$?

10. Найдите все пары $(a; b)$, при каждой из которых уравнение

$$|x-\sin^2 a|+|x+\cos^2 4a-2\sin a\cdot\cos^4 4a|=b\left(a+\frac{3}{2}\pi\right)$$

имеет единственное решение.

11. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x+a-4|+\left(\frac{a^2-4a+3}{|a-2|}-|a-2|\right)\cdot|x-2|+\frac{1}{2}|a-2|\cdot|x-a|\leqslant 1$$

выполняется ровно для двух различных значений x.

§ 3
Параметр как переменная

В следующих задачах удобнее рассматривать параметр в качестве переменной.

Пример 3.1. Найдите все такие x, при которых неравенство

$$(4-2a)x^2+(13a-27)x+(33-13a)>0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию $1<a<3$.

Решение. Преобразуем неравенство следующим образом:

$$-2ax^2+13ax-13a+4x^2-27x+33>0 \iff$$
$$\iff (-2x^2+13x-13)\cdot a+4x^2-27x+33>0.$$

Это неравенство будем рассматривать как линейное относительно a с коэффициентами, зависящими от x. Представим его в виде $f(a)=k(x)\cdot a+b(x)>0$, где $k(x)=-2x^2+13x-13$, $b(x)=4x^2-27x+33$. В зависимости от знака коэффициента $k(x)$ при a левая часть неравенства является возрастающей (коэффициент $k(x)$ больше 0) или убывающей (коэффициент $k(x)$ меньше 0) функцией от a. Если коэффициент $k(x)$ равен 0, то это не зависящая от a функция. Дадим два возможных способа продолжения решения этой задачи.

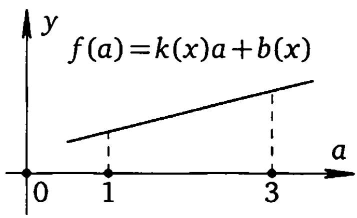

Рис. 10. Случай $k(x)>0$

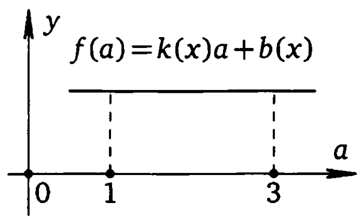

Рис. 11. Случай $k(x)=0$

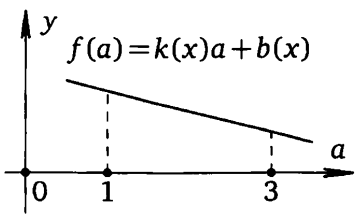

Рис. 12. Случай $k(x)<0$

I. Пусть $k(x) > 0$. Тогда, как отмечено выше, линейная функция возрастает. Поэтому условие положительности этой функции при $a \in (1; 3)$ равносильно тому, что ее значение в точке $a = 1$ неотрицательно. Запишем рассматриваемые условия в виде системы:

$$\begin{cases} k(x) > 0, \\ f(1) \geqslant 0. \end{cases}$$

Если $k(x) = 0$, то неравенство будет верным для каждого a при условии, что $b(x) > 0$, т. е.

$$\begin{cases} k(x) = 0, \\ f(0) > 0. \end{cases}$$

Наконец, если $k(x) < 0$, то функция $k(x) \cdot a + b(x)$ убывает, поэтому условие ее положительности при $a \in (1; 3)$ равносильно тому, что

$$\begin{cases} k(x) < 0, \\ f(3) \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая данные системы, мы приходим к ответу (советуем читателю проделать их самостоятельно). А мы приведем решение вторым способом.

II. Поскольку функция $f(a) = k(x) \cdot a + b(x)$ линейная, условие ее положительности на $(1; 3)$ равносильно тому, что

$$\begin{cases} f(1) \geqslant 0, \\ f(3) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2x^2 + 13x - 13) \cdot 1 + 4x^2 - 27x + 33 \geqslant 0, \\ (-2x^2 + 13x - 13) \cdot 3 + 4x^2 - 27x + 33 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 14x + 20 \geqslant 0, \\ -2x^2 + 12x - 6 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 10 \geqslant 0, \\ x^2 - 6x + 3 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-5) \geqslant 0, \\ (x - 3 + \sqrt{6})(x - 3 - \sqrt{6}) \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [5; +\infty), \\ x \in [3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6}]. \end{cases}$$

Отметим, что в первой из записанных выше систем следовало бы добавить ограничение типа $|f(1)| + |f(3)| > 0$, которое (как показал дальнейший анализ системы) выполнено автоматически.

Ответ: $[3 - \sqrt{6}; 2] \cup [5; 3 + \sqrt{6}]$.

Пример 3.2. Найдите все значения p, при каждом из которых множество решений неравенства $(p - x^2)(p + x - 2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 1$.

Решение. Ниже (см. пример 13.3) мы дадим и другое решение этого примера, использующее метод областей. Рекомендуем вам разобрать оба эти решения!

Условия задачи можно переформулировать так: *найдите все значения p, при каждом из которых все решения неравенства*

$$(p-x^2)(p+x-2)<0, \tag{3.1}$$

удовлетворяют неравенству $x^2>1$. Решим неравенство (3.1). Для этого надо попытаться разложить $p-x^2$ на линейные множители. Это не удается сделать, если $p<0$. Но при этом $p-x^2<0$ для всех x. Поэтому неравенство окажется равносильным неравенству $p+x-2>0$ или $x>2-p$. Так как в рассматриваемом случае $p<0$, число $2-p>2$ и $x^2>4>1$. Следовательно, все $p<0$ дают часть ответа задачи.

Пусть $p=0$. Тогда $-x^2(x-2)<0 \iff x^2(x-2)>0$. Решая методом интервалов, находим, что $x>2$. Следовательно, $p=0$ также дает часть ответа задачи.

Если $p>0$, то $p-x^2=-(x-\sqrt{p})(x+\sqrt{p})$ и неравенство примет вид

$$(x-\sqrt{p})(x+\sqrt{p})(x-2+p)>0. \tag{3.2}$$

Для применения метода интервалов следует расставить на оси числа $-\sqrt{p}$, $\sqrt{p}$, $2-p$ в порядке возрастания. Очевидно, $\sqrt{p}>-\sqrt{p}$. Поэтому достаточно сравнить числа $-\sqrt{p}$, $2-p$ и $\sqrt{p}$, $2-p$.

$$\begin{array}{ll}
-\sqrt{p}\vee 2-p, & \sqrt{p}\vee 2-p,\\
p-\sqrt{p}-2\vee 0, & p+\sqrt{p}-2\vee 0,\\
(\sqrt{p}+1)(\sqrt{p}-2)\vee 0, & (\sqrt{p}-1)(\sqrt{p}+2)\vee 0,\\
\sqrt{p}-2\vee 0, & \sqrt{p}-1\vee 0,\\
\sqrt{p}\vee 2, & \sqrt{p}\vee 1,\\
p\vee 4, & p\vee 1.
\end{array}$$

Таким образом, следует рассмотреть случаи $0<p<1$, $p=1$, $1<p<4$, $p=4$ и $p>4$.

Пусть $0<p<1$. Тогда $-\sqrt{p}<\sqrt{p}<2-p$. Методом интервалов из неравенства (3.2) получаем расположение точек, показанное на рис. 13. Следовательно, множество $0<p<1$ не удовлетворяет условию задачи, так как $x=0$ — решение исходного неравенства. Аналогично разбирается случай $p=1$ ($x=0$ опять будет решением).

Пусть $1<p<4$. Тогда $-\sqrt{p}<p-2<\sqrt{p}$. Методом интервалов из неравенства (3.2) получаем расположение точек, показанное на

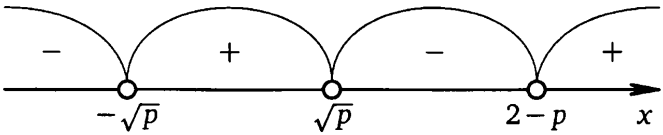

Рис. 13. Случай $0 < p < 1$

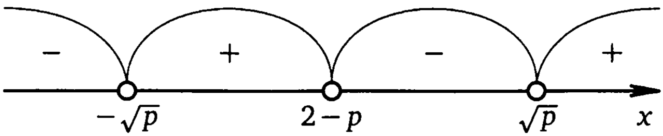

Рис. 14. Случай $1 < p < 4$

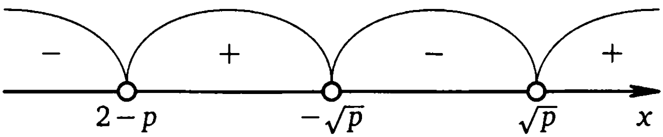

Рис. 15. Случай $p > 4$

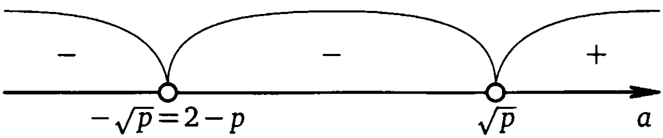

Рис. 16. Случай $p = 4$

рис. 14, т. е. $x \in (-\sqrt{p}; 2-p) \cup (\sqrt{p}; +\infty)$. Данные значения x удовлетворяют неравенству $x^2 > 1$ в случае, если

$$\begin{cases} \sqrt{p} \geqslant 1, \\ 2-p \leqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \geqslant 1, \\ p \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow p \geqslant 3.$$

Следовательно, множество $p \in [3; 4)$ удовлетворяет условию задачи.

Осталось рассмотреть последний случай $p \geqslant 4$ (рис. 15, 16).

Поскольку для $p \geqslant 4$ выполнено $\sqrt{p} > 1$ и $-\sqrt{p} < 1$, множество $p \geqslant 4$ также удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $p \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

Тренировочные задачи к § 3

1. Найдите все x, при которых неравенство

$$(2c-6)x^2+(32-10c)x-(8+c)<0$$

выполняется для всех c, удовлетворяющих условию $2<c<4$.

2. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x-3a-1}{x+2a-2}\leqslant 0$$

выполняется для всех x из промежутка $2\leqslant x\leqslant 3$.

3. При каких положительных значениях a неравенство

$$\frac{a+2x}{ax-4}\geqslant\frac{5}{x}$$

справедливо для всех $x>10$?

4. Для каждого значения a найдите число решений уравнения

$$\frac{2}{16^x}-\frac{1}{8^x}-\frac{a+8}{4^x}+\frac{4-2a}{2^x}-a^2+4a+5=0.$$

5. Найдите все значения q, при каждом из которых множество решений неравенства

$$(q-x^2)(q+2x-8)<0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2\leqslant 4$.

6. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$|x^2+4x-a|>6$$

не имеет решений на отрезке $[-3;0]$

7. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$x+\frac{7a^2+a-2}{x+a+1}<7a-1$$

не имеет положительных решений.

8. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+(5+4a-a^2)<0$$

хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$.

§ 4
Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного уравнения

Для квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0, \tag{4.1}$$

выделяем три случая.

1. Если $D=b^2-4ac<0$, то действительных решений у квадратного уравнения (4.1) нет.

2. Если $D=b^2-4ac=0$, то решение квадратного уравнения (4.1) принимает вид $x=-\frac{b}{2a}$.

3. Если $D=b^2-4ac>0$, то квадратное уравнение (4.1) имеет два корня x_+, x_-:

$$x_\pm=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Кроме того, выполнено равенство $ax^2+bx+c=a(x-x_+)(x-x_-)$.

I. Важную роль при решении задач с параметром для квадратных уравнений играет *теорема Виета*. Для квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, имеющего корни $x_\pm$ (случай $D\geqslant 0$), выполняются формулы Виета:

$$x_+ + x_- = -\frac{b}{a}; \quad x_+x_- = \frac{c}{a}.$$

II. Второе важное замечание состоит в том, что при решении задач, сводящихся к исследованию квадратных уравнений, нужно помнить о геометрической интерпретации квадратного уравнения. Например, выделяя полный квадрат в (4.1), получаем (случай $a\neq 0$)

$$ax^2+bx+c=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=a\cdot(x-x_{\text{в}})^2+y_{\text{в}},$$

где

$$x_{\text{в}}=-\frac{b}{2a}, \quad y_{\text{в}}=c-\frac{b^2}{4a}.$$

Вершина параболы имеет координаты $(x_{\text{в}}; y_{\text{в}})$. При $a>0$ ветви параболы направлены вверх, при $x=x_{\text{в}}$ достигается минимум квадратичной функции. При $a<0$ ветви параболы направлены вниз, при $x=x_{\text{в}}$ достигается максимум квадратичной функции.

Пример 4.1. При каждом значении a решите неравенство

$$ax^2+x+3a^3>0.$$

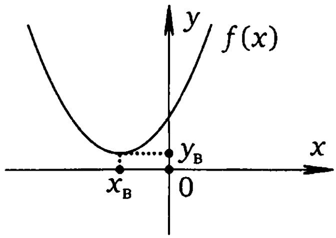

Рис. 17. $D<0$, $a>0$

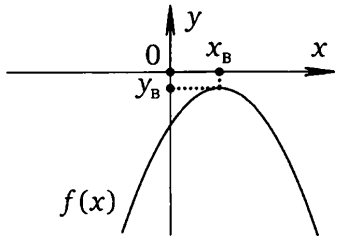

Рис. 18. $D<0$, $a<0$

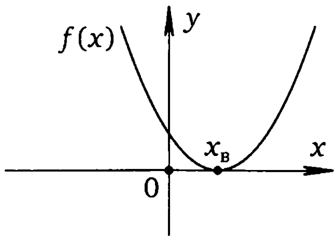

Рис. 19. $D=0$, $a>0$

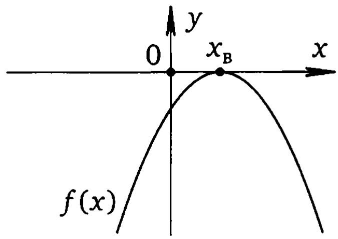

Рис. 20. $D=0$, $a<0$

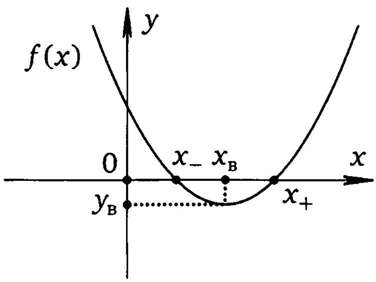

Рис. 21. $D>0$, $a>0$

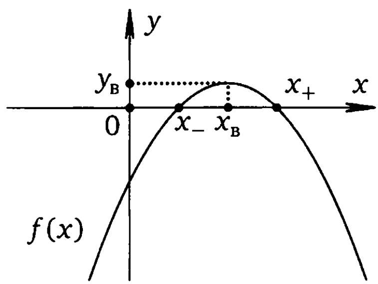

Рис. 22. $D>0$, $a<0$

Решение. Пусть $a=0$. Тогда решением неравенства будет множество чисел $x>0$.

При $a\neq 0$ функция $f(x)=ax^2+x+3a^3$ — квадратный трехчлен, ее график — парабола. Рассмотрим три случая в зависимости от знака дискриминанта $D=1-12a^4$ функции $f(x)$, т. е. случаи $D<0$, $D=0$, $D>0$.

I) Пусть $D=1-12a^4<0$, т. е. $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt[4]{12}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt[4]{12}};+\infty\right)$. Тогда в зависимости от знака a функция $f(x)$ будет всюду положительна либо всюду отрицательна (рис. 23 и 24).

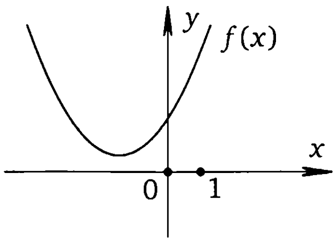

Рис. 23

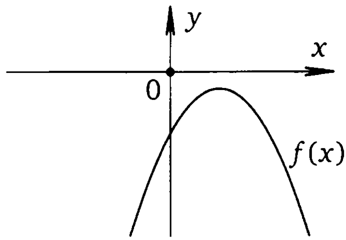

Рис. 24

Для $a>0$, точнее для $a\in\left(\frac{1}{\sqrt[4]{12}};+\infty\right)$, получаем $f(x)>0$ для любого $x\in\mathbb{R}$. Для $a<0$ получаем $f(x)<0$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

Частичный ответ: при $a\leqslant-\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$ решений нет; если $a>\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $x\in(-\infty;+\infty)$.

II) Пусть $D=1-12a^4=0$, т. е. $a=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$. Тогда у квадратного уравнения $f(x)=0$ будет единственный корень $x_0=-\frac{1}{2a}$ (рис. 25 и 26). Для $a>0$ получаем $f(x)>0$ для любого $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\right\}$. Для $a<0$

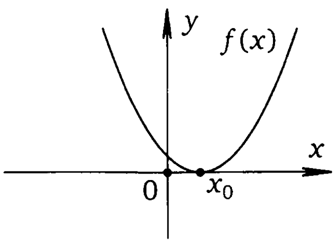

Рис. 25

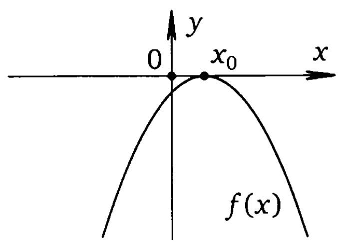

Рис. 26

получаем $f(x)\leqslant 0$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

Частичный ответ: при $a=-\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$ решений нет; если $a=\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $x\in(-\infty;+\infty)\setminus\left\{-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}\right\}$.

III) Пусть $D=1-12a^4>0$, т. е. $a\in\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{12}};\frac{1}{\sqrt[4]{12}}\right)$. Тогда у квадратного уравнения $f(x)=0$ будет два решения (рис. 27 и 28)

$$x_+=\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a},\quad x_-=\frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}.$$

Для $a > 0$ получаем $f(x) > 0$ для любого $x \in (-\infty; x_-) \cup (x_+; +\infty)$. Для

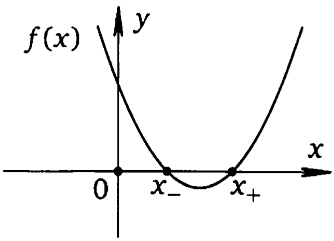

Рис. 27

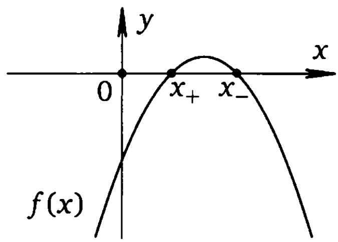

Рис. 28

$a < 0$ получаем $f(x) > 0$ для любого $x \in (x_+; x_-)$.

Частичный ответ: если $0 < a < \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то

$$x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; +\infty\right);$$

если $-\frac{1}{\sqrt[4]{12}} < a < 0$, то

$$x \in \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right).$$

Объединяя частичные ответы, получаем ответ.

Ответ: при $a \leqslant -\frac{1}{\sqrt[4]{12}}$ решений нет; если $-\frac{1}{\sqrt[4]{12}} < a < 0$, то

$$x \in \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right);$$

если $a = 0$, то $x \in (0; +\infty)$; если $0 < a \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то

$$x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; +\infty\right);$$

если $a > \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

Пример 4.2. При каких значениях a функция

$$y = \frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$$

имеет максимум в точке $x = 4$?

Решение. Исходную функцию представим в виде

$$y = 2^{-x^2+ax+7}.$$

Поскольку функция 2^t монотонно возрастает, максимум функции $y = 2^{-x^2+ax+7}$ достигается в той же точке, что и у квадратичной функции $f(x) = -x^2 + ax + 7$. У этой параболы ветви направлены вниз, следовательно, максимум достигается в вершине параболы, т. е. в точке $x_{\text{в}} = \frac{a}{2}$. Но согласно условию $x_{\text{в}} = 4$, следовательно, $a = 8$.

Ответ: $a = 8$.

Пример 4.3. Найдите все значения b, при которых уравнение

$$x - 2 = \sqrt{2(b-1)x + 1}$$

имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ (x-2)^2 = 2(b-1)x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x^2 - 2(b+1)x + 3 = 0. \end{cases}$$

У параболы $f(x) = x^2 - 2(b+1)x + 3$ ветви направлены вверх, поэтому единственное решение возможно лишь в случаях (см. соответствующие рисунки 29—33)

$$\text{I.} \begin{cases} D > 0, \\ f(2) < 0; \end{cases} \quad \text{II.} \begin{cases} D > 0, \\ f(2) = 0, \\ x_{\text{в}} < 2; \end{cases} \quad \text{III.} \begin{cases} D = 0, \\ x_{\text{в}} \geqslant 2. \end{cases}$$

Найдем дискриминант уравнения $f(x) = 0$

$$D = 4(b+1)^2 - 4 \cdot 3 = 4(b + 1 - \sqrt{3})(b + 1 + \sqrt{3}).$$

Разберем теперь каждый из перечисленных выше трех случаев.

$$\text{I.} \quad \begin{cases} D > 0, \\ f(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in (-\infty; -1-\sqrt{3}) \cup (-1+\sqrt{3}; +\infty), \\ 4 - 4(b+1) + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \in (-\infty; -1-\sqrt{3}] \cup [-1+\sqrt{3}; +\infty), \\ b > \frac{3}{4}. \end{cases}$$

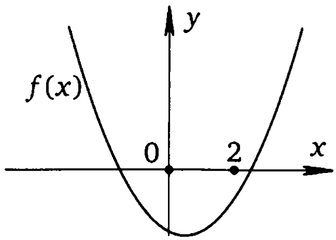

Рис. 29. Случай I

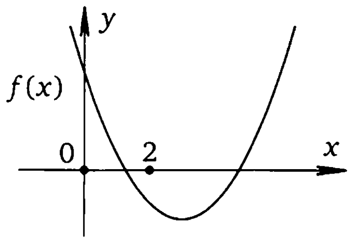

Рис. 30. Случай I

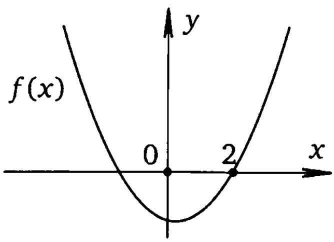

Рис. 31. Случай II

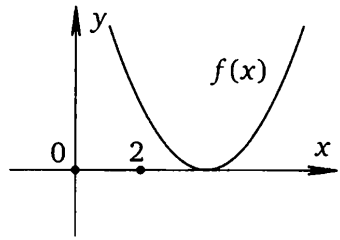

Рис. 32. Случай III

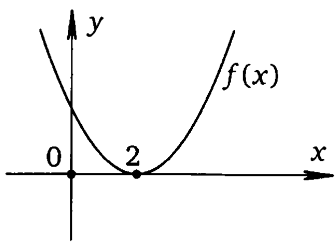

Рис. 33. Случай III

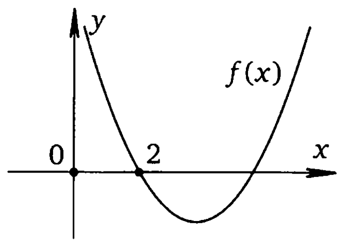

Рис. 34. Случай двух корней

Сравним числа $-1+\sqrt{3}$ и $\frac{3}{4}$.

$$-1+\sqrt{3} \vee \frac{3}{4},$$
$$\sqrt{3} \vee \frac{7}{4},$$
$$4\sqrt{3} \vee 7,$$
$$48 < 49.$$

Таким образом, в первом случае получаем $b > \frac{3}{4}$.

Разберем второй случай. (Второй случай приходится разбирать отдельно от первого, поскольку возможна ситуация (см. рис. 34), когда $D>0$ и $f(2)=0$, но при этом мы имеем два решения (случай $x_{\text{в}}>2$).)

$$\text{II.}\quad \begin{cases} D>0, \\ f(2)=0, \\ x_{\text{в}}<2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b\in(-\infty;-1-\sqrt{3})\cup(-1+\sqrt{3};+\infty), \\ b=\frac{3}{4}, \\ \frac{2(b+1)}{2}<2 \end{cases} \Leftrightarrow b=\frac{3}{4}.$$

Остается разобрать последний третий случай

$$\text{III.}\quad \begin{cases} D=0, \\ x_{\text{в}}\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1\pm\sqrt{3}, \\ b\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow b\in\varnothing.$$

Объединяя результаты этих случаев, получаем ответ.

Ответ: $b\in\left[\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Тренировочные задачи к § 4

1. При каких значениях a функция

$$y = \frac{3^{x^2}}{3^{ax-11}}$$

имеет минимум при $x = 6$?

2. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

3. При каких значениях a уравнение

$$(a-1) \cdot 4^x + (2a-3) \cdot 6^x = (3a-4) \cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

4. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4^x + (a^2+5) \cdot 2^x + 9 - a^2 = 0$$

не имеет решений.

5. Найдите все значения a, для каждого из которых система

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geqslant 0, \\ x \leqslant 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x.

6. При каких значениях a уравнение

$$2a(x+1)^2 - |x+1| + 1 = 0$$

имеет четыре различных корня?

7. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\log_{1/5}(x^2 - ax + 7) < -1$$

выполняется для всех значений x из промежутка $x < 0$.

8. Найдите все целые значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt[3]{x^6} - \left(\frac{1}{a} - 2\right) \cdot \sqrt[4]{x^4} + 1 - \frac{2}{a} = 0$$

имеет решение и все решения этого уравнения являются целыми числами.

9. Обозначим через x_1 и x_2 корни квадратного трехчлена

$$(a-1)x^2-(2a+1)x+2+5a.$$

1) Найдите все значения a, при которых $x_1>1$ и $x_2>1$.

2) Найдите все значения b, для каждого из которых функция $(x_1-b)(x_2-b)$ принимает постоянное значение при всех a, при которых она определена.

10. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма арктангенсов корней уравнения

$$x^2+(1-2a)x+a-4=0$$

больше чем $\frac{\pi}{4}$.

11. Найдите все значения p, при которых уравнение

$$x-2=\sqrt{-2(p+2)x+2}$$

имеет единственное решение.

12. При каждом значении a найдите все решения неравенства

$$x+2a-2\sqrt{3ax+a^2}>0.$$

13. Найдите все значения b, при которых уравнение

$$3\cdot\sqrt[5]{x+2}-16b^2\cdot\sqrt[5]{32x+32}=\sqrt[10]{x^2+3x+2}$$

имеет единственное решение.

14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a-1)\cos^2 x-(a^2+a-2)\cos x+2a^2-4a+2=0$$

имеет более одного решения на отрезке $\left[0;\frac{4\pi}{3}\right]$.

15. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(x^2+2(a-2)x+a^2-4a)^2+$$
$$+(a+5)(x^2+2(a-2)x+a^2-4a)-a^2+8a+2=0$$

имеет: а) единственное решение; б) ровно два различных решения.

§ 5
Выделение неотрицательных выражений

Одним из типичных неотрицательных выражений является полный квадрат. Выделение полного квадрата производится с помощью хорошо известной формулы

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$$

Пример 5.1. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(x^2-6|x|+a)^2+10(x^2-6|x|+a)+26=\cos\left(\frac{16\pi}{a}\right)$$

имеет ровно два корня.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x^2-6|x|+a)^2+2\cdot 5(x^2-6|x|+a)+25+1-\cos\left(\frac{16\pi}{a}\right)=0 \iff$$

$$\iff (x^2-6|x|+a+5)^2+\left(1-\cos\left(\frac{16\pi}{a}\right)\right)=0.$$

Функция $(x^2-6|x|+a+5)^2$ и величина $1-\cos\left(\frac{16\pi}{a}\right)$ неотрицательны при всех значениях переменных. Мы получили, что сумма неотрицательных слагаемых равна нулю. Это имеет место тогда и только тогда, когда эти слагаемые обращаются в ноль одновременно, т. е. исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-6|x|+a+5=0, \\ 1-\cos\left(\frac{16\pi}{a}\right)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} (|x|-3)^2=4-a, \\ a=\frac{8}{n}, \quad n\in\mathbb{Z} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} a\leqslant 4, \\ |x|=3\pm\sqrt{4-a}, \\ a=\frac{8}{n}, \quad n\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Совокупность уравнений $|x|=3\pm\sqrt{4-a}$ имеет ровно два корня в том и только в том случае, когда либо $\sqrt{4-a}=0$, либо $3-\sqrt{4-a}<0$, т. е. либо $a=4$, либо $a<-5$. Следовательно, значения a должны принадлежать множеству $a\in(-\infty;-5)\cup\{4\}$, откуда с учетом условия

$$a=\frac{8}{n}, \quad n\in\mathbb{Z} \iff a=\pm 8, \pm 4, \pm\frac{8}{3}, \ldots$$

находим два значения $a=4$, $a=-8$, принадлежащие множеству $a\in\in(-\infty;-5)\cup\{4\}$.

Ответ: при $a=4$, $a=-8$.

Пример 5.2. Для каждого значения a решите уравнение

$$9a^2+\log_2^2 x+3\arccos(x-1)-(3a-1)\log_2 x^2-6a+1=0.$$

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$9a^2+\log_2^2 x+3\arccos(x-1)-(3a-1)\log_2 x^2-6a+1=0 \iff$$
$$\iff \log_2^2 x-2\cdot(3a-1)\log_2 x+9a^2-6a+1+3\arccos(x-1)=0 \iff$$
$$\iff \log_2^2 x-2\cdot(3a-1)\log_2 x+(3a-1)^2+3\arccos(x-1)=0 \iff$$
$$\iff (\log_2 x-3a+1)^2+3\arccos(x-1)=0.$$

Поскольку функции $(\log_2 x-3a+1)^2$ и $3\arccos(x-1)$ неотрицательные, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\log_2 x-3a+1=0,\\ 3\arccos(x-1)=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=\frac{2}{3},\\ x=2.\end{cases}$$

Ответ: если $a=\frac{2}{3}$, то $x=2$, при других a решений нет.

Тренировочные задачи к § 5

1. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$$

не имеет решений.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2x^2 + 2a(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2} - 3$$

имеет решение.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3x+2} - |y+2| = 0, \\ 2\sqrt{y^2+4y+4} + \sqrt{x^2-x-2} = 0. \end{cases}$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} 2^{-x}y^4 - 2y^2 + 2^x \leqslant 0, \\ 8^x - y^4 + 2^x - 1 = 0. \end{cases}$$

5. Число α подобрано так, что уравнение

$$\sqrt{x - \sqrt{3}} + \alpha^2x^2 + 2\alpha x(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 6\sqrt{2} - 9$$

имеет решение. Найдите это решение.

6. Найдите все тройки целых чисел $(x; y; z)$, для которых выполняется соотношение

$$5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30.$$

7. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(x^2 - 6|x| - a)^2 + 12(x^2 - 6|x| - a) + 37 = \cos\left(\frac{18\pi}{a}\right)$$

имеет ровно два решения.

8. При каких значениях a уравнение

$$\left|\frac{x^2 - 4ax + 4a^2 - 1}{x - 2a}\right| + x^2 - 2x + 1 = 0$$

имеет хотя бы одно решение?

9. Решите уравнение

$$(x-1)^6(\sin 4x+\sin 4)^{1/6}+(x+1)^6(\sin 2-\sin 2x)^{1/6}=0.$$

10. Для каждого значения b найдите все пары чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$b\sin 2y+\log_4(x\sqrt[8]{1-4x^8})=b^2.$$

11. Для каждого значения a найдите все пары чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$a\cos 2x+\log_2(y\sqrt[12]{1-2y^{12}})=a^2.$$

12. Найдите все пары действительных чисел a и b, при которых уравнение

$$(3x-a^2+ab-b^2)^2+(2x^2-a^2-ab)^2+x^2+9=6x$$

имеет хотя бы одно решение x.

13. Найдите все рациональные решения уравнения

$$\sqrt{y\cdot(x+1)^2-x^2+x+1}+\log^2_{(|y+2|/21)}\cos^2\pi y=0.$$

14. При каких a уравнение

$$\left(\sqrt{x^2-3ax+8}+\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x+\\+\left(\sqrt{x^2-3ax+8}-\sqrt{x^2-3ax+6}\right)^x=2\left(\sqrt{2}\right)^x.$$

имеет единственное решение?

15. Найдите наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z удовлетворяющие уравнению

$$x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1.$$

16. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} \cos 10x-2\sin 5x\geqslant 3\cdot 4^t-3\cdot 2^{t+2}+\dfrac{27}{2}, \\ \sqrt{(2-\sqrt{3})^{4t}+(2+\sqrt{3})^{4t}+2}+14\log_2(\cos 10x)+6\cos 5x\geqslant \\ \qquad\qquad\geqslant(2t+1)^{1,5}. \end{cases}$$

17. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 2^{x+y} \leqslant \dfrac{108a - 161}{2a - 3}, \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 9 \cdot 4^y \geqslant 54 \end{cases}$$

имеет решение.

18. При каких значениях a уравнение

$$(x^2 - x + a^2 + 2)^2 = 4a^2(2x^2 - x + 2)$$

имеет ровно три различных решения?

19. Для каждого a решите уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x - 2a(\sin x + \sin 2x + \sin 3x) + \\ + \cos x - \cos 3x + 2a^2 = 0.$$

§ 6
Разложение на множители

Разложение на множители часто значительно упрощает задачу. Для этого, например, используется удачная группировка слагаемых. Также бывает полезным умение разделить один многочлен на другой.

Опишем деление алгебраического многочлена $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + + \ldots + a_1x + a_0$ на одночлен $x - x_0$. Сначала разберем алгоритм деления, называемый *схемой Горнера*.

I. Разделим многочлен $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + + a_1x + a_0$ на одночлен $x - a$, т. е. представим его в виде

$$P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + R,$$

где R остаток, а $Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0$ — многочлен. Коэффициенты b_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ и остаток R удобно вычислять при помощи таблицы

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_2	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_1	b_0	R

где

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n; \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + a \cdot b_{n-1}; \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + a \cdot b_{n-2}; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ b_0 &= a_1 + a \cdot b_1; \\ R &= a_0 + a \cdot b_0. \end{aligned}$$

II. Опишем более общий способ деления многочлена на произвольный многочлен (пригодный и для рассмотренного выше деления на одночлен $x - a$). Для этого рассмотрим пример деления многочлена

$$ax^4 + x^3 + (2a + 3a^3)x^2 + 2x + 6a^3$$

на многочлен $x^2 + 2$. Будем действовать по аналогии с обычным делением целых чисел. Сначала подберем одночлен так, чтобы при умножении его на $x^2 + 2$ получился многочлен, имеющий старший коэффициент, равный ax^4. Очевидно, это ax^2. Вычтем из исходного многочлена многочлен $ax^2(x^2 + 2)$ и получим

$$ax^4 + x^3 + (2a + 3a^3)x^2 + 2x + 6a^3 - ax^4 - 2ax^2 = x^3 + 3a^3x^2 + 2x + 6a^3.$$

Снова подбираем одночлен так, чтобы при его умножении на x^2+2 получился многочлен со старшим коэффициентом x^3. Этот одночлен равен x. Вычтем из $x^3+3a^3x^2+2x+6a^3$ многочлен x^3+2x:

$$x^3+3a^3x^2+2x+6a^3-x^3-2x=3a^3x^2+6a^3.$$

Наконец, подбираем одночлен так, чтобы при его умножении на x^2+2 получился многочлен со старшим коэффициентом, равным $3a^3x^2$. Этот одночлен равен $3a^3$. Разность многочленов $3a^3x^2+6a^3$ и $3a^3(x^2+2)$ равна 0. Это означает, что

$$ax^4+x^3+(2a+3a^3)x^2+2x+6a^3=(ax^2+x+3a^3)(x^2+2).$$

Эти вычисления удобно записать в виде деления уголком:

$$\begin{array}{r|l}
ax^4+x^3+(2a+3a^3)x^2+2x+6a^3 & x^2+2 \\ \cline{2-2}
ax^4+0 \qquad\qquad +2ax^2 \qquad\qquad\quad & ax^2+x+3a^3 \\ \cline{1-1}
x^3 \qquad\quad +3a^3x^2+2x \qquad & \\
x^3 \qquad\qquad\quad +0+2x \qquad & \\ \cline{1-1}
3a^3x^2 \quad +0+6a^3 & \\
3a^3x^2 \quad +0+6a^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Пример 6.1. При каждом значении a решите неравенство

$$ax^4+x^3+(2a+3a^3)x^2+2x+6a^3>0.$$

Решение. Используя полученное выше разложение, получаем

$$ax^4+x^3+(2a+3a^3)x^2+2x+6a^3>0 \iff$$
$$\iff x^2(ax^2+x+3a^3)+2(ax^2+x+3a^3)>0 \iff$$
$$\iff (x^2+2)(ax^2+x+3a^3)>0$$

Поскольку для любого действительного x справедливо неравенство $x^2+2>0$, исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$ax^2+x+3a^3>0,$$

решенному в примере 4.1.

Ответ: При $a\leqslant-\dfrac{1}{\sqrt[4]{12}}$ решений нет; если $-1/\sqrt[4]{12}<a<0$, то $x\in\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a};\dfrac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)$; если $a=0$, то $x\in(0;+\infty)$; если $0<a\leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$, то $x\in\left(-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a};+\infty\right)$; при $a>1/\sqrt[4]{12}$, $x\in(-\infty;+\infty)$.

Пример 6.2. Для каждого значения a решите неравенство

$$3a-1-(8a-5)\cdot 3^{-2\sqrt{-\log_{81}(x^2+6x+9)}}\leqslant 3(a+2)\cdot|x+3|^{2\sqrt{\log_{|x+3|}(1/9)}}.$$

Решение. Перепишем исходное неравенство в следующем виде:

$$3a-1-(8a-5)\cdot 3^{-2\sqrt{-\log_9|x+3|}}\leqslant 3(a+2)\cdot|x+3|^{2\sqrt{-\log_{|x+3|}9}}.$$

Найдем ОДЗ неравенства

$$\begin{cases}\log_9|x+3|\leqslant 0,\\ |x+3|>0,\\ |x+3|\neq 1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad 0<|x+3|<1.$$

Заметим, что

$$|x+3|^{2\sqrt{-\log_{|x+3|}9}}=9^{2\sqrt{-\log_{|x+3|}9}\cdot\log_9|x+3|}=9^{-2\frac{-\log_9|x+3|}{\sqrt{-\log_9|x+3|}}}=$$
$$=9^{-2\sqrt{-\log_9|x+3|}}=\left(3^{-2\sqrt{-\log_9|x+3|}}\right)^2.$$

Введем обозначение

$$t=3^{-2\sqrt{-\log_9|x+3|}}.$$

Найдем ОДЗ переменной t:

$$0<|x+3|<1\quad\Leftrightarrow\quad 0<-\log_9|x+3|<+\infty\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 0<t=3^{-2\sqrt{-\log_9|x+3|}}<1.$$

Тогда исходное неравенство с учетом ОДЗ примет вид

$$\begin{cases}3(a+2)t^2+(8a-5)t-(3a-1)\geqslant 0,\\ 0<t<1.\end{cases}$$

Решим эту систему. Для $a=-2$ имеем

$$\begin{cases}-21t+7\geqslant 0,\\ 0<t<1.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad t\in\left(0;\ \frac{1}{3}\right].$$

Для $a\neq -2$ найдем корни квадратного уравнения

$$3(a+2)t^2+(8a-5)t-(3a-1)=0,$$

например, вычисляя его дискриминант: $t=1/3$, $t=\dfrac{1-3a}{a+2}$. Таким образом, при $a\neq -2$ получаем

$$\begin{cases} 3(a+2)(t-1/3)\left(t-\dfrac{1-3a}{a+2}\right)\geqslant 0,\\ 0<t<1. \end{cases}$$

Решаем последнюю систему относительно переменной t.

Если $a\leqslant -\frac{1}{4}$, то $t\in\left(0;\frac{1}{3}\right]$; если $a\in\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{10}\right)$, то $t\in\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1-3a}{a+2};1\right)$; если $a=\frac{1}{10}$, то $t\in(0;1)$; если $a\in\left(\frac{1}{10};\frac{1}{3}\right)$, то $t\in\left(0;\dfrac{1-3a}{a+2}\right]\cup\left[\frac{1}{3};1\right)$; если $a\geqslant\frac{1}{3}$, то $x\in\left[\frac{1}{3};1\right)$.

Чтобы получить окончательный ответ, перейдем обратно к переменной x.

Ответ: Если $a\leqslant-\frac{1}{4}$, то $x\in\left[-3-\frac{1}{\sqrt{3}};-3\right)\cup\left(-3;-3+\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$; если $a\in\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{10}\right)$, то $x\in(-4;-3-f_a]\cup\left[-3-\frac{1}{\sqrt{3}};-3\right)\cup\left(-3;-3+\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup[-3+f_a;-2)$; если $a=\frac{1}{10}$, то $x\in(-4;-3)\cup(-3;-2)$; если $a\in\left(\frac{1}{10};\frac{1}{3}\right)$, то $x\in\left(-4;-3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup[-3-f_a;-3)\cup(-3;-3+f_a]\cup\left[-3\frac{1}{\sqrt{3}};-2\right)$; если $a\geqslant\frac{1}{3}$, то $x\in\left(-4;-3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[-3+\frac{1}{\sqrt{3}};-2\right)$, где $f_a=\left(\dfrac{1-3a}{a+2}\right)^{\log_3\sqrt{(a+2)/(1-3a)}}$.

Тренировочные задачи к § 6

1. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$x^2+2|x-a|\geqslant a^2$$

справедливо при всех действительных x.

2. Найдите наибольшее значение a, при котором уравнение $x^3+{}$ $+5x^2+ax+b=0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен -2.

3. Для каждого допустимого значения a решите неравенство

$$a^x(a-1)^x-2a^{x+1}-(a-1)^x+2a\leqslant 0$$

и найдите, при каких значениях a множество решений неравенства представляет собой промежуток длины 2.

4. Найдите все значения a, при которых область определения функции

$$y=\left((\sqrt{a})^{2x+1}+\sqrt{x}a^4-x^{1/2+x\log_x a}-(\sqrt{a})^9\right)^{1/2}$$

содержит два или три целых числа.

5. При каких значениях a неравенство

$$(x^2-(a+8)x-6a^2+24a)\sqrt{3-x}\leqslant 0$$

имеет единственное решение?

6. Для каждого значения a решите неравенство

$$(x^2+2x-a^2-4a-3)(\sin x+2x)>0.$$

7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x^2\cdot 2^{|2a-1|}-2x+1}{x^2-(a-2)x-2a}>0.$$

8. Фигура на плоскости $(x;y)$ состоит из всех точек, через которые не проходит ни одна из кривых, задаваемых соотношением

$$(p^4+4p^2+16)^2+(x^2-y^2)^2=$$
$$=16(p^3+4p)xy+2(p^4+12p^2+16)(x^2+y^2)$$

при различных действительных значениях p. Найдите длину линии, ограничивающей эту фигуру.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства

$$x^3\sqrt{a^3+a^2-a-1}-x^2\sqrt{a^3+a^2}+x\sqrt{a^4-a^2}-a^2\leqslant 0$$

удовлетворяет условию $a\leqslant x\leqslant 2a+1$.

10. Для каждого значения a решите неравенство

$$2a+3-2(a-1)\cdot 2^{-2\sqrt{2\log_{1/2}|x-4|}}\geqslant(3a+7)\cdot(x^2-8x+16)^{\sqrt{-(1/2)\log_{|x-4|}2}}.$$

11. При каждом значении a решите уравнение

$$\sqrt{-x^3+(a-1)x^2+(a-1)x+a}=2x^2+3x+2-a.$$

12. При каждом значении a решите неравенство

$$2ax^4+8x^3+(a+2a^3)x^2+4x+a^3>0.$$

13. Найдите все значения β, при которых уравнение

$$(x^2+x)(x^2+5x+6)=\beta$$

относительно x имеет ровно три корня.

14. Найдите все пары значений a и b, для каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2+a(x+y)=x-y+a,\\ x^2+y^2+bxy-1=0\end{cases}$$

имеет не менее пяти решений $(x;y)$.

15. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^3-(a+3)x^2+(3a+2)x-2a\geqslant 0,\\ x^3-(a+3)x^2+3ax\leqslant 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

16. Найдите все такие значения $y>\frac{1}{2}$, что неравенство

$$16y^3+6y^3x-4y^3x^2-50y^2-11y^2x+\\ +10y^2x^2+52y+4yx-8yx^2-18+x+2x^2>0$$

выполняется при всех x из интервала $1<x<2y$.

17. При каком значении a сумма различных корней уравнения

$$\cos x - \sin 2x + \sin 4x = a(\operatorname{ctg} x + 2\cos 3x),$$

принадлежащих отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{22\pi}{3}\right]$, максимальна?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^{3x^2+2y^2+8x-4y+8} + 2^{x^2+4y+5} \leqslant 33 \cdot 2^{2x^2+y^2+4x+4}, \\ x^2 + y^2 - 8x + 8y = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, но среди этих решений нет удовлетворяющих условию $x + y = 0$.

19. Найдите все значения a, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x + 6a\cos x - \sin x - 3a = 0$$

найдутся два корня, разница между которыми равна $\frac{3\pi}{2}$.

20. Найдите все значения a из промежутка $[-2; 1]$, при каждом из которых расстояние на числовой оси между любыми различными корнями уравнения

$$\sin 2x + |2a+1|\sin x + |a| = 2|a|\cos x + \sin x + |2a^2 + a|$$

не меньше, чем $\frac{\pi}{2}$.

21. Найдите все значения a, при каждом из которых все решения уравнения

$$6\sin\left(2x - \frac{11}{12}\pi a\right) + 6\sin\left(\frac{11}{12}\pi a\right) + 3a^3 - 7a^2 + 3a + 1 =$$
$$= 2(3a^2 - 4a - 1)\cos\left(x - \frac{11}{12}\pi a\right) + 6(a-1)\sin x,$$

будучи отложенными на тригонометрической окружности, образуют на ней ровно четыре точки, причем эти точки являются вершинами трапеции.

§ 7
Теорема Виета для уравнений третьей степени

Для кубического уравнения $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, $a_3\neq 0$, имеющего корни x_1, x_2, x_3, выполнены равенства:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{a_0}{a_3}. \end{cases}$$

Пример 7.1. Определите все значения a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3+(a^2-9a)x^2+8ax-64=0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

Решение. Пусть q — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда корни связаны соотношением $x_2=qx_1$, $x_3=q^2x_1$. По теореме Виета $x_1x_2x_3=64$, или $(qx_1)^3=64$, откуда $x_2=4$. Запишем теорему Виета для

$$x_1=q^{-1}x_2=4q^{-1}, \quad x_2=4, \quad x_3=qx_2=4q:$$

$$\begin{cases} 4(q^{-1}+1+q)=-(a^2-9a), \\ 16(q+1+q^{-1})=8a, \\ x_2=4. \end{cases}$$

Ясно, что $a\neq 0$, так как иначе уравнение $q+1+q^{-1}=0$ решений не имеет и, следовательно, этот случай противоречит условию существования трех различных корней. Из первого и второго уравнений получаем

$$2=-(a-9) \iff a=7.$$

Из второго уравнения находим

$$q+1+q^{-1}=\frac{7}{2} \iff q^2-\frac{5}{2}q+1=0 \iff q=2,\ q=\frac{1}{2}.$$

Пусть $q=2$. Тогда $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=8$. Пусть $q=\frac{1}{2}$. Тогда $x_1=8$, $x_2=4$, $x_3=2$. В обоих случаях получаем, что корнями исходного уравнения являются числа 2, 4, 8.

Ответ: $a=7$, корни уравнения 2, 4, 8.

Заметим, что найдя, как и ранее, корень $x_2=4$, подстановкой в исходное уравнение получаем

$$4^3+16(a^2-9a)+32a-64=0 \iff a^2-7a=0.$$

Получаем два значения a: $a=0$, $a=7$. Как и ранее, доказываем, что случай $a=0$ невозможен. Для $a=7$ уравнение принимает вид

$$x^3-14x+56x-64=0 \iff (x-4)(x^2-10x+16)=0 \iff$$
$$\iff (x-4)(x-2)(x-8)=0.$$

Отсюда получаем искомый ответ.

Пример 7.2. Найдите все значения a и b, при которых найдутся два различных корня уравнения

$$x^3-5x^2+7x=a,$$

которые будут также корнями уравнения

$$x^3-8x+b=0.$$

Решение. Решим задачу двумя способами.

I. Пусть x_1, x_2, x_3 — решения уравнения[1] $x^3-5x^2+7x=a$, причем $x_1\neq x_2$. Пусть x_1, x_2, x_3^* решения уравнения $x^3-8x+b=0$.

Так как корни x_1, x_2 удовлетворяют сразу двум уравнениям $x^3-5x^2+7x=a$ и $x^3-8x+b=0$, они же удовлетворяют уравнению, полученному как разность этих двух уравнений:

$$-5x^2+15x-(a+b)=0 \iff x^2-3x+\frac{a+b}{5}=0.$$

По теореме Виета для квадратного уравнения находим

$$x_1+x_2=3, \tag{7.1}$$
$$x_1x_2=(a+b)/5. \tag{7.2}$$

[1]Из существования двух корней x_1, x_2 для многочлена третьей степени $ax^3+bx^2+cx+d=0$ вытекает существование третьего корня. Действительно, достаточно исходный многочлен разделить на $(x-x_1)(x-x_2)$.

Запишем теорему Виета для уравнений $x^3-5x^2+7x=a$ и x^3-8x+ $+b=0$:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=7, \\ x_1x_2x_3=a, \\ x_1+x_2+x_3^*=0, \\ x_1x_2+x_1x_3^*+x_2x_3^*=-8, \\ x_1x_2x_3^*=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=2, \\ \dfrac{a+b}{5}+3x_3=7, \\ \dfrac{a+b}{5}x_3=a, \\ 3+x_3^*=0, \\ \dfrac{a+b}{5}+3x_3^*=-8, \\ \dfrac{a+b}{5}x_3^*=-b. \end{cases}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (7.1) — (7.2). Далее мы находим

$$x_3=2, \quad \frac{a+b}{5}=1, \quad x_3^*=-3,$$
$$a=\frac{a+b}{5}x_3=x_3=2,$$
$$b=-\frac{a+b}{5}x_3^*=-x_3^*=3.$$

Проверка. Для $a=2$, $b=3$ исходные уравнения принимают вид

$$x^3-5x^2+7x-2=0,$$
$$x^3-8x+3=0.$$

Из соотношений (7.1) — (7.2) мы находим

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

которые являются корнями заданных уравнений, в чем убеждаемся подстановкой.

Приведем решение без использования теоремы Виета.

II. Пусть x_1 и x_2 — два различных решения уравнения x^3-5x^2+ $+7x=a$. Для определенности будем считать, что $x_1>x_2$. Поскольку x_1 и x_2 удовлетворяют уравнению $x^3-5x^2+7x=a$, получаем систему

$$\begin{cases} x_1^3-5x_1^2+7x_1=a, \\ x_2^3-5x_2^3+7x_2=a. \end{cases}$$

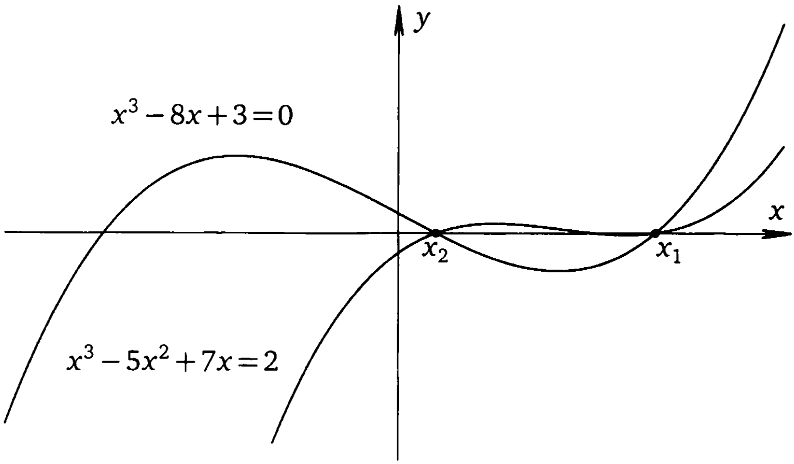

Рис. 35

Вычитая из первого уравнения второе (и учитывая, что $x_1-x_2>0$), получаем

$$(x_1^3-x_2^3)-5(x_1^2-x_2^2)+7(x_1-x_2)=0 \iff$$
$$\iff (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-5(x_1+x_2)+7)=0 \iff$$
$$\iff (x_1+x_2)^2-5(x_1+x_2)-x_1x_2+7=0.$$

Из того, что x_1 и x_2 удовлетворяют второму уравнению, т. е.

$$\begin{cases} x_1^3-8x_1+b=0,\\ x_2^3-8x_2+b=0,\end{cases}$$

вытекает соотношение

$$(x_1^3-x_2^3)-8(x_1-x_2)=0 \iff (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-8)=0 \iff$$
$$\iff (x_1+x_2)^2-x_1x_2-8=0.$$

Таким образом, x_1 и x_2 удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (x_1+x_2)^2-5(x_1+x_2)-x_1x_2+7=0,\\ (x_1+x_2)^2-x_1x_2-8=0,\end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} -5(x_1+x_2)+15=0,\\ (x_1+x_2)^2-x_1x_2-8=0,\end{cases} \iff \begin{cases} x_1+x_2=3,\\ x_1x_2=1.\end{cases}$$

Следовательно, x_1 и x_2 удовлетворяют уравнению

$$x^2-3x+1=0, \qquad (7.3)$$

решая которое, находим $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Теперь, используя (7.3), найдем значение a:

$$a = x_1^3 - 5x_1^2 + 7x_1 = x_1(x_1^2 - 5x_1 + 7) = x_1((x_1^2 - 3x_1 + 1) - 2x_1 + 6) = \\ = x_1(-2x_1 + 6) = -2(x_1^2 - 3x_1 + 1) + 2 = 2$$

и значение b:

$$-b = x_1^3 - 8x_1 = x_1((x_1^2 - 3x_1 + 1) + 3x_1 - 9) = x_1(3x_1 - 9) = \\ = 3(x_1^2 - 3x_1 + 1) - 3 = -3.$$

Ответ: $a = 2$, $b = 3$.

Тренировочные задачи к § 7

1. Квадратное уравнение

$$x^2 - 6px + q = 0$$

имеет два различных корня x_1 и x_2. Числа p, x_1, x_2, q — четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите x_1 и x_2.

2. При каких значениях a четыре корня уравнения

$$x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

3. Уравнение $ax^2 + bx + 2 = 0$, где $a < 0$, имеет одним из своих корней число $x = 3$. Решите уравнение

$$ax^4 + bx^2 + 2 = 0.$$

4. Найдите все значения u и v, при которых найдутся два различных корня уравнения

$$x(x^2 + x - 8) = u,$$

которые будут также корнями уравнения

$$x(x^2 - 6) = v.$$

5. Определите все значения a, при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 15a)x^2 + 12ax - 216 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

6. Даны три уравнения с действительными коэффициентами:

$$x^2 - (a+b)x + 8 = 0,$$

$$x^2 - b(b+1)x + c = 0,$$

$$x^4 - b(b+1)x^2 + c = 0.$$

Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Известно, что корни первого уравнения больше единицы. Известно также, что все корни первого уравнения являются корнями третьего уравнения и хотя бы один корень первого уравнения удовлетворяет второму уравнению. Найдите числа a, b, c, если $b > 3$.

§ 8
Задачи на исследование количества решений

Введем обозначение: $f_a(x)$ означает, что функция содержит параметр a. Основной тип задач данного параграфа можно сформулировать так.

Задача А. Найдите все значения параметра a (или нескольких параметров), при которых уравнение (или неравенство) $f_a(x)=0$ ($f_a(x)\leqslant 0$ или $f_a(x)\geqslant 0$) имеет единственное решение.

Напомним определение четности и нечетности функции.

Определение. Если область определения функции $f(x)$ симметрична относительно начала координат и если для каждого x из области определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$, то функция $f(x)$ — четная, а если для каждого x из области определения выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$, то функция $f(x)$ — нечетная.

Функции

$$f_1(x)=|\sin x|,\quad f_2(x)=\cos x,$$
$$f_3(x)=x^4-3x^2,\quad f_4(x)=\frac{\operatorname{tg} x\cdot(7^x-1)}{7^x+1}$$

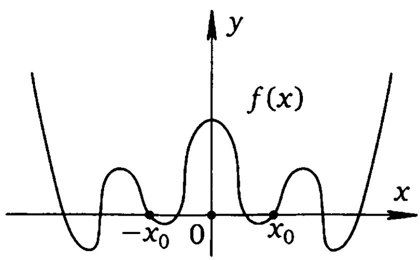

Рис. 36. $f(x_0)=f(-x_0)=0$.

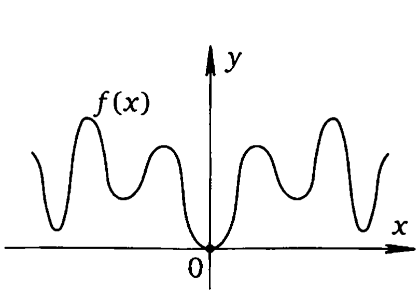

Рис. 37. $f(0)=0$.

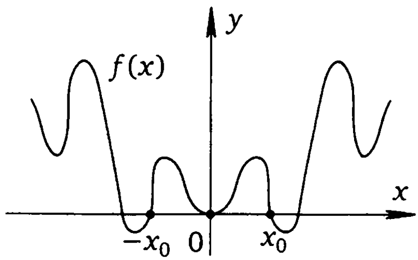

Рис. 38. $f(x_0)=f(-x_0)=f(0)=0$.

четные. Для первых трех функций это очевидно. Проверим, что функция $f_4(x)$ четная:

$$f_4(-x)=\frac{\operatorname{tg}(-x)\cdot(7^{-x}-1)}{7^{-x}+1}=\frac{-\operatorname{tg}x\cdot 7^{-x}(1-7^x)}{7^{-x}(1+7^x)}=$$
$$=-\frac{\operatorname{tg}x\cdot(1-7^x)}{(1+7^x)}=\frac{\operatorname{tg}x\cdot(7^x-1)}{7^x+1}=f_4(x).$$

Пусть при решении задачи А функция $f_a(x)$ оказалась четной при каждом значениии a. Тогда если x_0 является решением задачи А, то и $-x_0$ — решение задачи А (рис. 36), поскольку $f_a(x_0)=f_a(-x_0)$. Следовательно, для единственности решения *необходимо*, чтобы $x_0=0$ было решением задачи А (рис. 37, 38), и *достаточно* чтобы решений (кроме $x_0=0$) больше не было (рис. 37), таким образом, случай, изображенный на рисунке 38 мы отбрасываем.

Решая задачу А, мы сначала будем:

1) искать возможные значения a из уравнения (неравенства) $f(a,0)=0$ ($f(a,0)\leqslant 0, f(a,0)\geqslant 0$), т. е. из необходимого условия единственности;

2) для найденных из необходимого условия значений a будем проверять, что других решений (кроме $x=0$) нет, т. е. проверять достаточное условие единственности.

Пример 8.1. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\cos x-2\sqrt{x^2+9}\leqslant-\frac{x^2+9}{a+\cos x}-a$$

имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\cos x - 2\sqrt{x^2+9} \leqslant -\frac{x^2+9}{a+\cos x} - a \iff$$

$$\iff \frac{(a+\cos x)^2 - 2\sqrt{x^2+9}(a+\cos x) + x^2+9}{a+\cos x} \leqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{(a+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x} \leqslant 0.$$

Обозначим

$$f(x) = \frac{(a+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x}.$$

Поскольку $f(x)$ — четная функция ($f(x) = f(-x)$), для того чтобы исходное неравенство $f(x) \leqslant 0$ имело единственное решение, необходимо, чтобы $x = 0$ было решением неравенства (поскольку если x_0 — решение неравенства, то и $-x_0$ является его решением в силу четности функции $f(x)$).

Таким образом, $\frac{(a-2)^2}{a+1} \leqslant 0$, т.е. $a = 2$ или $a < -1$. Проверим, является ли решение $x = 0$ исходного неравенства единственным при найденных значениях a.

Пусть $a < -1$. Тогда неравенство

$$\frac{(a+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2}{a+\cos x} \leqslant 0$$

выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$, так как для $a < -1$ справедливы неравенства

$$(a+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2 \geqslant 0, \quad a+\cos x < 0.$$

Пусть $a = 2$. Тогда $2+\cos x > 0$ для любых $x \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\frac{(2+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2}{2+\cos x} \leqslant 0 \iff (2+\cos x - \sqrt{x^2+9})^2 \leqslant 0 \iff$$

$$\iff 2+\cos x - \sqrt{x^2+9} = 0 \iff 2+\cos x = \sqrt{x^2+9}.$$

Но $x = 0$ является единственным корнем уравнения

$$2+\cos x = \sqrt{x^2+9},$$

так как для $x \neq 0$ получаем неверное утверждение

$$3 \geqslant 2+\cos x = \sqrt{x^2+9} > 3.$$

Ответ: $a = 2$.

Пример 8.2. При каких значениях a и b система

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right| = a, \\ x^2+y^2=b \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. **I.** Пусть $f(x,y)=\left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right|$, $g(x,y)=x^2+y^2$. Из равенств $f(x,y)=f(x,-y)$, $g(x,y)=g(x,-y)$ вытекает, что если $(x_0; y_0)$ — решение исходной системы, то и $(x_0; -y_0)$ — тоже решение системы. Следовательно, для единственности решения должно выполняться условие $y_0=-y_0$, т. е. $y_0=0$. Подставив $y_0=0$ в исходную систему, получаем систему:

$$\begin{cases} a=0, \\ x^2=b. \end{cases}$$

II. Итак, число a равно нулю. Выясним, при каких b система

$$\begin{cases} x^y=1, \\ x^2+y^2=b, \end{cases}$$

полученная из исходной, при $a=0$ имеет единственное решение. Эта система определена при $x>0$ и при этом равносильна совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0, \\ x=\sqrt{b} \quad (\text{при } b>0); \end{cases} \\ \begin{cases} x=1, \\ y=\pm\sqrt{b-1} \quad (\text{при } b\geqslant 1), \end{cases} \end{array}\right.$$

решая которую, находим, что:

1) при $b\leqslant 0$ решений нет;
2) при $b\in(0;1]$ решение одно: $(x;y)=(\sqrt{b};0)$;
3) при $b>1$ три решения: $(x;y)=(\sqrt{b};0)$, $(1;\pm\sqrt{b-1})$.

Ответ: $a=0$, $b\in(0;1]$.

Тренировочные задачи к § 8

1. При каких значениях a уравнение

$$\cos 2x + 2\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет ровно одно решение на промежутке $x \in [0; 2\pi)$?

2. При каких значениях b уравнение

$$\operatorname{tg}|b| = \log_2(\cos x - |x|)$$

имеет ровно один корень?

3. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

4. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\cos 2x + a \leqslant 2\sqrt{x^2+16} - \frac{x^2+16}{a+\cos 2x}$$

имеет единственное решение.

5. Найдите все значения b, при которых система уравнен

$$\begin{cases} (x^2+1)b = y + \cos 2x, \\ 2^{|\sin x|} + |y| = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Найдите все значения b, при которых уравнение

$$b^2x^2 - b\operatorname{tg}(\cos x) + 1 = 0$$

имеет единственное решение.

7. Найдите все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} a + \sin bx \leqslant 1, \\ x^2 + ax + 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

8. При каких значениях b система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = b \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

9. При каких значениях b система уравнений

$$\begin{cases} 4y = 4b + 3 - x^2 + 2x, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases}$$

имеет два действительных решения?

10. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left| \frac{x(2^x - 1)}{2^x + 1} + 2a \right| = a^2 + 1$$

имеет нечётное число решений.

11. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}\,y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3}\,x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения?

12. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

13. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x - 5 = a - 2y + y^2, \\ x^2 + (2 - a - a^2)y^2 = 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

14. При каких значениях a и b система

$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg} y}{x^2+1} \cdot \dfrac{x^y - 1}{x^y + 1} = a, \\ (y^2 - 1)^2 + b = x \end{cases}$$

имеет ровно пять различных решений?

15. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{8}{\pi}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{x}{4}\right)\log_{\sqrt{17}+4}(x+4+\sqrt{x^2+8x+17}) = \\ = a^2 - a\sin\left(\pi\cdot\frac{x^2+8x-64}{32}\right) - 2$$

имеет единственное решение, и определите это решение.

16. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (3\sqrt{x|x|}+|y|-3)(|x|+3|y|-9)=0, \\ (x-a)^2+y^2=25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

17. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\sqrt[4]{x^2-6ax+10a^2}+\sqrt[4]{3+6ax-x^2-10a^2} \geqslant \\ \geqslant \sqrt[4]{\sqrt{3}a+24-\frac{3}{\sqrt{2}}+|y-\sqrt{2}a^2|+|y-\sqrt{3}a|}$$

имеет единственное решение.

§ 9
Задачи с использованием симметрий

Этот параграф, по существу, является продолжением предыдущего.

I. В предыдущем параграфе была рассмотрена симметрия относительно прямой $x=0$ (понятие четной функции). Сейчас мы рассмотрим симметрии в более общей ситуации, в частности, рассмотрим симметрии относительно прямых $x=b$, где b — некоторое заданное число.

В задачах такого рода удобно делать замену $z=x-b$. При наличии симметрии относительно прямой $x=b$, где b — некоторое заданное число, функция $f(z)=f(x-b)$ будет четной относительно новой переменной: $f(-z)=f(z)$.

II. При решении, например, уравнения вида $f(x,y)=0$ может оказаться полезной симметрия, задаваемая справедливым для всех допустимых значений x, y равенством $f(x,y)=f(y,x)$. Тогда вместе с решением $(x_0; y_0)$ этого уравнения его решением будет также пара $(y_0; x_0)$. Для единственности решения в этом случае необходимо выполнение равенства $x=y$.

Пример 9.1. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2+2a, \\ x \geqslant y^2+2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы, тогда ввиду симметрии $(y_0; x_0)$ тоже будет решением. Следовательно, необходимым условием является равенство $x=y$. Подставив в систему, получаем

$$x^2-x+2a \leqslant 0.$$

Если данное неравенство имеет два или более решения, то исходная система имеет не менее двух решений и нам этот случай не подходит. Если неравенство не имеет решений, то исходная система имеет либо четное число решений, либо бесконечное число решений, либо не имеет решений, но все эти случаи нам не подходят. Пусть это неравенство имеет единственое решение, тогда дискриминант квадратного уравнения обращается в ноль, т. е.

$$D=1-8a=0 \iff a=\frac{1}{8},$$

и $x=y=\frac{1}{2}$. Проверим достаточность данного условия. Складывая два неравенства, получаем

$$x+y\geqslant x^2+y^2+\frac{1}{2} \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0.$$

Следовательно, решение $x=y=\frac{1}{2}$ действительно единственное.

Ответ: при $a=\frac{1}{8}$ система неравенств имеет единственное решение $x=y=\frac{1}{2}$.

Пример 9.2. Найдите все рациональные значения a, при которых уравнение

$$\frac{2(1-2a)}{\pi}\left(\arcsin\frac{2x}{x^2+1}\right)+a^2\left(\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^2+a^2+3a-3=0$$

имеет единственное решение.

Решение. Введём обозначение

$$f(x)=\frac{2(1-2a)}{\pi}\left(\arcsin\frac{2x}{x^2+1}\right)+a^2\left(\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^2.$$

I. Для функции $f(x)$ выполняется равенство $f(x)=f(1/x)$, поэтому если x_0 — решение уравнения, то и $1/x_0$ тоже является корнем исходного уравнения. Следовательно, нечётное число решений (единственное в нашем случае) возможно лишь при условии

$$x_0=\frac{1}{x_0} \iff x_0^2=1 \iff x_0=\pm 1.$$

Подставив $x=1$ в исходное уравнение, получаем

$$a^2+a-2=0 \iff a_1=1;\ a_2=-2.$$

Подставив $x=-1$ в исходное уравнение, получаем

$$a^2+5a-4=0 \iff a_3=(-5+\sqrt{41})/2;\ a_4=(-5-\sqrt{41})/2.$$

Значения $a_{3,4}$ иррациональные, поэтому не удовлетворяют условию задачи. Рассмотрим $a_{1,2}$.

II. Выясним, при каком из найденных значениях a уравнение имеет единственное решение. Пусть $a=1$, тогда уравнение принимает вид

$$-\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\frac{2x}{x^2+1}\right)+\left(\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^2+1=0 \iff$$

$$\iff \left(\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^2+1=\frac{2}{\pi}\left(\arcsin\frac{2x}{x^2+1}\right).$$

Из неравенства $\dfrac{2|x|}{x^2+1} \leqslant 1$ вытекает, что

$$1 \leqslant \left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\frac{2x}{x^2+1}\right) \leqslant 1.$$

Следовательно, для того, чтобы оно выполнялась, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} = 0, \\ \dfrac{2}{\pi}\left(\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}\right) = 1 \end{cases} \iff x = 1.$$

Таким образом, при $a=1$ у исходного уравнения решение единственно.

Пусть $a=-2$, тогда функция $f(x)$ принимает вид

$$f(x) = \frac{10}{\pi}\left(\arcsin\frac{2x}{x^2+1}\right) + 4\cdot\left(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^2,$$

а исходное уравнение принимает вид $f(x)=5$. Справедливо $f(-2) = -5 < 5$. Далее, если x стремится к нулю, оставаясь больше нуля, то $\operatorname{arctg} x$ стремится к 0, $\operatorname{arctg}(1/x)$ — к числу $\pi/2$, $\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$ стремится к 0. Поэтому $f(x)$ при этом стремится к π^2, а $\pi^2 > 5$.

Следовательно, так как функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(-2; 0)$ и принимает значения как большие, так и меньшие, чем 5, то существует число $x_0 \in (-2; 0)$ такое, что $f(x_0) = 5$, откуда вытекает, что исходное уравнение при $a=-2$ имеет не менее двух решений $x=1$, $x=x_0$. (При более детальном рассмотрении этого уравнения можно показать, что оно при $a=-2$ будет иметь ровно пять решений.)

Ответ: при $a=1$ система имеет единственное решение $x=1$.

Пример 9.3. При каких значениях a уравнение

$$|x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = a$$

имеет ровно три решения?

Решение. Введем обозначение

$$f(x) = |x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right|.$$

I. Справедливо следующее равенство:

$$\frac{\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)+1}{3\cdot\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)-1}=\frac{(x+1)+(3x-1)}{3(x+1)-(3x-1)}=\frac{4x}{4}=x.$$

Из него следует, что если x_0 — решение уравнения, то и $x_1=\frac{x_0+1}{3x_0-1}$ тоже является корнем исходного уравнения, так как $f(x_0)=f(x_1)$, откуда следует, что нечетное число решений возможно лишь при условии

$$x_0=\frac{x_0+1}{3x_0-1} \iff 3x_0^2-2x_0-1=0 \iff x_0=1,\ x_0=-\frac{1}{3},$$

т. е. когда корни x_0 и x_1 совпадают. Найдем те значения a, которые соответствуют значениям $x_0=1$ и $x_0=-\frac{1}{3}$:

$$a_1=f(1)=2, \quad a_2=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

II. Проверим, что при найденных значениях a уравнение имеет ровно три решения. Пусть $a=2$. Решим уравнение $f(x)=2$. Для этого рассмотрим четыре промежутка $(-\infty;-1)\cup[-1;0]\cup\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$, и решим уравнение $f(x)=2$ на каждом из них (рис. 39).

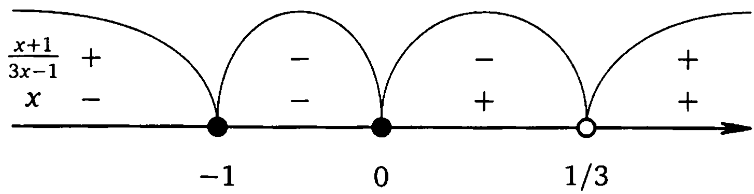

Рис. 39

а. Пусть $x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. Тогда уравнение $f(x)=2$ принимает вид

$$x+\frac{x+1}{3x-1}=2 \iff 3x^2-x+x+1=2(3x-1) \iff$$
$$\iff x^2-2x+1=0 \iff x=1.$$

b. Пусть $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$. Тогда уравнение $f(x) = 2$ принимает вид

$$x - \frac{x+1}{3x-1} = 2 \iff 3x^2 - x - x - 1 = 2(3x-1) \iff$$

$$\iff 3x^2 - 8x + 1 = 0 \iff x = \frac{4 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

Интервалу $\left(0; \frac{1}{3}\right)$ принадлежит лишь один корень $x = \frac{4-\sqrt{13}}{3}$. Таким образом, мы нашли второй корень уравнения $f(x) = 2$.

c. Пусть $x \in [-1; 0]$. Тогда уравнение $f(x) = 2$ принимает вид

$$-x - \frac{x+1}{3x-1} = 2 \iff 3x^2 - x + x + 1 = -2(3x-1) \iff$$

$$\iff 3x^2 + 6x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Но так как $\frac{2\sqrt{3}}{3} > 1$, ни одно из чисел $-1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$ не принадлежит отрезку $[-1; 0]$.

d. Пусть $x \in (-\infty; -1)$. Тогда уравнение $f(x) = 2$ принимает вид

$$-x + \frac{x+1}{3x-1} = 2 \iff -3x^2 + x + x + 1 = 2(3x-1) \iff$$

$$\iff 3x^2 + 4x - 3 = 0 \iff x = \frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}.$$

Лучу $(-\infty; -1)$ принадлежит лишь один корень $x = \frac{-2-\sqrt{13}}{3}$. Таким образом, мы нашли третий корень уравнения $f(x) = 2$.

Итак, для $a = 2$ мы проверили, что решений действительно ровно три. Аналогично доказывается, что в случае $a = \frac{2}{3}$ у уравнения

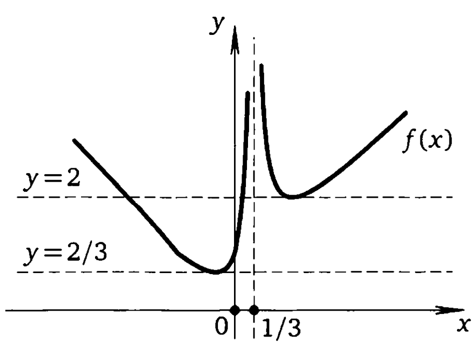

Рис. 40

$f(x) = 2$ будет одно решение (рис. 40). Следовательно, в ответ попадет только одно значение $a = 2$.

Ответ: $a = 2$.

Пример 9.4. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} z\cos(x-y) + (2+xy)\sin(x+y) - z = 0, \\ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x + y + a\sin^2 z)((1-a)\ln(1-xy) + 1) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. I. Заметим, что если $(x; y; z)$ — решение системы, то и $(y; x; z)$ — тоже решение этой системы. Для единственности решения необходимо, чтобы $x = y$. В этом случае система принимает вид

$$\begin{cases} (2+x^2)\sin 2x = 0, \\ 2(x-1)^2 + z^2 = a + 1, \\ (2x + a\sin^2 z)((1-a)\ln(1-x^2) + 1) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $x = \pi n/2$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как третье уравнение содержит функцию $\ln(1-x^2)$, выполняется неравенство $x^2 < 1$, откуда $n = 0$ и $x = y = 0$. Система принимает вид

$$\begin{cases} z^2 = a - 1, \\ a\sin^2 z = 0. \end{cases}$$

Для любого её решения $(z; a)$ пара $(-z; a)$ — тоже решение этой системы. Поэтому для единственности необходимо, чтобы и $z = 0$. Таким образом, если система имеет единственное решение, то оно имеет вид $(0; 0; 0)$ и при этом $a = 1$. Остаётся показать, что при $a = 1$ система действительно имеет единственное решение.

II. Пусть $a = 1$. Система принимает вид

$$\begin{cases} z\cos(x-y) + (2+xy)\sin(x+y) - z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y), \\ x + y + \sin^2 z = 0. \end{cases}$$

Сложим второе уравнение с удвоенным последним. Получаем $x^2 + y^2 + z^2 + 2\sin^2 z = 0$, откуда $x = y = z = 0$. Следовательно, мы доказали, что при $a = 1$ решение $(0; 0; 0)$ — единственно.

Ответ: $a = 1$.

Тренировочные задачи к § 9

1. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

2. Найдите все значения α, при которых уравнение

$$x^2+\frac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{9\sqrt{3}}{\cos\alpha}+36=0$$

имеет единственное решение.

3. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$2\pi^2(x-2)^2+4a\cos(2\pi x)-25a^3=0$$

имеет единственное решение.

4. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$2^{-x^2}\cdot 4^x+\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)-2=a^3-3a^2+a+\sqrt{2}$$

имеет единственное решение.

5. Найдите все значения b, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} by^2+4by-2x+7b+4\leqslant 0, \\ bx^2-2y-2bx+4b-2\leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Найдите все значения b, при каждом из которых система

$$\begin{cases} b\sin|2z|+\log_5(x\sqrt[8]{2-5x^8})+b^2=0, \\ ((y^2-1)\cos^2 z-y\cdot\sin 2z+1)(1+\sqrt{\pi+2z}+\sqrt{\pi-2z})=0 \end{cases}$$

разрешима и имеет не более двух решений; определите эти решения.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 1-\sqrt{|x-1|}=\sqrt{7|y|}, \\ 49y^2+x^2+4a=2x-1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

8. Найдите все значения b, при каждом из которых уравнение

$$b^2 \sin\left(\frac{\pi+2}{2}-x\right)+\sin^2\left(\frac{2x}{b+1}-\frac{2}{b+1}\right)-b\sqrt{4x^2+8-8x}=$$
$$=3+\arcsin|1-x|$$

имеет единственное решение.

9. При каких значениях a уравнение

$$|x|+\left|\frac{2x-1}{3x-2}\right|=a$$

имеет ровно три решения?

10. Найдите все значения b, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant (x-b)^2, \\ x \geqslant (y-b)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

11. Найдите все значения a, при каждом из которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} x+2y=2-a, \\ -x+ay=a-2a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2-y^4-4x+3=0, \\ 2x^2+y^2+(a^2+2a-11)x+12-6a=0. \end{cases}$$

12. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}}+a\cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right)+a^2-\frac{5}{4}=0$$

имеет единственное решение.

13. Найдите все значения a такие, что уравнение

$$a^3\left(\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^2=4a+5-a^2-\frac{2(a+1)}{\pi}\left(\arcsin\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

имеет единственное решение.

14. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2(a+2)=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2, \\ (xy+4)\sin(x+y)+\cos(x-y)=1, \\ \left(2-\dfrac{xyz(a-2)}{\sqrt{1-2xy}}\right)(a\operatorname{tg}^2 z+x+y)=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

15. Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\frac{1}{6}; 6\right]$ и удовлетворяет на этом множестве системе

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 f(x) - \frac{1}{2}} - 12\cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{10}{x}, \\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решите неравенство $f(x) \leqslant \frac{\pi}{8}$.

§ 10
Задачи с применением некоторых неравенств

Полезно знать следующие неравенства:

неравенство	случай равенства
$(x-y)^2 \geqslant 0$	$x=y$;
$x^2+y^2 \geqslant 2xy$	$x=y$;
$x+y \geqslant 2\sqrt{xy}, \quad x, y \geqslant 0$	$x=y$;
$x+\dfrac{y^2}{x} \geqslant 2y, \quad x>0$	$x=y$;
$x+\dfrac{y^2}{x} \leqslant 2y, \quad x<0$	$x=y$;
$\dfrac{2xy}{x^2+y^2} \leqslant 1,$	$x=y$;
$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2},$	$x=y$;
$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz, \quad x, y, z>0$	$x=y=z$;
$\lvert x\rvert+\lvert 1-x\rvert \geqslant 1$	$x\in[0; 1]$.

Покажем, как пользоваться этой таблицей. Например, неравенство $x^2+y^2 \geqslant 2xy$ справедливо для всех возможных значений x, y. Равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=y$. Если x и y таковы, что $x \neq y$, то справедливо строгое неравенство $x^2+y^2>2xy$.

Доказательства.

I. Неравенства со второго по шестое вытекают из первого неравенства, справедливость которого очевидна.

II. Доказательство неравенства

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 3xyz, \quad x, y, z>0,$$

основано на представлении

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=\frac{1}{2}\cdot(x+y+z)\cdot((x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2),$$

причем, как видно из этого представления, знак равенства в исходном неравенстве может достигаться лишь в случае $x=y=z$.

III. Докажем неравенство $\lvert x\rvert+\lvert 1-x\rvert \geqslant 1$, в котором равенство достигается лишь для $x\in[0; 1]$. Рассмотрим функцию $f(x)=\lvert x\rvert+\lvert 1-x\rvert$.

Для $f(x)$ справедливо представление

$$f(x)=\begin{cases}1-2x, & x\in(-\infty;0),\\ 1, & x\in[0;1],\\ 2x-1, & x\in(1;+\infty).\end{cases}$$

На промежутке $(-\infty;0)$ функция $f(x)$ (рис. 41) монотонно убывает, следовательно, $f(x)>f(0)=1$ для $x\in(-\infty;0)$, на промежутке $(0;+\infty)$ функция $f(x)$ монотонно возрастает, следовательно, $f(x)>f(1)=1$ для $x\in(0;+\infty)$.

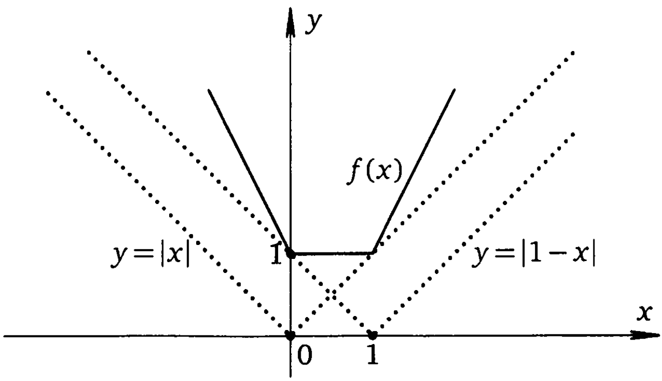

Рис. 41. График функции $f(x)=|x|+|1-x|$.

Пример 10.1. При каких значениях y уравнение

$$\frac{25}{\sqrt{x-1}}+\frac{4}{\sqrt{y-2}}=14-\sqrt{x-1}-\sqrt{y-2}$$

имеет решения?

Решение. Запишем исходное уравнение в виде

$$\left(\sqrt{x-1}+\frac{25}{\sqrt{x-1}}\right)+\left(\sqrt{y-2}+\frac{4}{\sqrt{y-2}}\right)=14.$$

Заметим, что из неравенства $t+\frac{y^2}{t}\geqslant 2\cdot t$, $t>0$, вытекают неравенства

$$\sqrt{x-1}+\frac{25}{\sqrt{x-1}}\geqslant 2\cdot 5=10,\qquad \sqrt{y-2}+\frac{4}{\sqrt{y-2}}\geqslant 2\cdot 2=4,$$

следовательно,

$$\left(\sqrt{x-1}+\frac{25}{\sqrt{x-1}}\right)+\left(\sqrt{y-2}+\frac{4}{\sqrt{y-2}}\right)\geqslant 14.$$

Если сумма двух слагаемых, первое из которых не меньше 10, а второе не меньше 4, равна 14, то первое слагаемое равно 10, а второе 4. Воспользуемся строкой 4 таблицы. Поскольку знак равенства в неравенстве вида $t+\frac{y^2}{t} \geqslant 2\cdot t$, $t>0$, достигается только лишь в случае $t=y$, исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}=5, \\ \sqrt{y-2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=26, \\ y=6. \end{cases}$$

Ответ: $y=6$.

Пример 10.2. При каких значениях a система

$$\begin{cases} |x-a|+|y-a|+|a+1-x|+|a+1-y|=2, \\ y+2|x-5|=6 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Произведя перегруппировку и используя неравенство $|t|+|1-t|\geqslant 1$, мы можем заключить, что для левой части в первом уравнении системы справедливо неравенство

$$|x-a|+|y-a|+|a+1-x|+|a+1-y|=$$
$$=(|x-a|+|1-(x-a)|)+(|y-a|+|1-(y-a)|)\geqslant 2.$$

Но так как по условию задачи эта сумма равна 2, из строки 9 таблицы следует, что каждое из слагаемых в скобках равно 1, поскольку знак равенства достигается лишь для $t\in[0;1]$. Поэтому исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} |x-a|+|1-(x-a)|=1, \\ |y-a|+|1-(y-a)|=1, \\ y+2|x-5|=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leqslant x-a\leqslant 1, \\ 0\leqslant y-a\leqslant 1, \\ y+2|x-5|=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\leqslant x\leqslant 1+a, \\ a\leqslant y\leqslant 1+a, \\ y+2|x-5|=6. \end{cases}$$

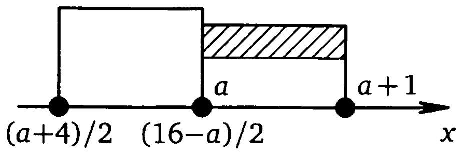

Рис. 42

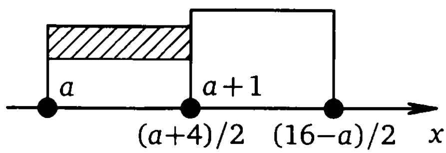

Рис. 43

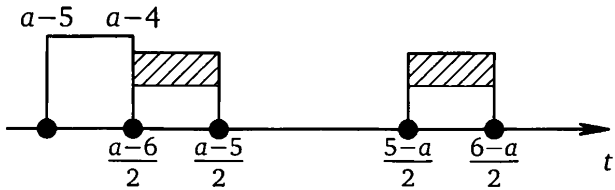

Рис. 44

Поскольку $y=6-2|x-5|$, система имеет единственное решение, если является единственным решение x системы

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant 1+a, \\ a \leqslant 6-2|x-5| \leqslant 1+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant x \leqslant 1+a, \\ 5-a \leqslant 2|x-5| \leqslant 6-a. \end{cases}$$

Рассмотрим следующие случаи.

I. Пусть $a>6$. Тогда решений нет.

II. Пусть $a \in [5; 6]$. Тогда система равносильна следующей:

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant 1+a, \\ \dfrac{a-6}{2} \leqslant x-5 \leqslant \dfrac{6-a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant x \leqslant 1+a, \\ \dfrac{a+4}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{16-a}{2}. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение (рис. 42—43), если $a=\frac{16-a}{2}$, т. е. $a=\frac{16}{3} \in [5; 6]$, либо если $1+a=\frac{a+4}{2}$, т. е. $a=2 \notin [5; 6]$. Следовательно, $a=\frac{16}{3}$ является решением исходной системы, а $a=2$ нет.

III. Пусть $a < 5$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} a-5 \leqslant x-5 \leqslant a-4, \\ \frac{5-a}{2} \leqslant |x-5| \leqslant \frac{6-a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-5 \leqslant t \leqslant a-4, \\ \frac{5-a}{2} \leqslant |t| \leqslant \frac{6-a}{2}. \end{cases}$$

Так как $a-5 < \frac{a-5}{2}$, последняя система имеет единственное решение только в случае (рис. 44) $a-4 = \frac{a-6}{2}$, т. е. $a=2$. Поскольку $a=2$ удовлетворяет условию $a<5$, мы получаем, что при $a=2$ исходная система имеет единственное решение.

Ответ: $a=2$, $a=\frac{16}{3}$.

Тренировочные задачи к § 10

1. При каких действительных p уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет решение?

2. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+5x+5} \geqslant 2, \\ x^2 + 6x + 5 \leqslant 0. \end{cases}$$

3. Найдите наибольшее значение функции

$$\frac{10^x}{25^{x-1} + 10^x + 4^{x+1}}.$$

4. При каждом значении c решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{9}{\sqrt{x+c}} + \dfrac{16}{\sqrt{y-c}} \leqslant 22 - \sqrt{x+c} - 4\sqrt{y-c}, \\ 2^{x-11} \log_2(4-y) = 1. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2(5x + \sin^2 y) + \left| \frac{5x + \cos 2y}{3} + \frac{3}{5x + \cos 2y} \right| = 4\cos^2 \frac{7\pi}{4}.$$

6. Для каждого значения a решите систему

$$\begin{cases} 4\log_4^2 x + 9\log_8^2 y \leqslant 4(a^2 + a), \\ \log_2^2 xy \geqslant 8(a^2 + a). \end{cases}$$

7. Найдите наибольшее значение a, при котором неравенство

$$a\sqrt{a}(x^2 - 2x + 1) + \frac{\sqrt{a}}{x^2 - 2x + 1} \leqslant \sqrt[4]{a^3} \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right|$$

имеет хотя бы одно решение.

8. Найдите все пары чисел $(x; y)$, которые удовлетвояют уравнению

$$\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y).$$

9. Докажите, что все решения неравенства

$$\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x^2-1}>2$$

удовлетворяют неравенству

$$x+2\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x^4-2x^2+1}>1+2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

10. При каких значениях a система

$$\begin{cases} |x+a|+|y-a|+|a+1+x|+|a+1-y|=2, \\ y=2|x-4|-5 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

11. Найдите все пары чисел $(x; y)$, которые удовлетвояют уравнению

$$\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2+\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2=12+\frac{\sin y}{2}.$$

12. Решите уравнение

$$2^{2^{\sin^2 x}}+2^{2^{(\cos 2x)/2}}=2^{1+\sqrt[4]{2}}.$$

13. Найдите все пары чисел x и y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+y-1}+3\cdot 4^{2y-1}\leqslant 2, \\ x+3y\geqslant 2-\log_4 3. \end{cases}$$

14. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения x^2+ $+2y^2$, если

$$x^2-xy+2y^2=1.$$

15. Найдите все значения b, при каждом из которых неравенство

$$(3-2\sqrt{2})^x+(b^4+12-6b^2)\cdot(3+2\sqrt{2})^x+9^t+\frac{b^2}{4}+b\cdot 3^t-\sqrt{12}\leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение (t, x).

16. При каждом значении $a\geqslant\dfrac{1}{2\pi}$ найдите все корни уравнения

$$\cos\left(\frac{2x+a}{2x^2+2ax+\frac{5}{2}a^2}\right)=\cos\left(\frac{2x-a}{2x^2-2ax+\frac{5}{2}a^2}\right).$$

17. Найдите наибольшее значение ω, при котором система

$$\begin{cases} 4\sin^2 y - \omega = 16\sin^2 \frac{2x}{7} + 9\operatorname{ctg}^2 \frac{2x}{7}, \\ (\pi^2\cos^2 3x - 2\pi^2 - 72)y^2 = 2\pi^2(1+y^2)\sin 3x. \end{cases}$$

имеет решение.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенств

$$4^x + 4^{-x} + 8|2^x + 2^{-x} - a| + 11a < 26 + 2a(2^x + 2^{-x})$$

имеет хотя бы одно решение.

§ 11
Использование экстремальных значений функций

В задачах этого параграфа используются неравенства из предыдущего параграфа вместе с удачной группировкой или заменой переменных. Но в основе их решения лежит следующее утверждение.

Пусть требуется решить уравнение

$$f(x)=g(x) \tag{11.1}$$

и для функций $f(x)$ и $g(x)$ для всех x выполняются неравенства $f(x)\geqslant A$, $g(x)\leqslant A$. Тогда уравнение (11.1) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A. \end{cases}$$

Таким образом, нужно найти такие значения переменной x, в которых одновременно функция $f(x)$ достигает своего минимального значения A, а функция $g(x)$ — своего максимального значения A.

Пример 11.1. При каких значениях a уравнение

$$3^{x^2+2ax+4a-3}-2=\left|\frac{a-2}{x+a}\right|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке $[-4;0]$?

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$3^{x^2+2ax+4a-3}-2=\left|\frac{a-2}{x+a}\right| \iff 3^{(x+a)^2-(a-2)^2+1}-2=\left|\frac{a-2}{x+a}\right| \iff$$
$$\iff 3^{(t^2-1)(a-2)^2+1}-2=\frac{1}{|t|},$$

где $t=\dfrac{x+a}{a-2}$, $a\neq 2$. При $a=2$ исходное уравнение принимает вид $3^{(x+2)^2+1}=2$, а это уравнение решений не имеет, так как левая часть строго больше 2.

Таким образом, мы решаем уравнение

$$3^{(t^2-1)(a-2)^2+1}-2=\frac{1}{|t|}$$

при $t=\dfrac{x+a}{a-2}$, $a\neq 2$. Разберем три случая (рис. 45).

I. Если $|t|>1$, то решений нет, так как

$$1>\frac{1}{|t|}=3^{(t^2-1)(a-2)^2+1}-2>3-2=1.$$

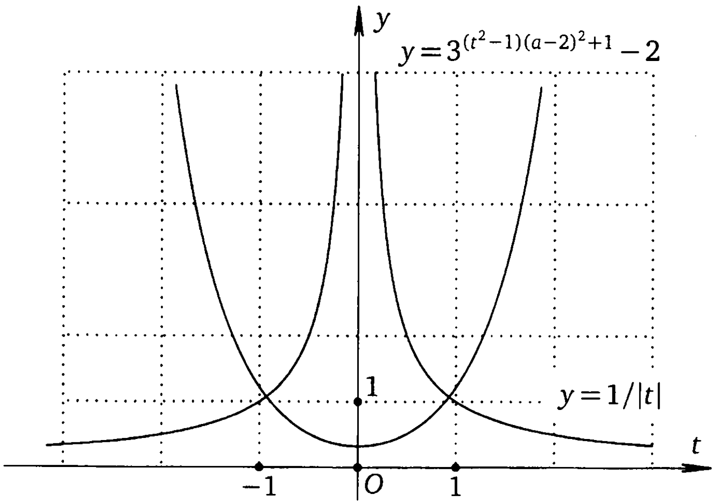

Рис. 45

II. Если $|t| < 1$, то снова решений нет, так как

$$1 < \frac{1}{|t|} = 3^{(t^2-1)(a-2)^2+1} - 2 < 3 - 2 = 1.$$

III. Значения $t = \pm 1$, очевидно, являются корнями уравнения.

Итак, случай $t = 1$ дает решение $x = -2$, которое принадлежит отрезку $[-4; 0]$ при любых a.

Случай $t = -1$ дает решение $x = 2 - 2a$. Найдем условие на a, при котором решение $x = 2 - 2a$ принадлежит отрезку $[-4; 0]$:

$$-4 \leqslant 2 - 2a \leqslant 0 \iff -6 \leqslant -2a \leqslant -2 \iff 1 \leqslant a \leqslant 3.$$

Ответ: $a \in [1; 2) \cup (2; 3]$.

Пример 11.2. Решите уравнение

$$2 + \log_2^2(2 + |(x-2)(x-3)|) = 3^{(5+4x-x^2)/9}.$$

Решение. Исследуем функцию $h(x) = 5 + 4x - x^2$. Выделив полный квадрат, получаем $h(x) = 9 - (x-2)^2 \leqslant 9$. Поэтому

$$g(x) = 3^{(5+4x-x^2)/9} = 3^{h(x)/9} \leqslant 3.$$

С другой стороны,

$$f(x) = 2 + \log_2^2(2 + |(x-2)(x-3)|) \geqslant 2 + \log_2^2 2 = 3.$$

Следовательно,

$$3 \leqslant 2+\log_2^2(2+|(x-2)(x-3)|)=3^{(5+4x-x^2)/9} \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad \min f(x)=\max g(x)$$

т. е. минимум функции $f(x)$ совпадает с максимумом функции $g(x)$. Следовательно, исходная задача равносильна системе

$$\begin{cases} f(x)=3, \\ g(x)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=3, \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2.$$

Ответ: $x=2$.

Пример 11.3. При каких значениях p уравнение

$$5\cos 2x+\frac{2p}{\sin x}=-29$$

имеет решения?

Решение. ОДЗ данного уравнения определяется из неравенства $\sin x \neq 0$. Домножим на $\sin x$ исходное уравнение:

$$5(1-2\sin^2 x)\sin x+2p=-29\sin x \quad \Leftrightarrow \quad p=5\sin^3 x-17\sin x.$$

Последнее уравнение будет иметь решения тогда и только тогда, когда p будет принимать значения из области значений функции $5\sin^3 x-17\sin x$. Введем новую переменную $t=\sin x$; на ОДЗ переменная t принимает значения $t\in[-1;0)\cup(0;1]$.

Найдем область значений функции $f(t)=5t^3-17t$ для $t\in[-1;0)\cup \cup(0;1]$. Заметим, что она нечетная. Действительно, $f(-t)=-f(t)$. Следовательно, достаточно найти область значений для переменной $t\in(0;1]$. Докажем, что на данном участке функция $f(t)$ строго монотонна. Рассмотрим производную данной функции $f'(t)=15t^2-17$. На множестве $t\in(0;1]$ справедливо неравенство $f'(t)<0$, т. е. функция монотонно убывает. Так как функция $f(t)$ является и монотонной, и непрерывной, на интервале $(0;1)$ она принимает все промежуточные значения от минимального $f(1)=-12$ до максимального $f(0)=0$. Следовательно, множество значений функции $f(t)$ на $t\in(0;1]$ равно $[-12;0)$, а учитывая нечетность функции $f(t)$, заключаем, что ее множество значений на $[-1;0)\cup(0;1]$ равно $[-12;0)]\cup \cup(0;12]$.

Ответ: $p\in[-12;0)\cup(0;12]$.

Тренировочные задачи к § 11

1. Решите уравнение

$$2(1+\sin^2(x-1)) = 2^{2x-x^2}.$$

2. Найдите все значения p, при которых уравнение $6\sin^3 x = p - 5\cos 2x$ не имеет корней.

3. Решите неравенство при условии $1 \leqslant x \leqslant 3$

$$(x^2-4x+3)\log_{1/\sqrt{2}}\left(\cos^2 \pi x + \cos x + 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \geqslant 2.$$

4. Для каждого значения a решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(|a|x^2-3x+4)}{\log_2(-3x+4)} = 5^{-|x|(x+1)^2}, \\ x \leqslant 1. \end{cases}$$

5. При каких значениях q разрешима система

$$\begin{cases} x^2+qx+3=0, \\ \sin^2 q\pi + \cos^2 \dfrac{\pi}{2}x + 2^{y^2} = \sin\dfrac{\pi}{2}x? \end{cases}$$

Найдите ее решения.

6. Найдите все значения p, при каждом из которых существует единственная пара чисел $(x; y)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2+2px+3p^2+3p+3 \leqslant 3\sin y - 4\cos y, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

7. Для каждого значения a, удовлетворяющего неравенствам $0 < a < 2$, найдите наименьшее значение выражения

$$x^2+y^2-2a(x+y)$$

при условии $\cos\left(\dfrac{\pi xy}{2}\right) = 1$.

8. Найдите все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условию

$$\sqrt{2-|y|}\cdot(5\sin^2 x - 6\sin x\cdot\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) = (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \frac{5\pi^2}{4}.$$

9. Решите уравнение

$$4\arcsin(2^x-7)-\arccos(5^x-124)=\frac{6\pi}{x}.$$

10. Найдите все значения b, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(\log_b f(x)-1)^2+(y^2-5\cdot 10^3\cdot y+2b)^2=0,\\ z^2-(b-2\cdot 10^6)\cdot z+25\cdot 10^{10}=0\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, где

$$f(x)=|x|+|x-1^2|+|x-2^2|+\ldots+|x-104^2|.$$

11. При каких значениях a уравнение

$$|2a-1|\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4ax+4a-2}-1\right)=|x+2a|$$

имеет ровно два корня, лежащих на отрезке $[-2;1]$?

12. Найдите все числа a, удовлетворяющие условию $-1<a<1$, для которых выражение

$$1+2\sqrt{x^2-2axy+y^2-6y+10}$$

принимает наименьшее значение лишь при одной паре чисел $(x;y)$.

13. Найдите все значения α из отрезка $[0;2\pi]$, при которых система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2z(x+y+z)-\sin\alpha=0,\\ (x+1)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+y^2\sqrt{x}+\alpha^2\sqrt{z}+\sin\left(\frac{3\alpha}{2}\right)=0\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

§ 12
Решение задач при помощи графика

Напомним некоторые уравнения кривых и графики функций.

I.a. Начнем с общего уравнения прямой

$$ax + by + c = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0,$$

которое называется ее каноническим уравнением.

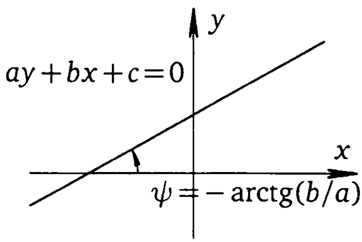

Рис. 46. График прямой $ax + by + c = 0$

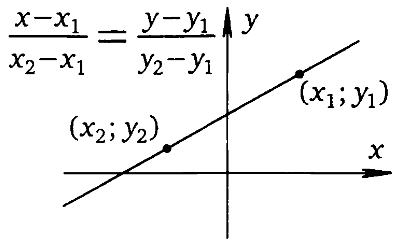

Рис. 47. Прямая, проходящая через 2 точки

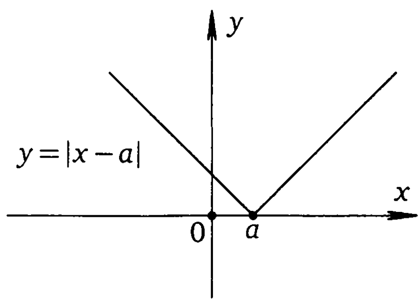

Рис. 48. График функции $f(x) = |x - a|$

I.b. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), записывается в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad x_1 \neq x_2, \quad y_1 \neq y_2.$$

В случае $x_2 = x_1$ уравнение прямой принимает вид $x = x_1$, а в случае $y_2 = y_1$ оно принимает вид $y = y_1$.

I.c. График функции $y = |x - a|$. (В общем случае для построения графика функции $y = |f(x)|$ по заданному графику функции $y = f(x)$ следует все значения функции $y = f(x)$ заменить их абсолютными

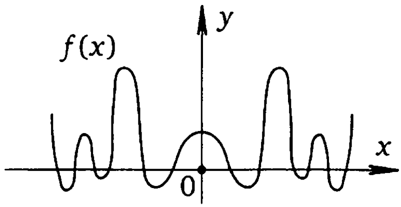

Рис. 49. График функции $f(x)$

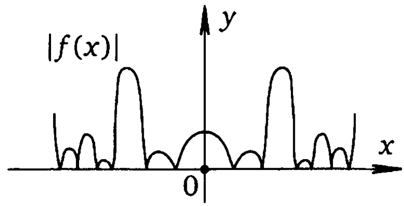

Рис. 50. График функции $|f(x)|$

величинами, для чего необходимо отрицательные значения функции $f(x)$ заменить на $-f(x)$, т.е. отразить точки графика с отрицательной ординатой симметрично относительно прямой $y=0$.)

II. Уравнение параболы (см. § 4) имеет вид

$$y=ax^2+bx+c, \quad a\neq 0,$$

III. Уравнение окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиуса R имеет вид

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

IV. Расстояние между двумя точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ на плоскости

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

V. Уравнение гиперболы $y=\frac{1}{x}$. Вертикальная асимптота $x=0$, горизонтальная асимптота $y=0$. Аналогичным образом можно построить график произвольной дробно-линейной функции $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (графиком опять будет гипербола), $a, b, c, d\in\mathbb{R}$, $c\neq 0$. Действительно, из равенства

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)},$$

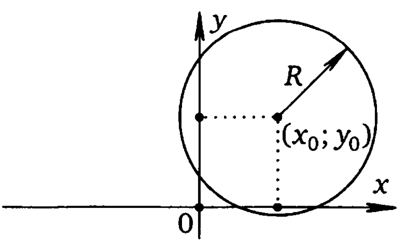

Рис. 51. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

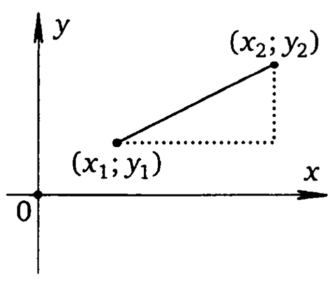

Рис. 52. Расстояние между точками

мы делаем вывод, что график дробно-линейной функции может быть получен из гиперболы $y=\dfrac{1}{x}$ сдвигами и растяжением.

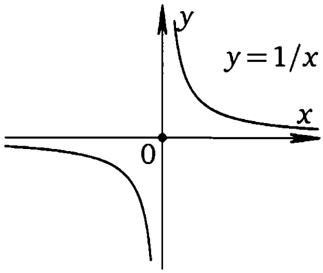

Рис. 53. График $f(x)=\dfrac{1}{x}$

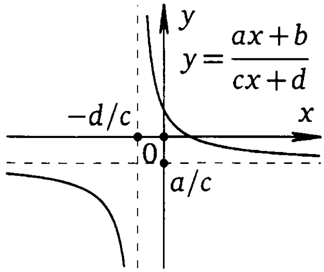

Рис. 54. График $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

VI. Углом α между кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$ (рис. 55) в точке их пересечения x_0 называется угол между их касательными в точке x_0. В частности, если угол между кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в точке их пересечения x_0 равен нулю, то касательные в точке x_0 для кривых $y=f(x)$ и $y=g(x)$ совпадают (рис. 56) и говорят, что кривые $y=f(x)$ и $y=g(x)$ касаются друг друга в точке x_0. Условие касания двух дифференцируемых кривых в точке x_0 равносильно системе двух уравнений:

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0), \\ f'(x_0)=g'(x_0). \end{cases}$$

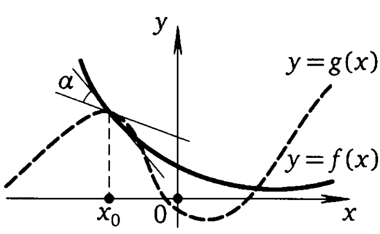

Рис. 55

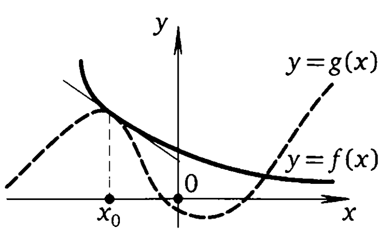

Рис. 56

Пример 12.1. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4x-\big|3x-|x+a|\big|=9|x-1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=9|x-1|-4x+\big|3x-|x+a|\big|.$$

Раскрывая модули, мы получим конечное число интервалов, на каждом из которых она является некоторой линейной функцией. Коэффициент при первом модуле превосходит по абсолютной величине сумму оставшихся коэффициентов при x, с каким бы знаком мы оставшиеся модули ни раскрывали. Действительно, $9-4-3-1=1>0$. Поэтому на всех интервалах, лежащих слева от точки $x=1$, коэффициент при x отрицателен, а на всех интервалах справа от точки $x=1$ коэффициент при x положителен. Это означает, что функция $f(x)$ убывает при $x<1$ и возрастает при $x>1$, а $x=1$ — точка минимума (рис. 57). Поэтому для того чтобы уравнение $f(x)=0$ имело

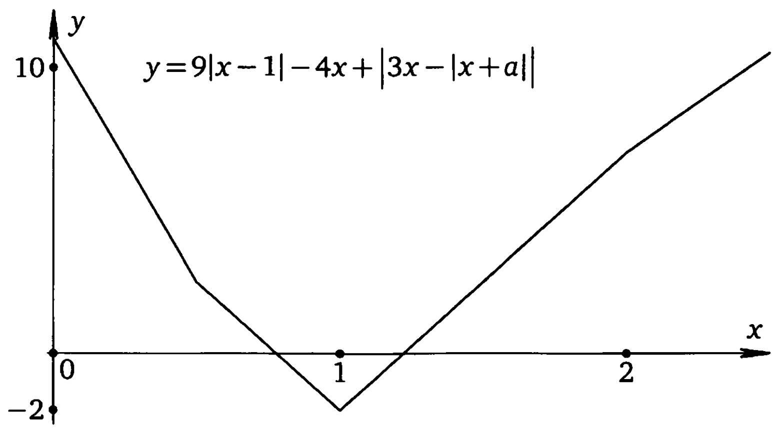

Рис. 57. Случай $a=-2$.

хотя бы один корень, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\min f(x)\leqslant 0$, т. е. $f(1)\leqslant 0$. Введем обозначение $t=|1+a|$, тогда

$$f(1)\leqslant 0 \iff \big|3-|1+a|\big|-4\leqslant 0 \iff |3-t|\leqslant 4 \iff (3-t)^2-4^2\leqslant 0 \iff$$
$$\iff (-1-t)(7-t)\leqslant 0 \iff (1+t)(t-7)\leqslant 0 \iff t\in[-1;7].$$

Теперь для a получаем неравенство $|1+a|\leqslant 7$, решая которое, приходим к ответу: $a\in[-8;6]$.

Ответ: $a\in[-8;6]$.

Пример 12.2. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(a+6x-x^2-8)(a-1+|x-3|)=0$$

имеет три решения.

Решение. Изобразим на плоскости $(x; a)$ (рис. 58) параболу, заданную уравнением $a+6x-x^2-8=0$ (равносильным уравнению $a=(x-3)^2-1$), и кривую $a=1-|x-3|$. Условию задачи удовлетворяют значения $a=\pm 1$ и только они.

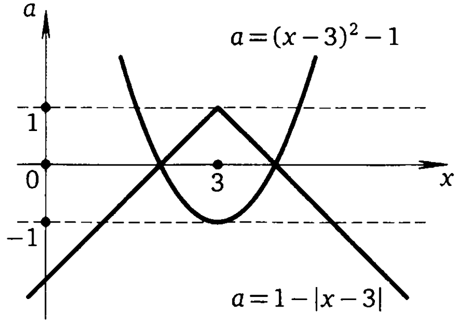

Рис. 58

Ответ: $a=\pm 1$.

Пример 12.3. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left|(2x-a)^2-|x|-28\right|+2|x|=16$$

имеет три решения.

Решение. Проведем равносильные преобразования исходного уравнения:

$$\left|(2x-a)^2-|x|-28\right|=16-2|x|;$$

отсюда

$$\left|(2x-a)^2-|x|-28\right|=16-2|x| \iff$$

$$\iff \begin{cases} 16-2|x|\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} (2x-a)^2-|x|-28=16-2|x|, \\ (2x-a)^2-|x|-28=-16+2|x| \end{array}\right. \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x\in[-8; 8], \\ \left[\begin{array}{l} (2x-a)^2=44-|x|, \\ (2x-a)^2=3|x|+12. \end{array}\right. \end{cases}$$

Изобразим графики функций $y=44-|x|$ и $y=3|x|+12$ при $|x|\leqslant 8$ на рис. 59 и найдем те параболы вида $y=(2x-a)^2$, которые удовлетворяют условию задачи. Три решения будут в случае, когда парабола будет проходить через точку пересечения графиков функций

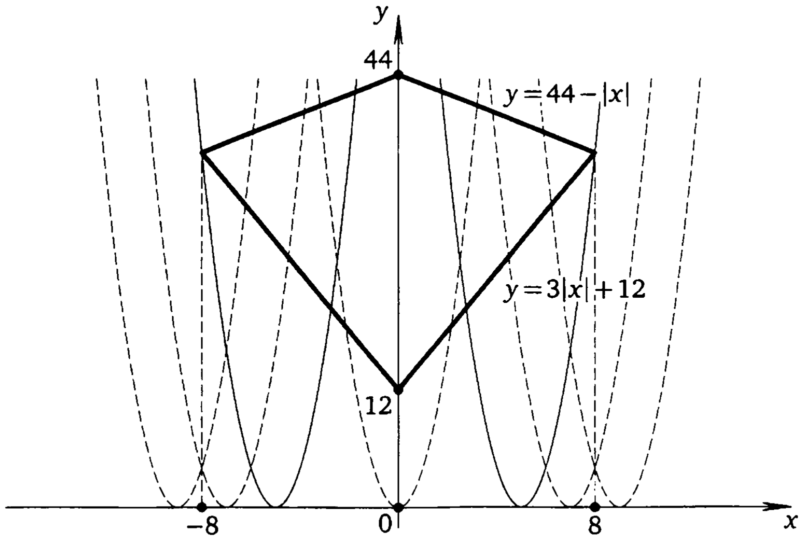

Рис. 59

$y = 44 - |x|$ и $y = 3|x| + 12$, а вершина параболы при этом будет принадлежать отрезку $[-8; 8]$.

Поскольку графики функций $y = 44 - |x|$ и $y = 3|x| + 12$ пересекаются в точках $(\pm 8; 36)$, искомые параболы удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (2\cdot(\pm 8) - a)^2 = 36, \\ a/2 \in [-8; 8] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 22; \pm 10, \\ a/2 \in [-8; 8] \end{cases} \Leftrightarrow a = \pm 10.$$

Ответ: $a = \pm 10$.

Пример 12.4. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Решение. 1) Функция $f(x)$ имеет вид

а) при $x \geqslant a^2$: $f(x) = x^2 - 10x + 2a^2 = (x-5)^2 + 2a^2 - 25$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 5$;

б) при $x \leqslant a^2$: $f(x) = x^2 - 6x - 2a^2 = (x-3)^2 - 2a^2 - 9$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x = 3$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ при различных значениях a^2 показаны на рисунках (рис. 60, 61, 62).

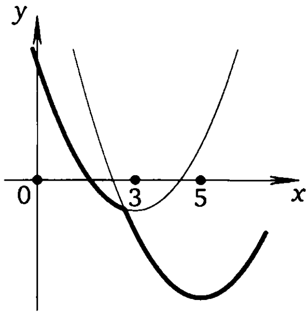

Рис. 60. $a^2 \leqslant 3$.

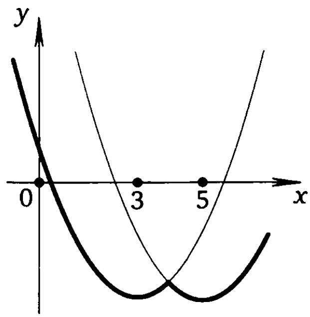

Рис. 61. $3 < a^2 < 5$.

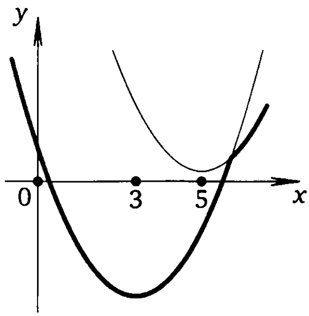

Рис. 62. $a^2 \geqslant 5$.

2) Ни одна из функций, изображенных на рис. 60, 62 не имеет точек максимума. Действительно, графики обеих функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$, причем функция, изображенная на рис. 60, убывает в окрестности этой точки, а функция, изображенная на рис. 62, возрастает.

3) Таким образом, единственной точкой максимума функции $f(x)$ является точка $x = a^2$ (рис. 61), причем тогда и только тогда, когда $3 < a^2 < 5 \iff \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}$.

Ответ: $a \in (-\sqrt{5}; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{5})$.

Пример 12.5. Найдите значения a, при которых система

$$\begin{cases} y = \big||x+3| - 1\big|, \\ x^2 + y^2 = 2cy - c^2 - 4x - \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} y = \big||x+3|-1\big|, \\ (x+2)^2 + (y-c)^2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Опишем построение графика функции $y = \big||x+3|-1\big|$. Построим график функции $y = |x+3|$ (рис. 63), далее сместим график на одну единицу вниз (рис. 64). Возьмем модуль от полученной функции: для построения графика $y = \big||x+3|-1\big|$ следует часть графика функции $y = |x+3|-1$, лежащую ниже оси Ox, отразить симметрично относительно оси Ox (рис. 65).

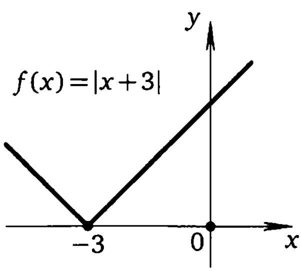

Рис. 63

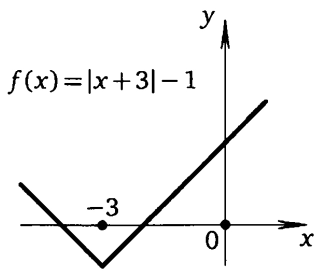

Рис. 64

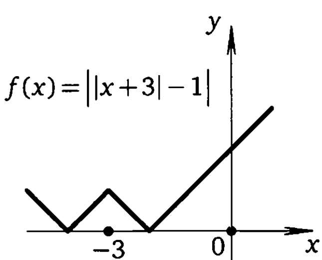

Рис. 65

Второе уравнение в системе задает окружность с центром в точке $(-2; c)$ и радиусом $1/\sqrt{2}$. На рис. 66 изображены возможные расположения кривых из примера. Замечаем, что нам подходят случаи, когда окружность касается графика $y = \big||x+3|-1\big|$ при $c = 1$ и пересекает график в двух точках при $c \in (-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$.

Ответ: $a \in (-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}) \cup \{1\}$.

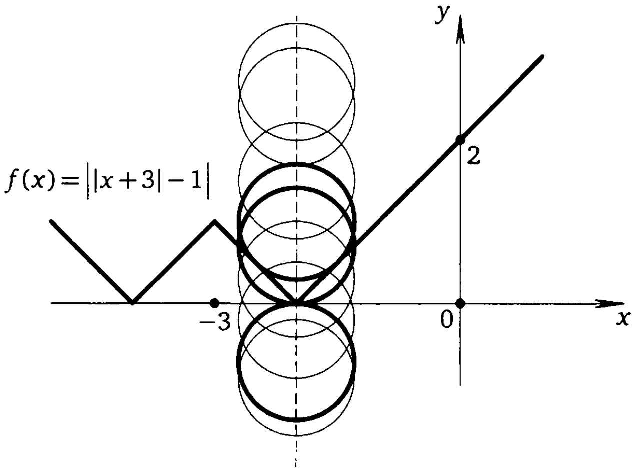

Рис. 66

Пример 12.6. Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\sqrt{5-x} \leqslant 3-|x-a|$$

является отрезок.

Решение. Изобразим графически решения неравенства $\sqrt{5-x} \leqslant$ $\leqslant 3-|x-a|$, т. е. найдем те точки x, для которых график функции $y=3-|x-a|$ («уголок») расположен над графиком функции $y=$ $=\sqrt{5-x}$ (или они пересекаются). На рис. 67 изображены возможные случаи взаимного расположения этих графиков. Если абсцисса

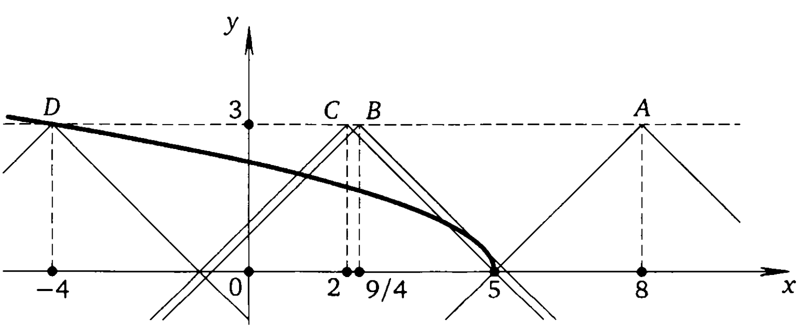

Рис. 67

вершины «уголка» расположена левее абсциссы точки D, то исходное неравенство не имеет решений. Если вершина «уголка» совпадает с точкой D, то исходное неравенство имеет единственное решение, для которого $\sqrt{5-x}=3$, т. е. $x=-4$, и, так как $|-4-a|=0$, получаем $a=-4$.

При перемещении вершины «уголка» вправо, когда абсцисса вершины больше, чем абсцисса точки D $(x=-4)$, и меньше, чем абсцисса точки C $(x=2)$, множество решений неравенства представляет собой отрезок. Так как абсцисса вершины «уголка» совпадает со значением a, получаем, что при $-4<a<2$ условие задачи выполнено.

При $a=2$ исходное неравенство имеет множество решений, состоящие из отрезка и отдельно расположенной точки $x=5$, поэтому условие задачи не выполнено (рис. 68).

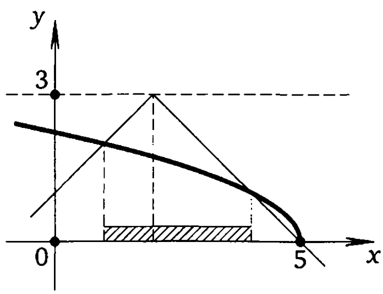

Рис. 68

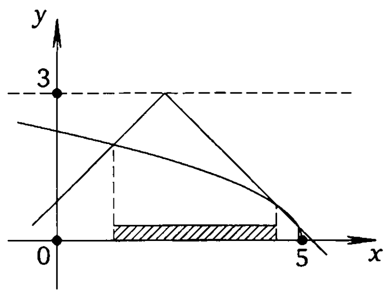

Рис. 69

На рисунке 69 изображена более детально ситуация, когда абсцисса вершины «уголка» расположена между абсциссами точек C и B (точка B соответствует случаю, когда правая часть «уголка» касается графика $y=\sqrt{5-x}$, соответствующее значение a будет найдено ниже). В этом случае множество решений неравенства состоит из двух отрезков. Для нахождения абсциссы вершины B предложим два способа.

I. В первом из них точку касания двух графиков дифференцируемых функций $f(x)$ и $g(x)$ находим из условия $f(x)=g(x)$ и $f'(x)=$ $=g'(x)$:

$$\begin{cases} 3-(x-a)=\sqrt{5-x}, \\ -1=-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=19/4, \\ a=9/4. \end{cases}$$

II. Другой способ нахождения точки касания состоит в нахождении a из условия единственности решения уравнения $\pm\sqrt{5-x}=3-$ $-(x-a)$ (т. е. пересечения прямой и параболы; здесь, поставив $\pm$, мы восстановили параболу целиком).

$$\pm\sqrt{5-x}=3+a-x \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x^2-(5+2a)x+a^2+6a+4=0, \\ 5-x\geqslant 0. \end{cases}$$

Условие для дискриминанта квадратного уравнения $D=-4a+9=0$ дает решение $a=9/4$, $x=19/4$.

Если абсцисса вершины «уголка» расположена между абсциссами точек B и A (включая случай, когда вершина совпадает с B), то снова получаем множество решений — отрезок. Начиная с точки A множество решений либо состоит из одной точки (в случае самой точки A), либо пустое.

Абсцисса точки A равна 8. Поэтому множество решений исходного неравенства является отрезком и при $a\in[9/4;8)$. Объединяя части ответа, получаем $a\in(-4;2)\cup[9/4;8)$.

Ответ: $a\in(-4;2)\cup[9/4;8)$.

Пример 12.7. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy+x+y)(y+x^2)=0, \\ y=ax-1 \end{cases}$$

имеет а) ровно два решения; б) ровно четыре решения.

Решение. Первому уравнению удовлетворяют точки гиперболы $xy+x+y=0$ (или $(x+1)(y+1)=1$, т. е. $y=-x/(x+1)$) и параболы $y=-x^2$ (рис. 70). Найдем точки пересечения гиперболы с параболой:

$$-\frac{x}{x+1}=-x^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{x+1}\cdot(x^2+x-1)=0 \;\Leftrightarrow\; x_1=0,\; x_{2,3}=(-1\pm\sqrt{5})/2.$$

Координаты точек пересечения гиперболы с параболой обозначим $(x_{1,2,3};y_{1,2,3})$, соответствующие значения $y_{1,2,3}$ находим из уравнения $y=-x^2$. Корни $x_{2,3}$ удовлетворяют уравнению $x_{2,3}^2+x_{2,3}-1=0$, откуда $y_{2,3}=-x_{2,3}^2=x_{2,3}-1$. Таким образом, соответствующие точки пересечения гиперболы с параболой лежат на прямой A, заданной уравнением $y=x-1$. При различных значениях a графики функций, заданных уравнением $y=ax-1$, представляют собой прямые, проходящие через точку $(0;-1)$. Обозначим через B прямую $x=0$, а через D — прямую $y=-1$.

Прямая $y=ax-1$ пересекается с параболой $y=-x^2$ в двух точках при любом a, так как уравнение $-x^2=ax-1$ имеет положительный

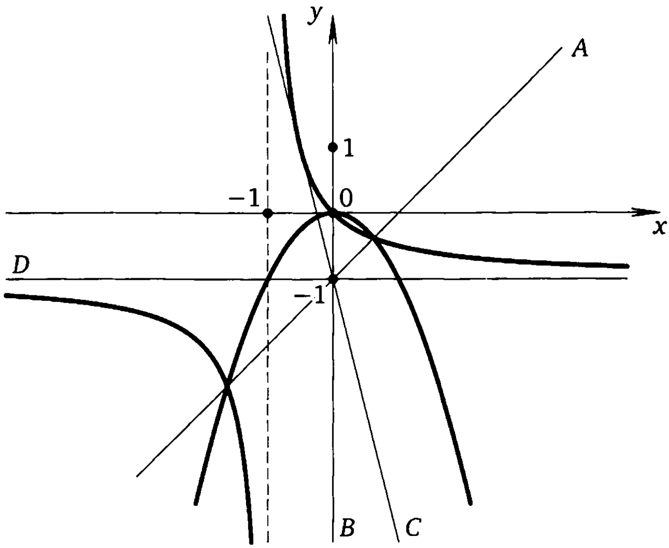

Рис. 70

дискриминант. Найдем те a, при которых прямая вида $y=ax-1$ касается гиперболы (обозначим соответствующую касательную через C). Для этого достаточно найти те a, при которых точка пересечения прямой с гиперболой единственна, т. е. квадратное уравнение $-\frac{x}{x+1}=ax-1$ имеет единственное решение. Вычисляя дискриминант и приравнивая его к 0, находим значение $a=-4$ и точку касания $(x;y)=(-1/2;1)$. Точку касания можно было найти и из системы, означающей, что равны как значения функций, так и значения их производных:

$$\begin{cases} ax-1=-1+\dfrac{1}{x+1}, \\ a=-\dfrac{1}{(x+1)^2}. \end{cases}$$

Таким образом, при разных значениях a получаем следующее.

1) Прямая A имеет две точки пересечения с кривыми, точки которых являются решениями первого уравнения в системе (что соответствует $a=1$).

2) Прямая B имеет одну точку пересечения (прямая B ни при каком a не принадлежит семейству прямых $y=ax-1$, хотя и проходит через точку $(0;-1)$).

3) Прямая находится между прямыми A и B — четыре точки пересечения (что соответствует $a\in(1;+\infty)$).

4) Прямая C имеет три точки пересечения (что соответствует $a=-4$).

5) Прямая находится между прямыми B и C — четыре точки пересечения (что соответствует $a\in(-\infty;-4)$).

6) Прямая D имеет две точки пересечения (что соответствует $a=0$).

7) Прямая находится между прямыми C и D — две точки пересечения (что соответствует $a\in(-4;0)$).

8) Прямая находится между прямыми D и A — три точки пересечения (что соответствует $a\in(0;1)$).

Ответ: при $a\in(-4;0)\cup\{1\}$ система имеет ровно два решения; при $a<-4$ и $a>1$ — ровно четыре решения.

Пример 12.8. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2+a=x, \\ |x|+|y|+|x-y|=2 \end{cases}$$

имеет а) ровно одно решение; б) ровно четыре решения.

Решение. Построим кривую, заданную уравнением

$$|x|+|y|+|x-y|=2.$$

В зависимости от того, какие знаки имеют величины x, y, $x-y$, рассмотрим шесть областей (рис. 71). В каждой из этих шести областей кривая, заданная уравнением $|x|+|y|+|x-y|=2$, представля-

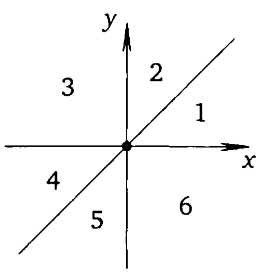

Рис. 71

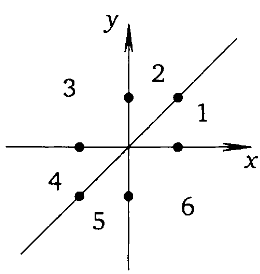

Рис. 72

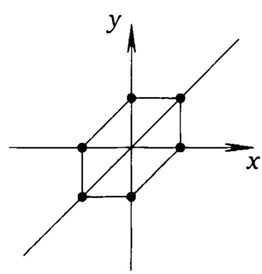

Рис. 73

ет собой отрезок. Для нахождения концов этих отрезков используем уравнение $|x|+|y|+|x-y|=2$, из которого следует, что

а) если $x=0$, то $y=+-1$;

б) если $y=0$, то $x=+-1$;

в) если $x=y$, то $x=y=1$ либо $x=y=-1$.

Таким образом, в каждой из шести областей нами найдено по две точки (рис. 72). Эти точки являются концевыми точками искомых отрезков (рис. 73).

Заметим, что первое уравнение в системе $y^2+a=x$ задает параболу. Возможны следующие случаи (рис. 74).

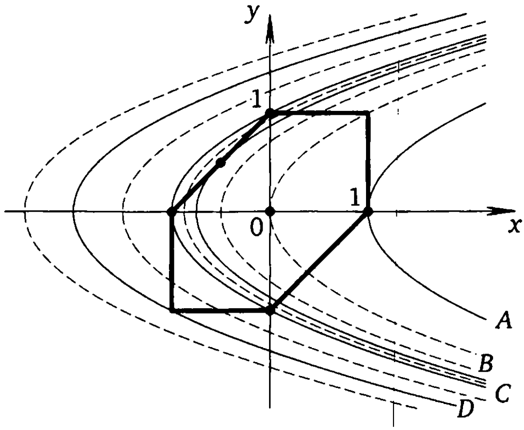

Рис. 74

1) Парабола A имеет одну точку пересечения с кривой, заданной вторым уравнением в системе (что соответствует $a=1$).

2) Парабола B имеет три точки пересечения (что соответствует $a=a_0$). Значение a_0 находим из того условия, что прямая $y-x=1$ является касательной для параболы $x=y^2+a$. Таким образом, $a_0=$ $=-3/4$, что соответствует точке касания $(x_0; y_0)=(-1/2; 1/2)$.

3) Парабола, находящаяся между параболами A и B, имеет две точки пересечения (что соответствует $a\in(-3/4; 1)$).

4) Парабола C имеет три точки пересечения (что соответствует $a=-1$).

5) Парабола, находящаяся между параболами B и C, имеет четыре точки пересечения (что соответствует $a\in(-1; -3/4)$).

6) Парабола D имеет одну точку пересечения (что соответствует $a=-2$).

7) Парабола, находящаяся между параболами C и D, имеет две точки пересечения (что соответствует $a\in(-2; -1)$).

8) В случае $a>1$ либо $a<-2$ пересечений нет.

Ответ: при $a=-2$, $a=1$ ровно одно решение; при $a\in(-1; -3/4)$ ровно четыре решения.

Пример 12.9. Найдите значения a, при которых система

$$\begin{cases} \log_{3-\log_3(a+4)} y = (x^2-7x)^3, \\ x^2+y=7x \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Для краткости введем обозначение $b=3-\log_3(a+4)$ и будем решать следующую задачу: *найдите все b, при которых система*

$$\begin{cases} \log_b y = (x^2-7x)^3, \\ x^2+y=7x \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Из О.Д.З. переменной y вытекает, что имеет смысл рассматривать только $y>0$. Заметим, что второе уравнение $x^2-7x+y=0$, если его рассматривать как уравнение относительно x, имеет следующее количество решений:

1) $D=49-4y<0 \Rightarrow$ решений нет;

2) $D=49-4y=0 \iff y=49/4 \Rightarrow$ ровно одно решение $x=x(y)$;

3) $D=49-4y>0 \iff 0<y<49/4 \Rightarrow$ два решения $x=x_\pm(y)$.

Докажем, что различным y соответствуют различные x. Пусть $y_* \neq y_{**} \in (0; 49/4)$ и $x_{1,2}$, $x_{3,4}$ — корни квадратных уравнений $x^2-7x+y_*=0$ и $x^2-7x+y_{**}=0$ соответственно. Докажем, что все корни $x_{1,2}$, $x_{3,4}$ различны. Корни у фиксированного квадратного уравнения с положительным дискриминантом различны, т. е. справедливы неравенства $x_1 \neq x_2$ и $x_3 \neq x_4$. Если бы оказалось, что $x_1=x_3$, тогда из теоремы Виета вытекало бы, что

$$\begin{cases} x_1+x_2=7, \\ x_3+x_4=7 \end{cases} \Rightarrow \quad x_2=x_4 \quad \Rightarrow \quad y_*=y_{**}.$$

Из полученного противоречия с условием $(y_* \neq y_{**})$ следует, что различным y соответствуют различные решения x уравнения $x^2-7x+y=0$.

Перепишем первое уравнение в виде

$$\log_b y = -y^3.$$

Будем исследовать количество решений данного уравнения. Для удобства введем функцию $g(y)=\log_b y + y^3$.

I. Разберем случай $b>1$. Тогда (рис. 75) имеем

$$\lim_{y\to 0+} g(y) = -\infty, \quad g(1)=1.$$

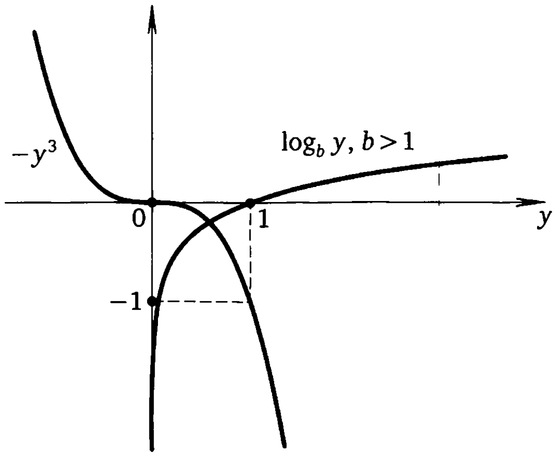

Рис. 75

Отсюда делаем вывод о существовании нуля функции $g(y)$: существует $y_0 \in (0; 1)$ такое, что $g(y_0) = 0$. Действительно, непрерывная функция $g(y)$ на отрезке (в нашем случае, например, $[b^{-2}; 1]$, так как $g(b^{-2}) = -2 + b^{-6} < -2 + 1 = -1$ и $g(1) = 1 > 0$) принимает все промежуточные значения (в нашем случае нуль). А из монотонности функции $g(y)$ вытекает единственность такого y_0.

Поскольку $y_0 \in (0; 1)$, исходная система имеет два различных решения. Следовательно, нам подходит любое $b > 1$.

II. Разберем случай $b \in (0; 1)$. Разберем все возможные варианты пересечения графика логарифмической функции $\log_b y$, $b \in (0; 1)$, с графиком функции $-y^3$. (Эти возможности изображены на рис. 76.)

A. График логарифмической функции не пересекает кривую $-y^3$, поэтому решений у исходной системы нет.

B. График логарифмической функции пересекает кривую $-y^3$ только в одной точке y^* (это точка касания). И поскольку $0 < y^* < 49/4$ (докажем ниже), у исходной системы будет два решения (данному y^* соответствуют два значения x).

C. График логарифмической функции пересекает кривую $-y^3$ в двух точках $y_{1,2}$. И поскольку $0 < y_1 < y^* < y_2 < 49/4$, у исходной системы будет четыре решения: каждому y_k соответствуют два значения $x_\pm(y_k)$).

D. График логарифмической функции пересекает кривую $-y^3$ в двух точках $y_{1,2}$. И поскольку $0 < y_1 < y^* < y_2 = 49/4$, у исходной системы будет три решения: y_1 соответствуют два значения $x_\pm(y_1)$, а y_2 соответствует одно решение $x(y_2)$).

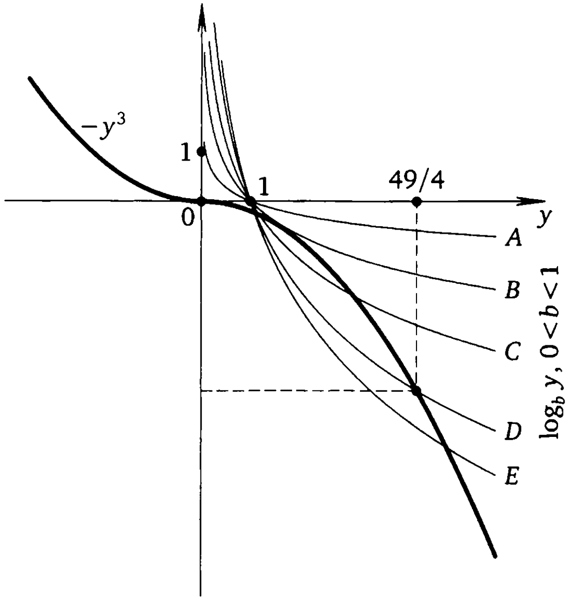

Рис. 76

E. График логарифмической функции пересекает кривую $-y^3$ в двух точках $y_{1,2}$. И поскольку $0 < y_1 < y^* < 49/4 < y_2$, у исходной системы будет два решения: y_1 соответствуют два значения $x_\pm(y_1)$, а для y_2 не существует корней $x(y_2)$ в силу отрицательности дискриминанта).

Найдем $b^* \in (0;\,1)$, при котором график функции $\log_{b^*} y$, $b^* \in (0;\,1)$, касается функции $-y^3$ (т. е. графики имеют общую касательную):

$$\begin{cases} \log_{b^*} y = -y^3, \\ \dfrac{1}{y \ln b^*} = -3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln y}{\ln b^*} = -y^3, \\ \dfrac{1}{\ln b^*} = -3y^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln y}{\ln b^*} = -y^3, \\ \dfrac{1}{\ln b^*} = -3y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^{1/3}, \\ b^* = e^{-1/(3e)}. \end{cases}$$

Остается лишь убедиться, что действительно $b^* = e^{-1/(3e)} \in (0;\,1)$. При увеличении b, т.е. в случае $b \in (b^*;\,1)$, график имеет вид A, т. е. пересечений нет.

Найдем теперь b^{**}, которое соответствует графику D, т.е. графику функции $\log_{b^{**}} y$, проходящему через точку $(y^{**}; -(y^{**})^3)$, где $y^{**} = 49/4$. Из равенства

$$\log_{b^*} y^{**} = -(y^{**})^3$$

находим, что $b^{**} = \sqrt[-(y^{**})^3]{y^{**}} = \sqrt[(49/4)^3]{4/49}$. Как отмечено выше, в этом случае исходная система имеет ровно три решения.

Если $b \in (b^{**}; b^*)$ (что соответствует графику C), то исходная система будет иметь четыре решения. Если $b \in (0; b^{**})$ (что соответствует графику E), то у исходной системы будет два решения.

Итого, ровно два решения система будет иметь при $b \in (0; b^{**}) \cup \cup \{b^*\}$. Не забываем также про случай $b > 1$, который тоже дал ровно два решения у системы. Остается вспомнить, что a связано с b формулой $b = 3 - \log_3(a+4)$:

$$\left[\begin{aligned} &b \in (0; b^{**}),\\ &b = b^*,\\ &b > 1 \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &a \in (3^{3-b^{**}} - 4; 23),\\ &a = 3^{3-b^*} - 4,\\ &a \in (-4; 5). \end{aligned}\right.$$

Ответ: $a \in (-4; 5) \cup \{3^{3-e^{-1/(3e)}} - 4\} \cup (3^{3-\sqrt[(49/4)^3]{4/49}} - 4; 23)$.

Пример 12.10. Найдите все значения c, при которых система

$$\begin{cases} 3\sqrt{|x+4|} + \sqrt{|y-3|} = 1,\\ 81(x+4)^2 + y^2 + c = 6y \end{cases}$$

имеет четыре решения.

Решение. Введем обозначения $a = 3\sqrt{|x+4|}$, $b = \sqrt{|y-3|}$. Тогда система запишется в виде

$$\begin{cases} a \geqslant 0, \ b \geqslant 0,\\ a + b = 1,\\ a^4 + b^4 = 9 - c. \end{cases} \qquad (12.1)$$

Данную систему можно решить и используя соображения симметрии, но в этом параграфе мы разберем графическую интерпретацию данного примера (рис. 77).

Рассмотрим следующие возможные случаи.

А. Пусть $(a_0; 0)$, $a_0 > 0$, — решение системы (12.1). Ему соответствуют два решения исходной системы: $(x; y) = (-4 \pm (a_0/3)^2; 3)$.

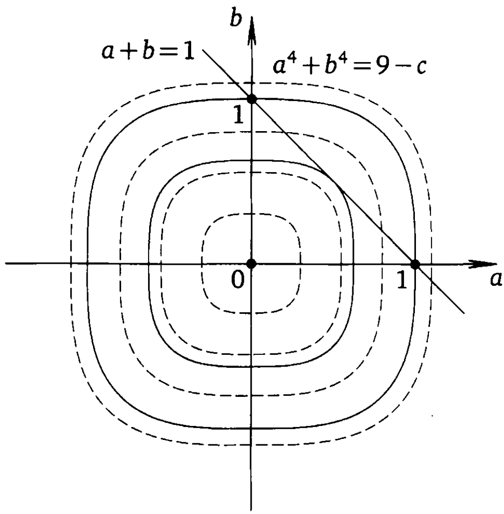

Рис. 77

B. Пусть $(0; b_0)$, $b_0 > 0$, — решение системы (12.1). Ему соответствуют два решения исходной системы: $(x; y) = (-4; 3 \pm b_0^2)$.

C. Пусть $(a_0; b_0)$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, — решение системы (12.1). Ему соответствуют четыре решения исходной системы:

$$(x; y) = (-4 \pm (a_0/3)^2; 3 \pm b_0^2).$$

D. Пара $(a_0; b_0)$, $a_0 \leqslant 0$, $b_0 \leqslant 0$, не удовлетворяет системе (12.1). Решений нет.

Из сказанного выше следует, что четыре решения может быть только в двух случаях (рис. 77).

1) Прямая $a + b = 1$ пересекает график функции $a^4 + b^4 = 9 - c$ в точках, лежащих на осях координат.

2) Прямая $a + b = 1$ касается графика функции $a^4 + b^4 = 9 - c$ в точке $(a_0; b_0)$, где $a_0 > 0$, $b_0 > 0$.

Первый случай возможен, когда прямая $a + b = 1$ пересекает график функции $a^4 + b^4 = 9 - c$ в точках $(1; 0)$ и $(0; 1)$, т. е. $1 = 9 - c$, т. е. $c = 8$.

Разберем второй случай касания. Выразим b из системы с учетом того, что величина b неотрицательна:

$$\begin{cases} b = 1 - a, \\ b = \sqrt[4]{9 - c - a^4}. \end{cases}$$

Случай касания возможен, когда прямая $b=1-a$ — касательная к графику функции $b=\sqrt[4]{9-c-a^4}$, т. е. выполнены условия

$$\begin{cases} 1-a=\sqrt[4]{9-c-a^4}, \\ (1-a)'=(\sqrt[4]{9-c-a^4})' \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a=(9-c-a^4)^{1/4}, \\ -1=\frac{1}{4}(9-c-a^4)^{-3/4}(-4a^3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a=(9-c-a^4)^{1/4}, \\ 1=(1-a)^{-3}\cdot a^3. \end{cases}$$

Откуда $\frac{a}{1-a}=1$, или $a=\frac{1}{2}$, и $c=71/8$.

Ответ: $c=71/8$, 8.

Пример 12.11. Решите неравенство

$$\arcsin(\sin x)+3\arccos(\cos x)\geqslant 3x-18.$$

Решение. Заметим, что функции $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$ периодические с периодом 2π (рис. 78—79). В частности, справедливы

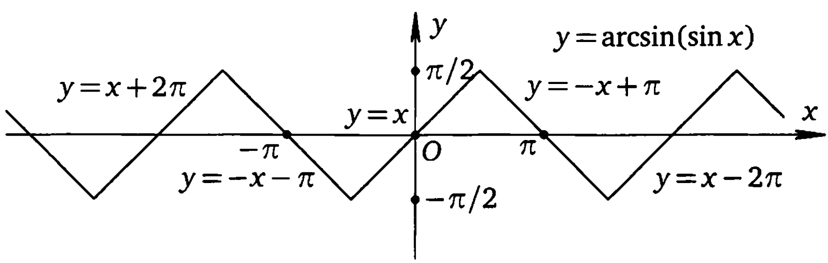

Рис. 78

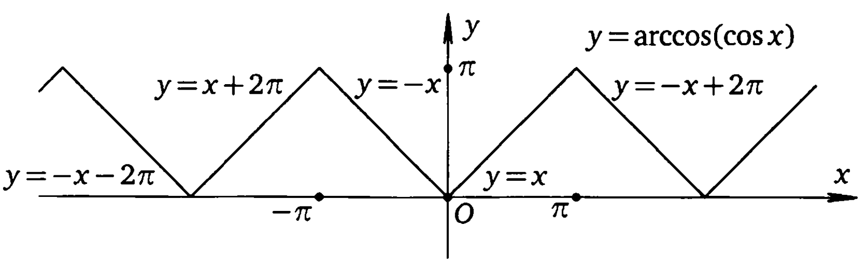

Рис. 79

равенства

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi k, & x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in \mathbb{Z}, \\ \pi - x + 2\pi k, & x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

и

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi k, & x \in [2\pi k; \pi + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}, \\ -x + 2\pi k, & x \in [-\pi + 2\pi k; 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Построим график функции $f(x) = \arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x)$ на периоде, т. е. на отрезке $[0; 2\pi]$. Для этого наносим точки $(x; f(x))$ с абсциссами $x = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, π на координатную плоскость и соединяем их прямолинейными отрезками. Продолжаем график на всю прямую, используя то, что исходная функция является периодической с периодом 2π. Затем построим график прямой $y = 3x - 18$ (рис. 80). Решим уравнение

$$\arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) = 3x - 18,$$

а затем методом интервалов решим исходное неравенство. Так как функция удовлетворяет условиям $0 \leqslant f(x) \leqslant 3\pi$, на участке $\left(-\infty; \frac{3\pi}{2}\right) \cup (3\pi; +\infty)$ решений уравнения нет (значения функции $g(x) = 3x - 18$ на этих участках выходит за отрезок $[0; 3\pi]$). Для

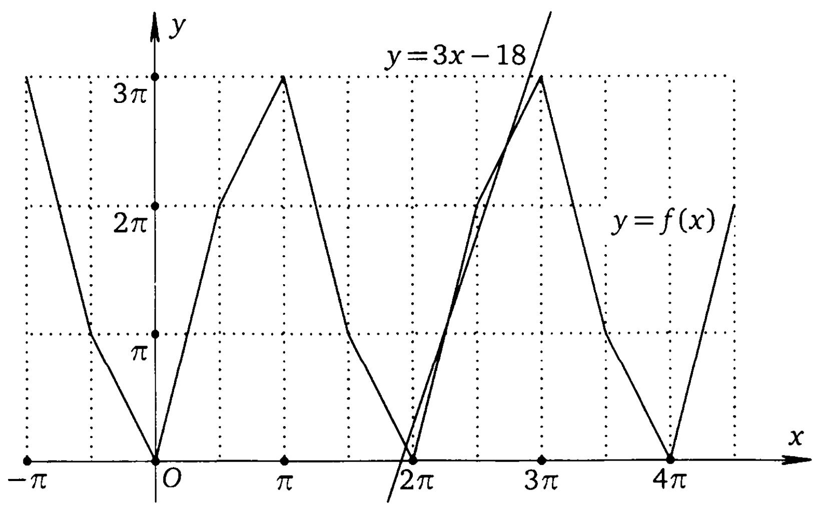

Рис. 80

функции $f(x)$ имеем

$$f(x) = \arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) = \begin{cases} -2x + 4\pi, & x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right], \\ 4x - 8\pi, & x \in \left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right], \\ 2x - 3\pi, & x \in \left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right]. \end{cases}$$

Следовательно,

$$-2x + 4\pi = 3x - 18 \iff x_1 = (4\pi + 18)/5 \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right],$$

$$4x - 8\pi = 3x - 18 \iff x_2 = 8\pi - 18 \in \left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right],$$

$$2x - 3\pi = 3x - 18 \iff x_3 = 18 - 3\pi \in \left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right].$$

Остается применить метод интервалов к неравенству $f(x) - g(x) \geqslant 0$:

$$f(0) - g(0) = 18 \Rightarrow f(x) - g(x) \geqslant 0, \ x \in (-\infty; x_1],$$

$$f(2\pi) - g(2\pi) = 18 - 6\pi < 0 \Rightarrow f(x) - g(x) < 0, \ x \in (x_1; x_2),$$

$$f\left(\frac{5\pi}{2}\right) - g\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 2\pi - \frac{15\pi}{2} + 18 = 18 - \frac{11\pi}{2} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) \geqslant 0, \ x \in [x_2; x_3],$$

$$f(4\pi) - g(4\pi) = 18 - 12\pi < 0 \Rightarrow f(x) - g(x) < 0, \ x \in (x_3; +\infty).$$

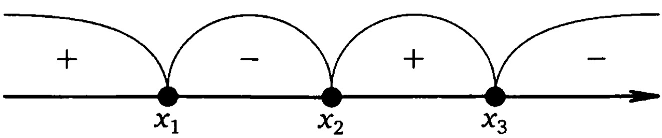

Рис. 81. $f(x) - g(x) \geqslant 0$

Таким образом, приходим к ответу.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{4\pi + 18}{5}\right] \cup [8\pi - 18; 18 - 3\pi]$.

Пример 12.12. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x + y^2 - 1)(y - \sqrt{6}|x|) = 0, \\ 2ay + x = 1 + a^2 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Первое уравнение в системе равносильно совокупности уравнений $y^2=1-x$ и $y=\sqrt{6}|x|$ (рис. 82). Выясним, при каких значениях a прямая $2ay+x=1+a^2$ касается параболы $y^2=1-x$. Запишем условия касания этих кривых (для удобства будем рассматривать их как графики функций от переменной y):

$$\begin{cases} 1+a^2-2ay=1-y^2, \\ -2a=-2y. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим $y=a$ и, подставив найденное значение в первое уравнение, приходим к тождеству $1+a^2-2a^2=1-a^2$. Таким образом, показано, что прямая $2ay+x=1+a^2$ при любом a является касательной к параболе $y^2=1-x$ (рис. 83).

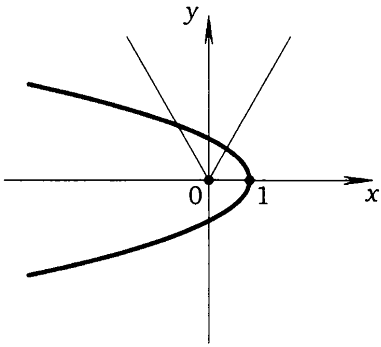

Рис. 82

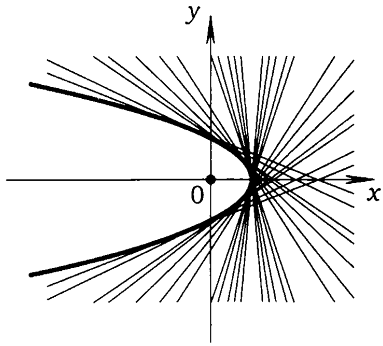

Рис. 83

Поскольку прямая $2ay+x=1+a^2$ при любом a имеет ровно одну точку пересечения с параболой, то необходимо найти такие значения a, при которых:

A. либо прямая $2ay+x=1+a^2$ пересекает график функции $y=\sqrt{6}|x|$ в двух точках, но при этом одна из точек пересечения совпадает с точкой касания к параболе (рис. 84);

B. либо прямая $2ay+x=1+a^2$ пересекает график функции $y=\sqrt{6}|x|$ в одной точке, отличной от точки касания (рис. 85).

В этих случаях будет ровно два решения исходной системы.

Разберем случай *A*. Для этого найдем точки пересечения параболы $y^2=1-x$ и графика функции $y=\sqrt{6}|x|$:

$$\begin{cases} y^2=1-x, \\ y=\sqrt{6}|x|. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=6x^2, \\ y=\sqrt{6}|x|. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &(x;y)=(-1/2;\sqrt{6}/2), \\ &(x;y)=(-1/3;\sqrt{6}/3). \end{aligned} \right.$$

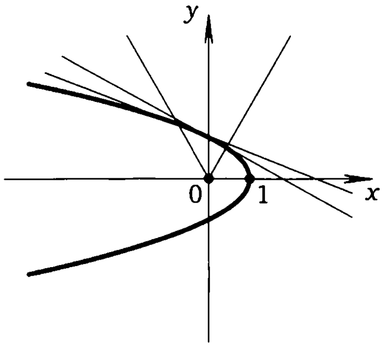

Рис. 84

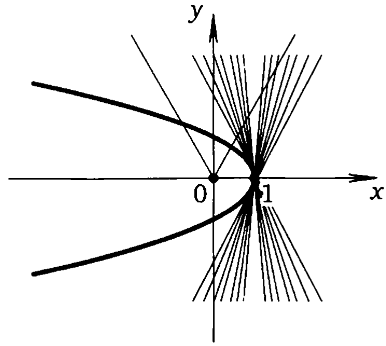

Рис. 85

Уравнение $2ay+x=1+a^2$ равносильно уравнению $(a-y)^2=x+y^2-1$, и при условии, что точка $(x; y)$ принадлежит параболе, последнее равенство означает, что $a=y$. Поэтому случаю A (рис. 84) соответствуют значения $a=\sqrt{6}/2$ и $a=\sqrt{6}/3$.

Разберем случай B (рис. 85). В случае $a=0$ касательная к параболе $2ay+x=1+a^2$ превращается в прямую $x=1$, которая имеет ровно одну точку пересечения с графиком функции $y=\sqrt{6}|x|$.

Пусть $a\neq 0$. Если касательная $2ay+x=1+a^2$ (т.е. $y=-\frac{1}{2a}x+\frac{a^2+1}{2a}$) будет параллельна прямой $y=-\sqrt{6}x$, то исходная система будет иметь ровно два решения, так как касательная пересечет луч $y=\sqrt{6}x$, $x>0$, но при этом не имеет общих точек с лучом $y=-\sqrt{6}x$, $x<0$. Для касательной $2ay+x=1+a^2$ угловой коэффициент k равен $-1/(2a)$. При уменьшении углового коэффициента k касательная пересечет луч $y=\sqrt{6}x$, $x>0$, но при этом не будет пересекаться с лучом $y=-\sqrt{6}x$, $x<0$.

Если касательная станет параллельной прямой $y=\sqrt{6}x$, то у исходной системы будет только одно решение (это нам не подходит). При увеличении углового коэффициента k касательная пересечет луч $y=\sqrt{6}x$, $x>0$, но при этом не будет пересекаться с лучом $y=-\sqrt{6}x$, $x<0$.

Таким образом, нужно найти те касательные, которые имеют угловой коэффициент $k=-\frac{1}{2a}$ либо больший чем $\sqrt{6}$, либо меньший или равный $-\sqrt{6}$. Итак,

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2a} > \sqrt{6}, \\ -\dfrac{1}{2a} \leqslant -\sqrt{6} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \dfrac{1+2\sqrt{6}a}{2a} < 0, \\ \dfrac{1-2\sqrt{6}a}{2a} \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Поскольку случай $a=0$ тоже подходит, получаем $a \in \left(-\dfrac{1}{2\sqrt{6}}; \dfrac{1}{2\sqrt{6}}\right]$.

Ответ: $a=\sqrt{6}/3,\ \sqrt{6}/2,\ a \in (-1/(2\sqrt{6}); 1/(2\sqrt{6})]$.

Тренировочные задачи к § 12

1. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y-|x|=a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

2. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9, \\ (x-2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a+2-x^2)\big(\big||x-1|-1\big|-a\big)=0$$

имеет пять различных решений.

4. Найдите наименьшее значение выражения $a^2+(b-1)^2$ на множестве таких чисел a и b, для которых уравнение

$$\big||x-4|-2\big|-ax+(4a-b)=0$$

имеет ровно три различных корня. Укажите, при каких a и b достигается это наименьшее значение.

5. При каких значениях a уравнение

$$2|x-2a|-a^2+15+x=0$$

не имеет решений? При каких значениях a уравнение имеет решение и все решения этого уравнения принадлежат отрезку $[-9; 10]$?

6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\big||x+a|-2x\big|-3x=7|x-1|$$

имеет не более одного корня.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-6x+8|$ меньше 1.

8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|x^2-6x+8|+|x^2-6x+5|=a$ имеет ровно три решения.

9. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\big||x-a|+2x\big|+4x=8|x+1|$$

не имеет ни одного корня.

10. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-3|x-a^2|-5x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

11. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-4|x-a^2|-8x$ имеет более двух точек экстремума.

12. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x+2)^2+y^2=a, \\ |x|+|y-1|=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

13. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y=2|x|+|x-7|, \\ y=2|x-3|+x+a \end{cases}$$

имеет единственное решение. Укажите это решение.

14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a-|x-1|-|x-2|-|x-3|=2|x+1|+|x+2|$ имеют бесконечно много решений.

15. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$4|x-a|+a-2-2x=0$$

имеет решения и все решения принадлежат отрезку $[-2; 1]$.

16. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(13+a-6x+x^2)(a+5-|x-3|)=0$$

имеет ровно три различных решения.

17. Для каждого значения a укажите число общих точек графиков функций $y=x^2-4x+|4-2x|$ и $y=a$. Укажите координаты этих точек.

18. При каких значениях a система

$$\begin{cases} y^2+2(x-2)y+(x^2-4)(2x-x^2)=0, \\ y=a(x-4) \end{cases}$$

имеет три различных решения?

19. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+8x+y^2+8y+23=0, \\ x^2-2a(x+y)+y^2+a^2=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

20. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |2x+3y|+|2x-3y|=7, \\ x^2+y^2=a^2-4-4y \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

21. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (x-a)^2+3y^2-2y=0, \\ |x|-y=4/3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

22. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$2|x+1|=8-|8(x-a)^2-|x+1|-14|$$

имеет три решения.

23. Для каждого допустимого значения a определите количество решений системы

$$\begin{cases} \log_a \sqrt{y+1}=(x^2-7x)^2, \\ x^2+y=7x. \end{cases}$$

24. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-4)^2+(y-6)^2=25, \\ y=|x-a|+1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

25. Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\sqrt{3-x}+|x-a|\leqslant 2$$

является отрезок.

26. Для каждого допустимого значения a определите количество решений системы

$$\begin{cases} \log_a \sqrt[4]{2y} = (x^2 - 10x)^2, \\ x^2 + y = 10x. \end{cases}$$

27. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} |a-1|^{x-y+1} = \log_\pi x - 7, \\ x - \log_\pi x = y - 8 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

28. Найдите все значения a из интервала $(-\pi; \pi)$, при которых система

$$\begin{cases} (1 - 4x^2 - 4y^2)(4x^2 + 15 - 12y) = 0, \\ y\cos a + x\sin a = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

29. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (|x| + |2 - x| - 2)(xy - x + y - 2) = 0, \\ x - 2a - 1 + (y-1)(a+1)^2 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

30. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} |a|^{y^2} = \sqrt[7]{-4x^2 + 24x - 32}, \\ y = 4x^2 - 24x + 32 \end{cases}$$

имеет не менее двух решений.

31. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x + y^2 - 1)(y - \sqrt{6}|x|) = 0, \\ 2ay + x = 1 + a^2 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

32. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} |a|^{2x-y-1} = 2x + 3y - 7, \\ 4y - x = 6 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

33. Определите, при каких значениях a уравнение

$$|x^2-6x+8|+2=\log_a x.$$

имеет единственное решение.

34. Решите уравнение

$$x^2=\arcsin(\sin x)+10x.$$

35. Даны функции

$$f(x,y)=|y|+2|x|-2 \quad \text{и} \quad g(x,y,a)=x^2+(y-a)(y+a).$$

a) При каком наименьшем положительном значении a система уравнений

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y,a)=0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения?

b) При этом значении a найдите площадь фигуры, координаты (x,y) всех точек которой удовлетворяют неравенству

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y,a)}\leqslant 0.$$

36. Решите неравенство

$$2\arcsin(\sin x)+\arccos(\cos x)\geqslant -x-3.$$

37. При каких значениях a неравенство

$$\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)}\geqslant$$
$$\geqslant\left|\log_{ax^2+2a^2x+1}\sqrt{16\arcsin^{-4}(x+3a)}\right|$$

не имеет решений на отрезке $[-5;6]$?

38. Найдите все значения a, при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a$$

существуют и принадлежат отрезку $[2;17]$.

39. Найдите все значения a и n, при которых разница между наибольшим и наименьшим положительными корнями уравнения

$$\underbrace{|||\ldots||}_{n\ \text{знаков}}x-1|-1|-1|-\ldots-1|-1|=a$$

равна 18,3.

40. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$a+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{1+2ax-a^2-x^2}$$

имеет ровно одно решение.

41. Найдите все значения a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+5=b^2+2x-4y, \\ x^2+(12-2a)x+y^2=2ay+12a-2a^2-27 \end{cases}$$

имеет два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}.$$

42. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (xy-y-9)(y+x^2-1)=0, \\ y=a(x-3) \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

43. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\arccos(5x)=a+\arcsin\sin(7x-3)$$

имеет единственное решение.

44. Найдите все значения a, при каждом из которых графики функций

$$y=\frac{3x+1}{x} \quad \text{и} \quad y=\frac{4x+3a-7}{ax-1}$$

разбивают координатную плоскость ровно на пять частей.

§ 13
Метод областей

Метод областей является обобщением метода интервалов. При решении, например, неравенства $f(x) \geqslant 0$ мы находили нули функции $f(x) = 0$, и тем самым числовая ось $\mathbb{R}$ разбивалась на подмножества, в которых знак функции сохранялся. Затем мы отбирали те подмножества, в которых $f(x) \geqslant 0$.

При решении неравенства $f(x, y) \geqslant 0$ методом областей мы находим все кривые, на которых $f(x, y) = 0$. Данные кривые разбивают плоскость на множества, на которых знак функции $f(x, y)$ постоянный. Затем мы отбираем те подмножества, на которых $f(x, y) \geqslant 0$. Разберем этот метод на простом примере.

Пример 13.1. Найдите площадь множества точек $(x; y)$, удовлетворяющих неравенствам:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y \leqslant -1, \\ 3x - 2y + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Выделив полный квадрат, перепишем систему в более удобном виде:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 - 4 \leqslant 0, \\ 3x - 2y + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) \leqslant 0, \\ g(x, y) \geqslant 0. \end{cases}$$

Уравнение $(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0$ задает окружность с центром в точке $(1; 2)$ и радиусом 2. Следовательно, плоскость разбивается этой окружностью на две части, внешнюю и внутреннюю (рис. 86, 87). Проверим, какое множество удовлетворяет условию $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 4 \leqslant 0$. Для этого выберем произвольную точку $(1; 2)$ внутри окружности и точку $(-2; 2)$ вне окружности. Для них выполняются неравенства

$$f(1; 2) = -4 < 0,$$
$$f(-2; 2) = 5 > 0.$$

Следовательно, нам подходит множество, лежащее внутри круга (рис. 86).

Решим второе неравенство $g(x, y) = 3x - 2y + 1 \geqslant 0$. Рассмотрим уравнение прямой $3x - 2y + 1 = 0$. Эта прямая делит плоскость на две части (см. рис. 88, 89). Выберем по точке из каждой части и

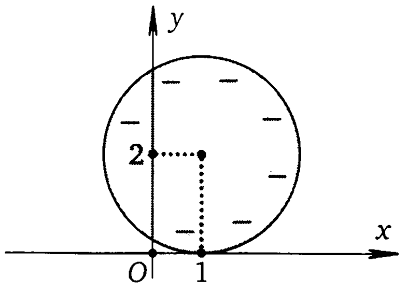

Рис. 86

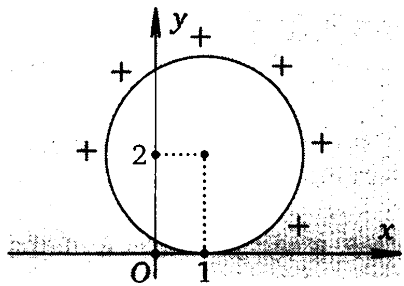

Рис. 87

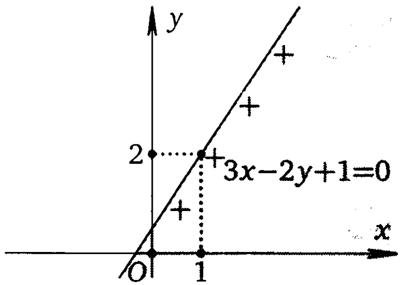

Рис. 88

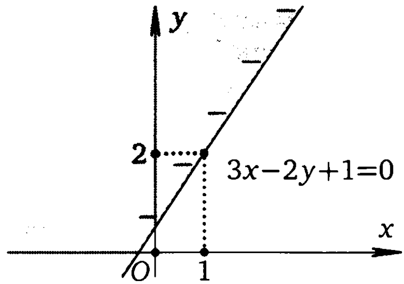

Рис. 89

определим ту, которая нам подходит:

$$g(-2; 0) = -5 < 0,$$
$$g(2; 0) = 7 > 0.$$

Следовательно, нам подходит множество, изображенное на рис. 88. Итак, нам требуется найти площадь множества, изображенного на рис. 90. Но поскольку прямая проходит через центр окружности, данное множество является половиной круга радиуса 2. Следовательно, площадь равна $\frac{\pi R^2}{2} = 2\pi$

Ответ: 2π.

Пример 13.2. При каждом значении a решите неравенство

$$\sqrt{x+2a} > x + \sqrt{2a}.$$

Решение. Введем для удобства обозначения

$$y = \sqrt{x+2a}, \quad b = \sqrt{2a}.$$

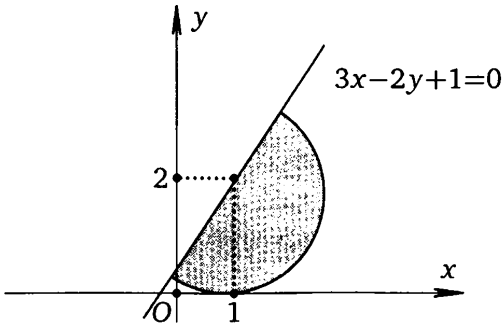

Рис. 90

Сразу заметим, что для y, b выполнены неравенства $y, b \geqslant 0$. Так как $x = y^2 - b^2$, то исходное уравнение принимает вид

$$(y^2 - b^2) - (y - b) < 0,$$

или

$$\begin{cases} (y-b)(y-(1-b)) < 0, \\ y \geqslant 0, \ \ b \geqslant 0. \end{cases} \tag{13.1}$$

Решим (13.1) систему двумя способами.

I) Графический способ. Так как уравнения $y = b$, $y = 1 - b$ задают прямые на плоскости $(b; y)$, удобно изобразить на графике области знакопостоянства функции $(y-b)(y-(1-b)) = 0$ (рис. 91). Учитывая

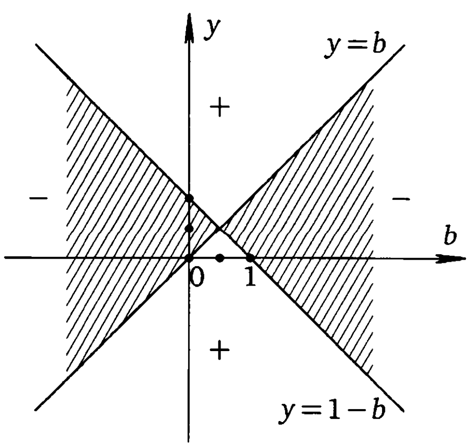

Рис. 91

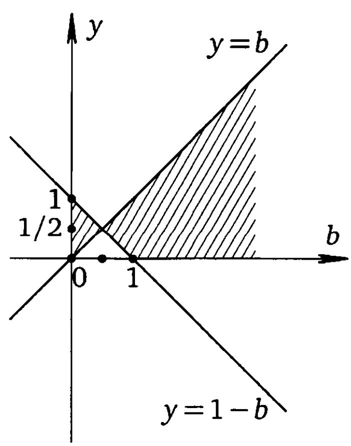

Рис. 92

неотрицательность переменных y, b, мы можем изобразить множество, являющееся решением системы (рис. 92).

Остается выписать ответ: если $b \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, то $y \in (b; 1-b)$, если $b \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$, то $y \in (1-b; b)$, если $b > 1$, то $y \in [0; b)$.

II) Решим систему (13.1) аналитически.

Для этого нам потребуется сравнить корни $y_1 = b$, $y_2 = 1-b$ между собой и с нулем. Из уравнений

$$b = 1-b, \quad b = 0, \quad 1-b = 0$$

находим решиния $b = 0$, $b = \frac{1}{2}$, $b = 1$. Исследовав систему (13.1) на каждом из участков $b \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $b \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$, $b > 1$ по отдельности, приходим к ответу: если $b \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, то $y \in (b; 1-b)$, если $b \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$, то $y \in (1-b; b)$, если $b > 1$, то $y \in [0; b)$.

Вернемся к переменным (a, x):

$$\left\{\begin{array}{ll} b \in \left[0; \frac{1}{2}\right], & y \in (b; 1-b), \\ b \in \left(\frac{1}{2}; 1\right], & y \in (1-b; b), \\ b > 1, & y \in [0; b). \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{2a} \in \left[0; \frac{1}{2}\right], & \sqrt{x+2a} \in (\sqrt{2a}; 1-\sqrt{2a}), \\ \sqrt{2a} \in \left(\frac{1}{2}; 1\right], & \sqrt{x+2a} \in (1-\sqrt{2a}; \sqrt{2a}), \\ \sqrt{2a} > 1, & \sqrt{x+2a} \in [0; \sqrt{2a}). \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a \in \left[0; \frac{1}{8}\right], & x+2a \in (2a; 1-2\sqrt{2a}+2a), \\ a \in \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right], & x+2a \in (1-2\sqrt{2a}+2a; 2a), \\ a > \frac{1}{2}, & x+2a \in [0; 2a). \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a \in \left[0; \frac{1}{8}\right], & x \in (0; 1-2\sqrt{2a}), \\ a \in \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right], & x \in (1-2\sqrt{2a}; 0), \\ a > \frac{1}{2}, & x \in [-2a; 0). \end{array}\right.$$

Ответ: при $a<0$ решений нет, если $a\in\left[0;\,\frac{1}{8}\right]$, то $x\in(0;\,1-2\sqrt{2a})$, если $a\in\left(\frac{1}{8};\,\frac{1}{2}\right]$, то $x\in(1-2\sqrt{2a};\,0)$, если $a>\frac{1}{2}$, то $x\in[-2a;\,0)$.

Пример 13.3. Найдите все значения p, при каждом из которых множество решений неравенства

$$(p-x^2)(p+x-2)<0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2\leqslant 1$.

Решение. Этот пример уже был решен (см. пример 3.2). Покажем, как его можно решить при помощи метода областей. На рис. 93 изображены кривые $p=x^2$ и $p+x=2$. При помощи метода областей расставляем знаки функции, стоящей в левой части неравенства, в областях, образованных этими кривыми. Заметим (рис. 94), что при

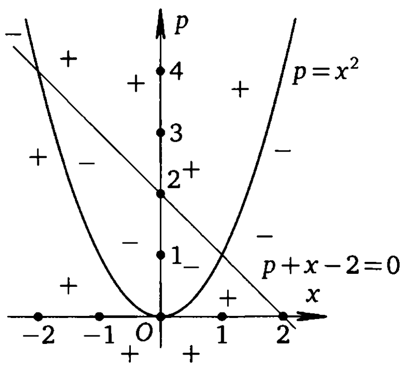

Рис. 93

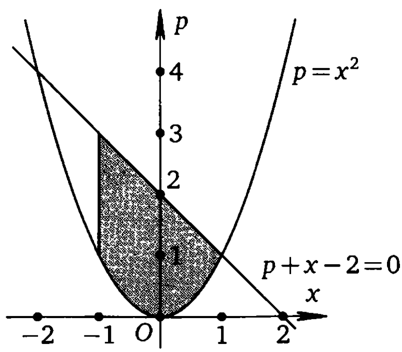

Рис. 94

$p\in(0;3)$ существуют решения x исходного неравенства из отрезка $[-1;\,1]$, а для оставшихся $p\in(-\infty;\,0]\cup[3;\,+\infty)$ решений x из отрезка $[-1;\,1]$ не существует.

Ответ: $p\in(-\infty;\,0]\cup[3;\,+\infty)$.

Пример 13.4. Докажите, что множество, заданное на координатной плоскости условием

$$|3x+6|+|2y+3x-2|<6,$$

является параллелограммом с центром в точке пересечения прямых $3x+6=0$, $2y+3x-2=0$, которые являются диагоналями данного параллелограмма. Найдите площадь параллелограмма.

Решение. Заметим, что

$$|a|+|b|<c \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |a+b|<c, \\ |a-b|<c. \end{cases}$$

Действительно, это неравенство легко проверить, рассматривая все возможные комбинации знаков чисел a и b. Используя это замечание, находим, что исходное неравенство равносильно системе

$$|2y+3x-2|+|3x+6|<6 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |(2y+3x-2)+(3x+6)|<6, \\ |(2y+3x-2)-(3x+6)|<6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} |2y+6x+4|<6, \\ |2y-8|<6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |y+3x+2|<3, \\ |y-4|<3. \end{cases}$$

Решением неравенства $|y+3x+2|<3$ является множество $-5<y+$ $+3x<1$, рис. 95.

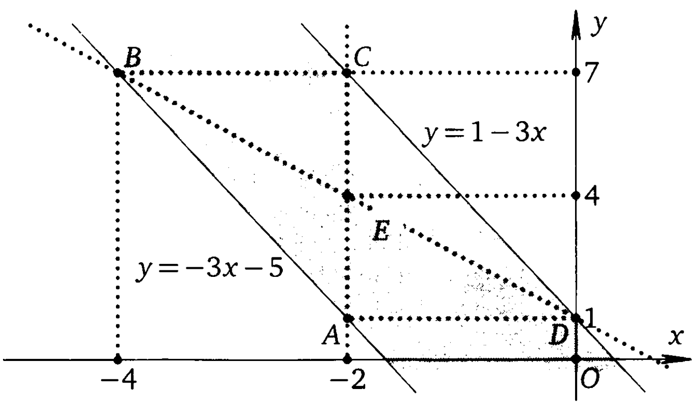

Рис. 95. Множество $-5<y+3x<1$

Решением неравенства $|y-4|<3$ является множество $1<y<7$, рис. 96.

Пересечением данных множеств ($-5<y+3x<1$ и $1<y<7$) действительно является параллелограмм со сторонами

$$\begin{aligned} AB&: \quad y+3x+5=0, \\ BC&: \quad y=7, \\ CD&: \quad y+3x-1=0, \\ DA&: \quad y=1 \end{aligned}$$

(рис. 97).

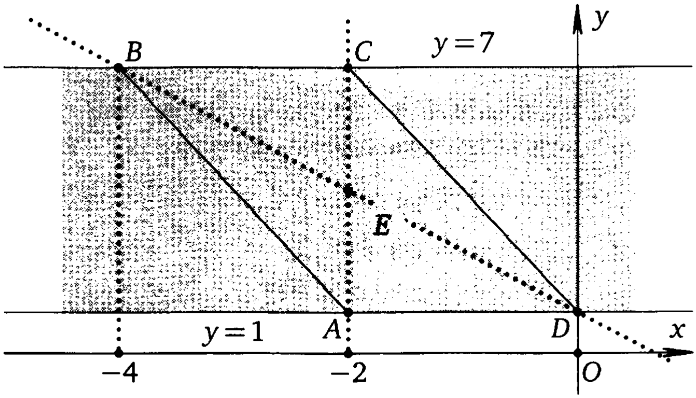

Рис. 96. Множество $1 < y < 7$

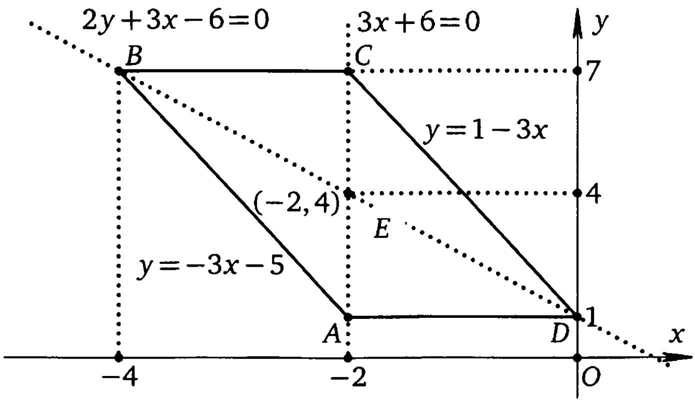

Рис. 97

Следовательно, диагоналями данного параллелепипеда действительно являются прямые $AC: 3x+6=0$, $BD: 2y+3x-2=0$, которые пересекаются в точке $(-2; 4)$. Найдем площадь параллелограмма:

$$S_{ABCD} = AC \cdot AD = 2 \cdot 6 = 12.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 12$.

Тренировочные задачи к § 13

1. При каких значениях a на плоскости существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 2y - x \leqslant 1, \\ y + 2x \leqslant 2, \\ y + ax \geqslant -1? \end{cases}$$

2. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 4x^2 + a + 3 \leqslant 4x, \\ a + 1 + x \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. Шесть чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Первый, второй и четвертый члены этой прогрессии являются решениями неравенства

$$\log_{0,5x-1}\left(\log_4\left(\frac{x-11}{x-8}\right)\right) \geqslant 0,$$

а остальные не являются решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

4. Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ y + 1 \geqslant 0, \\ 3y + 6 \geqslant 2|x|. \end{cases}$$

5. Определите площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек (x, y), удовлетворяющих неравенству

$$\log_{(x^2+y^2)/2}(x - y) > 1.$$

6. Найдите периметр фигуры, точки которой на координатной плоскости $(x; y)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y > ||x-2| - 1|, \\ x^2 + y^2 < 4x + 2y - 3. \end{cases}$$

7. Найдите площадь фигуры, состоящей из точек $(x; y)$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} y \leqslant \sqrt{4-x^2}, \\ y \geqslant |x-1|-3. \end{cases}$$

8. Определите площадь фигуры, расположенной на координатной плоскости и состоящей из точек (x, y), удовлетворяющих неравенству $x^2+y^2 \leqslant 6|x|-6|y|$.

9. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x+a$ при условии $|2x+4-2a|+|x-2+a| \leqslant 3$.

10. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением $\left|y-\frac{x^2}{2}\right|+\left|y+\frac{x^2}{2}\right| \leqslant 2+x$.

11. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x+2y+1| \leqslant 11, \\ (x-a)^2+(y-2a)^2=2+a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

12. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2+(5a+3)x+4a^2 \leqslant 4$ удовлетворяет неравенству $ax(x-4-a) \leqslant 0$.

13. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2a)^2+(y-a)^2} \leqslant \dfrac{|a|}{6\sqrt{5}}, \\ x-2y \geqslant 1 \end{cases}$$

имеет решения.

14. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} (x+y+a)^2+(x-y-a)^2 \leqslant (a-1)^2, \\ (x+y-2a)^2+(x-y+3a)^2 \leqslant (8a-5)^2 \end{cases}$$

не имеет решения.

15. При каких значениях p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости уравнением $|2x+y|+|x-y+3| \leqslant p$, будет равна 24?

16. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-6|x|-6|y|+17 \leqslant 0, \\ x^2+y^2-2y=a^2-1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

17. Составьте уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием

$$|y-2x-1|+|2x-4|<4.$$

18. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^2+(2-3a)x+2a^2-2a<0, \\ ax=1 \end{cases}$$

имеет решения?

19. При каждом значении $a \geqslant 0$ решите неравенство

$$\frac{x^2(x-2)}{x+2}+ax^2+\frac{ax}{x+2}-2ax+a^2 \geqslant 0.$$

20. Найдите все значения c, при каждом из которых множество точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-16x+10y+65}{x^2+y^2-14x+12y+79} \leqslant 0, \\ (x-c)(y+c)=0, \end{cases}$$

являются отрезком.

21. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a} \geqslant 0, \\ x-8>ax \end{cases}$$

не имеет решений.

22. При каждом значении b решите неравенство

$$\sqrt{x+4b^2}>x+2|b|.$$

23. Для каждого значения a, принадлежащего отрезку $[-1, 0]$, решите неравенство

$$\log_{x+a}(x^2-(a+1)x+a) \geqslant 1.$$

§ 14
Задачи на целые числа

При решении задач в целых числах важную роль играет понятие делимости чисел. Напомним, что целое число b делит целое число a, если существует такое целое число c, что $a = bc$. Если целое число делится на 2, то оно называется четным. Четными являются числа 0, ± 2, ± 4, ± 6, ... Общая формула четного числа: $2n$, $n \in \mathbb{Z}$. Если целое число не делится на 2, то оно называется нечетным. Нечетными являются числа ± 1, ± 3, ± 5, ± 7, ... Общая формула нечетного числа: $2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Часто бывает полезно знать признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.

Число делится на 2, если в его десятичной записи последняя цифра четная.

Число делится на 5, если в его десятичной записи последняя цифра равна либо 5, либо 0.

Число делится на 10, если в его десятичной записи последняя цифра 0. Вообще, число делится на 10^n, если n его последних цифр равны 0.

Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3.

Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

Если произведение целых чисел x, y равно заданному числу k, то каждое из чисел является делителем числа k. Например, уравнение $xy = 21$ допускает следующие восемь решений в целых числах: $(x; y) = (1; 21)$, $(21; 1)$, $(3; 7)$, $(7; 3)$, $(-1; -21)$, $(-21; -1)$, $(-3; -7)$, $(-7; -3)$.

Пример 14.1. При каждом значении a найдите все натуральные числа x, y, удовлетворяющие неравенству $xy \leqslant 3 - a^2$.

Решение. Поскольку числа x, y натуральные, их произведение не меньше чем 1. В то же время, для любого значения a выполняется неравенство $3 - a^2 \leqslant 3$. Следовательно, произведение xy может принимать только значения 1, 2, 3. При $1 < |a| \leqslant \sqrt{2}$ неравенству удовлетворяет только пара $x = 1$, $y = 1$; при $0 < |a| \leqslant 1$ неравенству удовлетворяют пары $(x; y) = (1; 1)$, $(2; 1)$, $(1; 2)$; наконец, при $a = 0$ неравенству удовлетворяют пары $(x; y) = (1; 1)$, $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(3; 1)$, $(1; 3)$.

Ответ: если $1 < |a| \leqslant \sqrt{2}$, то $(x; y) = (1; 1)$, если $0 < |a| \leqslant 1$, то $(x; y) = (1; 1)$, $(2; 1)$, $(1; 2)$, если $a = 0$, то $(x; y) = (1; 1)$, $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(3; 1)$, $(1; 3)$, при $|a| > \sqrt{2}$ решений нет.

Пример 14.2. Найдите пары целых чисел x и y, удовлетворяющие уравнению

$$3x^2 - 7y^2 - 20xy = 15.$$

Решение. Представим исходное уравнение в следующем виде:

$$(3x+y)(x-7y) = 15.$$

Поскольку мы решаем задачу в целых числах, $3x+y$, $x-7y$ тоже целые числа. Число 15 можно представить в виде произведения двух целых чисел так: $1\cdot 15$, $(-1)\cdot(-15)$, $15\cdot 1$, $(-15)\cdot(-1)$, $5\cdot 3$, $(-5)\cdot(-3)$, $3\cdot 5$, $(-3)\cdot(-5)$. Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности восьми систем в числах.

$$\textbf{1.}\quad \begin{cases} 3x+y=1, \\ x-7y=15. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на -3 и сложим с первым. Получаем $22y=-44$, откуда $y=-2$. Теперь из первого уравнения находим $x=1$. Аналогично решим все оставшиеся семь систем.

$$\textbf{2.}\quad \begin{cases} 3x+y=-1, \\ x-7y=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \quad y=2,\ x=-1.$$

$$\textbf{3.}\quad \begin{cases} 3x+y=15, \\ x-7y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{решений в целых числах нет.}$$

$$\textbf{4.}\quad \begin{cases} 3x+y=-15, \\ x-7y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{решений в целых числах нет.}$$

$$\textbf{5.}\quad \begin{cases} 3x+y=5, \\ x-7y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{решений в целых числах нет.}$$

$$\textbf{6.}\quad \begin{cases} 3x+y=-5, \\ x-7y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{решений в целых числах нет.}$$

$$\textbf{7.}\quad \begin{cases} 3x+y=3, \\ x-7y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{решений в целых числах нет.}$$

$$\textbf{8.}\quad \begin{cases} 3x+y=-3, \\ x-7y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \text{решений в целых числах нет.}$$

Ответ: $x=1$, $y=-2$; $x=-1$, $y=2$.

Пример 14.3. Из области определения функции

$$y=\log_{0,8}(a^a-a^{(8x+5)/(x+5)})$$

взяли все натуральные числа и сложили их. Найдите все положительные значения a, при которых такая сумма будет больше 8, но меньше 15.

Решение. Выпишем ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} a>0, \\ a^a-a^{(8x+5)/(x+5)}>0. \end{cases}$$

Из последнего неравенства заключаем, что $a\neq 1$. Для решения этого неравенства рассмотрим два случая $a\in(0;1)$ и $a\in(1;+\infty)$.

I. Пусть $a\in(0;1)$. Тогда

$$a^a>a^{(8x+5)/(x+5)} \quad\Leftrightarrow\quad a<\frac{8x+5}{x+5} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{(8-a)x+5-5a}{x+5}>0 \quad\Leftrightarrow\quad (8-a)\cdot\frac{x+\frac{5a-5}{a-8}}{x+5}>0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов. Корень знаменателя $x_1=-5$, а числителя $x_2=-\frac{5a-5}{a-8}$. Поскольку при $a\in(0;1)$ справедливо неравенство $\frac{5a-5}{a-8}=5+\frac{35}{a-8}<5$, $x_1<x_2$. Следовательно, решение неравенства при $a\in(0;1)$ $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$. Поскольку в этом случае среди решений содержится бесконечное множество положительных чисел, условие задачи не выполнено.

II. Пусть $a\in(1;+\infty)$. Тогда

$$a^a>a^{(8x+5)/(x+5)} \quad\Leftrightarrow\quad a>\frac{8x+5}{x+5} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{(8-a)x+5-5a}{x+5}<0 \quad\Leftrightarrow\quad (8-a)\cdot\frac{x+\frac{5a-5}{a-8}}{x+5}<0.$$

Для дальнейшего исследования придется рассмотреть три случая, в зависимости от величины числа $8-a$.

II а). Пусть $a\in(1;8)$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x+\frac{5a-5}{a-8}}{x+5}<0.$$

Поскольку при $a\in(1;8)$ справедливо неравенство $\frac{5a-5}{a-8}=5+\frac{35}{a-8}<$ <5, как и ранее, получаем $x_1<x_2$. Следовательно, метод интервалов

дает решение $x \in (x_1; x_2) = \left(-5; -5 + \frac{35}{8-a}\right)$. При $a \in (1; 8)$ выполнено $-5 + \frac{35}{8-a} > -5 + \frac{35}{8-1} = 0$. Найдем те a, при которых сумма всех положительных решений неравенства будет больше 8, но при этом меньше 15. Из соотношений

$$1+2+3=6<8, \quad 1+2+3+4=10>8, \quad 1+2+3+4+5=15.$$

вытекает, что $x_2 \in (4; 5]$, следовательно,

$$4 < -5 + \frac{35}{8-a} \leqslant 5 \iff 9 < \frac{35}{8-a} \leqslant 10 \iff \frac{35}{10} \leqslant 8-a < \frac{35}{9} \iff$$
$$\iff -\frac{9}{2} \leqslant -a < \frac{37}{9} \iff \frac{37}{9} < a \leqslant \frac{9}{2}.$$

Данные значения параметра a удовлетворяют условию задачи.

II b). Пусть $a = 8$. Тогда решений нет, так как получается неверное неравенство $0 > 0$.

II c). Пусть $a \in (8; +\infty)$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x + \frac{5a-5}{a-8}}{x+5} > 0.$$

Поскольку при $a \in (8; +\infty)$ справедливо неравенство $\frac{5a-5}{a-8} = 5 + \frac{35}{a-8} > 5$, то $x_1 > x_2$. Метод интервалов дает решение $x \in (-\infty; x_2) \cup (x_1; +\infty)$. И в этом случае среди решений положительных целых чисел x бесконечно много, следовательно условие задачи не выполнено.

Ответ: $a \in \left(\frac{37}{9}; \frac{9}{2}\right]$.

Пример 14.4. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{2x-y-3} + \sqrt{2y-x+3} = 2\sqrt{3-x-y}.$$

Решение. Найдем ОДЗ данного уравнения:

$$\begin{cases} 2x-y-3 \geqslant 0, \\ 2y-x+3 \geqslant 0, \\ 3-x-y \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y \leqslant 2x-3, \\ y \geqslant \frac{x-3}{2}, \\ y \leqslant 3-x \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x-3}{2} \leqslant y \leqslant 2x-3, \\ \frac{x-3}{2} \leqslant y \leqslant 3-x. \end{cases} \tag{14.1}$$

Из последней системы, как следствие получаем

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} \leqslant 2x-3, \\ \dfrac{x-3}{2} \leqslant 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geqslant 3, \\ 3x \leqslant 9 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

I. Пусть $x=1$. Тогда из (14.1) следует

$$\begin{cases} -1 \leqslant y \leqslant -1, \\ -1 \leqslant y \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow y=-1.$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $(x;y)=(1;-1)$ не является решением:

$$\sqrt{2+1-3}+\sqrt{-2-1+3}=0 \neq 2\sqrt{3-1+1}.$$

II. Пусть $x=2$. Тогда из (14.1) следует

$$\begin{cases} -1/2 \leqslant y \leqslant 1, \\ -1/2 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow y=0 \text{ или } y=1.$$

Подставим в исходное уравнение $(x;y)=(2;0)$:

$$\sqrt{4-0-3}+\sqrt{0-2+3}=2\sqrt{3-2-0}.$$

Таким образом, $(x;y)=(2;0)$ является решением исходного уравнения.

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что другая пара $(x;y)=(2;1)$ не является решением:

$$\sqrt{4-1-3}+\sqrt{2-2+3}=\sqrt{3} \neq 0 = 2\sqrt{3-2-1}.$$

III. Пусть $x=3$. Тогда из (14.1) следует:

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow y=0.$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что пара $(x;y)=$ $=(3;0)$ не является решением:

$$\sqrt{6-0-3}+\sqrt{0-3+3}=\sqrt{3} \neq 0 = 2\sqrt{3-3-0}.$$

Таким образом, единственное целочисленное решение данного уравнения: $(x;y)=(2;0)$.

Ответ: $x=2$, $y=0$.

Тренировочные задачи к § 14

1. Для каждого целого значения m найдите все решения уравнения
$$\log_{m^2/4+x^2}(3x)^{m^2+1}=m^2+1.$$

2. Найдите пары целых чисел m и n, удовлетворяющие уравнению:
$$6m^2-2n^2+mn=3.$$

3. При каком $x\in\{1,2,3,\ldots,98,99\}$ значение выражения
$$\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+2}}-2\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$
ближе всего к 73?

4. Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел (x,y), удовлетворяющая уравнению
$$-15x^2+11xy-2y^2=7$$
и неравенствам $x<y$, $2a^2x+3ay<0$.

5. Найдите все пары целых неотрицательных чисел $(k;m)$, являющихся решениями уравнения
$$2k^2+7k=2mk+3m+36.$$

6. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению
$$3xy-14x-17y+71=0.$$

7. Найдите все положительные значения параметра a, при которых в области определения функции $y=(a^x-a^{ax+2})^{-1/2}$ есть двузначные натуральные числа, но нет ни одного трехзначного натурального числа.

8. Найдите все целые решения (x,y,z) уравнения
$$x^2+5y^2+34z^2+2xy-10xz-22yz=0.$$

9. Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых выполнено равенство
$$\log_m(n-7)+\log_n(5m-17)=1.$$

10. Найдите все $x \in [-3; 1]$, для которых неравенство

$$x \cdot (\pi(x+1) - 4\,\mathrm{arctg}(3m^2 + 12m + 11)) > 0$$

выполняется при любых целых m.

11. Найдите все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие уравнению

$$m^2 + amn - bn^2 = 0,$$

где $a = 1953^{100}$, $b = 1995^{100}$.

12. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению:

$$\sqrt{2x + y - 4} + \sqrt{5 - x - 2y} = 2\sqrt{2 - x + y}.$$

13. Найдите все пары натуральных чисел t и s, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} 2t + 47 < 22s - 2s^2, \\ 4s \geqslant 7t + 14. \end{cases}$$

14. При каких значениях a система

$$\begin{cases} \sin(2\pi\sqrt{a^2 - x^2}) = 0, \\ 2 \cdot 3^{|ax|} + 3^{2-|ax|} \leqslant 19 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

15. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy.$$

16. Найдите наибольшие целочисленные значения u и v, для которых уравнение

$$364a^2u - 55v = -20020a^4$$

выполняется ровно при четырёх различных значениях a, два из которых относятся как $3:5$.

17. Количество сотрудников корпорации ежегодно возрастало в геометрической прогрессии и за 6 лет увеличилось на 20615 человек. Найдите первоначальную численность сотрудников корпорации.

18. Найдите все тройки целых чисел (x, y, z), удовлетворяющих неравенству

$$\log_2(2x+3y-6z+3)+\log_2(3x-5y+2z-2)+ \\ +\log_2(2y+4z-5x+2)>z^2-9z+17.$$

19. Найдите все целые числа x и y, удовлетворяющие равенству

$$9x^2y^2+6xy^2-9x^2y+2x^2+y^2-18xy+7x-5y+6=0.$$

20. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$14x^4-5y^4-3x^2y^2+82y^2-125x^2+51=0.$$

21. Найдите все целые значения a и b, при которых уравнение

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right)-b\cdot 2^{\sin(\pi bx)}-\left|\arcsin\left(\frac{\sqrt{b^2-x^2}}{b}\right)+b\cdot 2^{\sin(\pi bx)}\right|=2ab$$

имеет не менее 10 различных решений.

22. Найдите все значения a, при каждом из которых ровно пять различных наборов $(x; y; z)$ натуральных чисел x, y, z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 12x^2-4x-2xy+3y-9=0, \\ ayz+axz+axy>xyz. \end{cases}$$

§ 15
Системы уравнений и неравенств

Системы уравнений и неравенств уже встречались в предыдущих параграфах либо как разобранные примеры, либо как тренировочные задачи.

В этом параграфе мы напомним некоторые приемы, полезные при решении систем, и рассмотрим новые идеи, лежащие в основе ряда задач.

Начнем с понятия равносильности систем. Системы называются равносильными, если совпадают множества их решений. В частности, равносильны системы, не имеющие решений.

Пример 15.1. При каких значениях a системы уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ x^2+y^2=a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$$

равносильны?

Решение. При $a<0$ ни одна из систем не имеет решений и, следовательно, они равносильны.

При $a=0$ второе уравнение, общее для обеих систем, имеет единственное решение $x=0$, $y=0$, удовлетворяющее и первым уравнениям обеих систем. Поэтому системы равносильны и при $a=0$.

При $a>0$ второе уравнение задает окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в начале координат. Уравнение $\sin(x+y)=0$ равносильно бесконечной совокупности уравнений $x+y=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Графики этих прямых изображены на рисунке 98.

Системы равносильны тогда и только тогда, когда окружность, определяемая вторым уравнением, имеет общие точки только с прямой $x+y=0$, соответствующей $n=0$ в первой системе. Для этого необходимо и достаточно, чтобы ее радиус был меньше, чем расстояние от начала координат до прямой $x+y=\pi$, т. е. чем число $\pi/\sqrt{2}$. Итак, $0<\sqrt{a}<\pi/\sqrt{2}$ или $0<a<\pi^2/2$. Добавляя полученные ранее значения $a\leqslant 0$, получаем ответ.

Ответ: $a\in(-\infty;\pi^2/2)$.

Разложение на множители, подобное использованному в примере 14.2, полезно и в следующем примере.

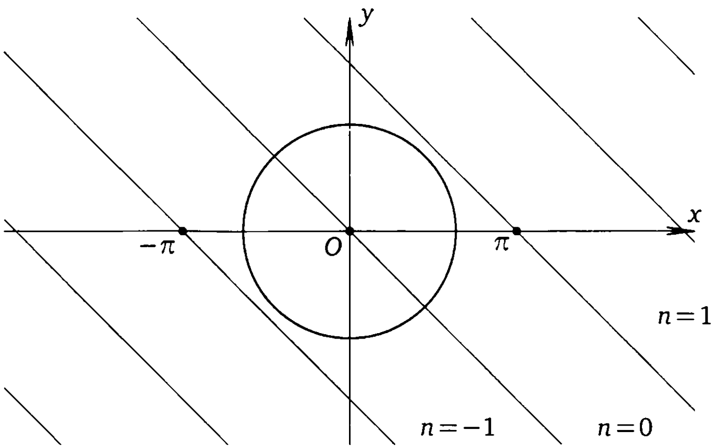

Рис. 98

Пример 15.2. При каждом значении a решите систему

$$\begin{cases} 6x^2+17xy+7y^2=a, \\ \log_{2x+y}(3x+7y)=3. \end{cases}$$

Решение. Пары $(x; y)$, дающие решение системы, должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} 3x+7y>0, \\ 2x+y>0, \\ 2x+y\neq 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $3x+7y=(2x+y)^3$. Осталось заметить, что тогда

$$6x^2+17xy+7y^2=(3x+7y)\cdot(2x+y)=(2x+y)^4.$$

Уравнение $(2x+y)^4=a$ при условиях $2x+y>0$ и $2x+y\neq 1$ имеет при $a>0$, $a\neq 1$ решение $2x+y=\sqrt[4]{a}$. Тогда $3x+7y=\sqrt[4]{a^3}$ и из полученной системы находим

$$x=\frac{7\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a^3}}{11}, \qquad y=\frac{2\sqrt[4]{a^3}-3\sqrt[4]{a}}{11}.$$

Ответ: При $a\in(-\infty; 0]\cup\{1\}$ решений нет, при $a\in(0; 1)\cup(1; +\infty)$ $(x; y)=((7\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a^3})/11; (2\sqrt[4]{a^3}-3\sqrt[4]{a})/11)$.

В следующих двух примерах полезно исследовать наибольшее и наименьшее значения, которые принимают входящие в систему функции.

Пример 15.3. При каждом a решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x-y)+2=0, \\ a^2+ax+ay-4=0. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение преобразуем к виду

$$x^2+2x+1+y^2-2y+1=0,$$

или

$$(x+1)^2+(y-1)^2=0.$$

Оно означает, что $x=-1$, $y=1$, поскольку при остальных значениях его левая часть больше 0. Подставим эти значения во второе уравнение и получим $a^2-4=0$, откуда $a=\pm 2$.

Таким образом, система имеет решение $x=-1$, $y=1$ при $a=\pm 2$, при остальных a решений нет.

Ответ: При $a=\pm 2$, $x=-1$, $y=1$, при остальных a решений нет.

Пример 15.4. При каких p данная система имеет решения:

$$\begin{cases} x^2+px+2=0, \\ \sin^2 \pi p+\sin^2 \pi x+2^{|y|}=\left|\sin \frac{\pi x}{2}\right|? \end{cases}$$

Решение. Поскольку $\sin^2 \pi p \geqslant 0$ и $\sin^2 \pi x \geqslant 0$, $|y| \geqslant 0$ и, значит, $2^{|y|} \geqslant 1$, левая часть второго уравнения системы не меньше, чем 1. Так как его правая часть не больше 1, оно равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2 \pi p=0, \\ \sin^2 \pi x=0, \\ 2^{|y|}=1, \\ \left|\sin \frac{\pi x}{2}\right|=1, \end{cases}$$

из которой находим, что $p \in \mathbb{Z}$, $x=2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, $y=0$.

Первое уравнение имеет целые коэффициенты и целый корень $x_1=2k+1$. Так как $x_1+x_2=-p$, x_2 — тоже целое число и из равенства $x_1x_2=2$ получаем, что x_1 — нечетное число, делящее число 2. Такими числами являются 1 и -1.

При $x=1$ находим $p=-3$, при $x=-1$ находим $p=3$.

Ответ: Система имеет решения при $p=\pm 3$.

Соображения симметрии, подобные использованным в примерах 8.1, 9.1, полезны при решении систем. Их можно использовать при решении тренировочных задач 5, 10, 12, 13 из параграфа 8 и задач 1, 5, 6, 7, 10, 11, 12 из параграфа 9.

Обратите внимание на логические рассуждения, использованные в следующем примере.

Пример 15.5. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a+(b^2+1)^y=2, \\ a+bxy+x^2y=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b.

Решение. Пусть a — искомое значение. Система имеет решение для любого значения b, поэтому выбираем значение b, при котором она становится проще, например, $b=0$. Тогда получим, что система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a+1=2, \\ a+x^2y=1 \end{cases}$$

имеет решение. Первое уравнение, т. е. уравнение $(x^2+1)^a+1=2$ при $a=0$ выполняется для любого x, а при $a\neq 0$ из него следует, что $x=0$, и тогда из второго уравнения получаем $a=1$. Итак, искомыми значениями могут быть только $a=0$ или $a=1$.

Если $a=0$, то первое уравнение принимает вид $(b^2+1)^y=1$, а второе:

$$bxy+x^2y=1.$$

Система, по условию, должна иметь решения при любом b, например, при $b=1$. Тогда первое уравнение дает $y=0$, а второе уравнение при этом обращается в неверное равенство $0=1$. Поэтому $a=0$ не является решением задачи.

Если же $a=1$, то первое уравнение принимает вид

$$x^2+1+(b^2+1)^y=2 \Longleftrightarrow x^2+(b^2+1)^y=1,$$

а второе: $bxy+x^2y=0$.

Для любого b пара чисел $(x;y)=(0;0)$ удовлетворяет обоим уравнениям и исходная система имеет решение.

Ответ: $a=1$.

В следующих примерах используются геометрические соображения.

Пример 15.6. При каждом a решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+a^2+2-2x-2a} + \sqrt{x^2+a^2-6x+9} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Решение. Запишем второе уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)^2+(a-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2+a^2} = \sqrt{5}.$$

Т. е. данное уравнение означает, что сумма расстояний от точки $(x; a)$ до точек $(1; 1)$ и $(3; 0)$ равно $\sqrt{5}$. Поскольку расстояние между точками $(1; 1)$ и $(3; 0)$ тоже равно $\sqrt{5}$, это означает, что точка $(x; a)$ должна лежать на отрезке, соединяющем точки $(1; 1)$ и $(3; 0)$ (рис. 99—101). Другими словами, она удовлетворяет уравне-

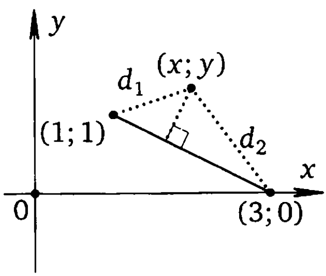

Рис. 99. $d_1 + d_2 > \sqrt{5}$.

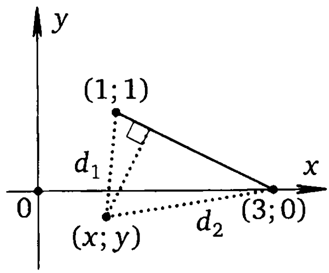

Рис. 100. $d_1 + d_2 > \sqrt{5}$.

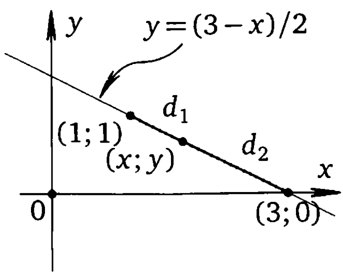

Рис. 101. $d_1 + d_2 = \sqrt{5}$.

нию $a = (3-x)/2$ и условию $x \in [1; 3]$. Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ 2a = 3 - x, \quad x \in [1; 3]. \end{cases}$$

Подставив $2a$ в первое уравнение, получаем

$$2^{1+x}=16(3-x)\sqrt{2} \iff 2^{x-7/2}=3-x \iff 2^{x-7/2}+x=3.$$

Поскольку функция $y=2^{x-7/2}+x$ — возрастающая (как сумма двух возрастающих), то каждое значение она принимает ровно один раз. Поэтому решение $x=5/2$ — единственное, ему соответствует $a=1/4$.

Ответ: Если $a=1/4$, то $x=5/2$, при остальных a нет решений.

Пример 15.7. Найдите все значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+5=b^2+2x-4y, \\ x^2+(12-2a)x+y^2=2ay+12a-2a^2-27 \end{cases}$$

имеет два решения $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$, удовлетворяющие условию:

$$\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}.$$

Решение. Последнее условие означает, что $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ принадлежат окружности с центром в точке $(0;0)$, так как

$$\frac{x_1+x_2}{y_2-y_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2} \iff \begin{cases} x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2, \\ x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2. \end{cases}$$

Выделив полные квадраты, перепишем исходную систему в следую-

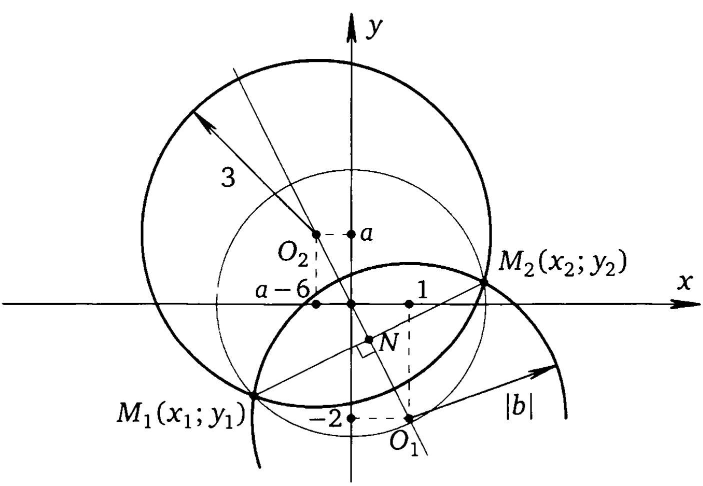

Рис. 102

щем виде

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=b^2, \\ (x+(6-a))^2+(y-a)^2=9. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений задает окружность с центром в точках $O_1(1;-2)$ и $O_2(a-6;a)$ соответственно. Таким образом, координаты точек $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ должны удовлетворять уравнениям сразу трех окружностей.

Рассмотрим сначала окружности с центрами в точках $O_1(1;-2)$ и $O(0;0)$. Пусть M_1, M_2 — точки пересечения этих окружностей, N — точка пересечения M_1M_2 с O_1O_2. Так как M_1M_2 — серединный перпендикуляр к OO_1, то точки O, N, O_1 лежат на одной прямой, перпендикулярной к M_1M_2. Аналогично рассмотрев окружности с центрами в точках $O_2(a-6;a)$ и $O(0;0)$, находим, что точки O, N, O_2 лежат на одной прямой, перпендикулярной к M_1M_2.

Таким образом, точки O, O_1, O_2 лежат на одной прямой, проходящей через точку N. Напишем уравнение прямой[1], проходящей через точки O_1 и O_2:

$$\frac{x-1}{a-6-1}=\frac{y+2}{a+2}.$$

Подставляя в уравнение прямой координаты точки $O(0;0)$, получаем

$$(-1)(a+2)=2(a-7) \iff 3a=12 \iff a=4.$$

Поэтому уравнение прямой, проходящей через точки O_1 и O_2, запишется в виде:

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{6} \iff y+2x=0.$$

Проверим выполнение условий $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ (для найденного $a=4$), вытекающих из ОДЗ данного примера. Если бы $x_1=x_2$ (либо $y_1=y_2$), то тогда прямая M_1M_2 была бы параллельна оси Oy (либо Ox), но это не выполняется, поскольку прямая M_1M_2 перпендикулярна прямой $y+2x=0$. (Прямая M_1M_2 имеет вид $x-2y=-1-b^2/6$.)

Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в двух точках тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$|R_2-R_1|<O_1O_2<R_1+R_2 \iff ||b|-3|<O_1O_2<|b|+3.$$

[1]Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (x_1,y_1), (x_2,y_2), записывается в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

В случае $x_2=x_1$ оно принимает вид $x=x_1$, а в случае $y_2=y_1$ — вид $y=y_1$.

Поскольку

$$O_1O_2 = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{45},$$

то

$$\sqrt{45} - 3 < |b| < \sqrt{45} + 3.$$

Ответ: $a = 4$, $\sqrt{45} - 3 < |b| < \sqrt{45} + 3$.

Тренировочные задачи к § 15

1. При всех значениях a решите систему

$$\begin{cases} x^2+4y^2=8a^2, \\ xy=2a^2. \end{cases}$$

2. При каких a система

$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ (x+4)^2+(y+3)^2=a. \end{cases}$$

имеет единственное решение?

3. При всех a решите систему неравенств:

$$\begin{cases} |2x+2a|>|x|+a, \\ ax<0. \end{cases}$$

4. Для каждого натурального значения k найдите площадь фигуры, задаваемой на плоскости (x, y) системой

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x \geqslant 0, \\ \sin y \leqslant 0, \end{array}\right. \\ -\pi k \leqslant x \leqslant \pi k, \\ -\pi k \leqslant y \leqslant \pi k. \end{cases}$$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 36^x-17\cdot 6^x+a<0, \\ 16\sin^4 \pi x-15=\cos 4\pi x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

6. Найдите все значения b, при которых система

$$\begin{cases} \log_3(9^x-y+b-8)=0, \\ y+3^x\cdot\sqrt{b-1}=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $(x_0; y_0)$, удовлетворяющее условию $x_0 \leqslant 0$.

7. Пусть (x, y) — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x+3y=a-2, \\ x^2+9y^2=2a+6. \end{cases}$$

При каком a произведение xy принимает наименьшее значение?

8. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}(25^x-9+a-y)=0, \\ y\cdot 5^{-x}+\sqrt{a-1}=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $(x_0; y_0)$, удовлетворяющее условию $x_0 \leqslant 0$.

9. Дана система уравнений

$$\begin{cases} y=a|x-3a|, \\ |x|=b-|y|. \end{cases}$$

а) При каких значениях a и b эта система относительно неизвестных x и y имеет бесконечно много решений?

б) На плоскости (x, y) изобразите множество точек, координаты которых таковы, что система относительно неизвестных a и b имеет ровно три решения.

10. При каких значениях a система

$$\begin{cases} |x-a|+|y-a|+|a+1-x|+|a+1-y|=2, \\ y+2|x-5|=6 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

11. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(|x|+|y|+|x-y|-\frac{2}{a}\right)\cdot\left(|x|+|y|-\frac{1}{a}\right)=0, \\ x^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

12. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a-f(x)}=0, \\ y^2+(a-5\cdot 10^6)y+25\cdot 10^{10}=0, \\ z^2+5\cdot 10^3\cdot z+a=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, где

$$f(x)=|x-1^2|+|x-2^2|+\ldots+|x-203^2|.$$

13. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (5-2\sqrt{6})^x+(5+2\sqrt{6})^x-5a=y-|y|-8, \\ x^2-(a-4)y=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

14. Найдите значения a и b такие, при которых система

$$\begin{cases} |bx|-|y|=2a, \\ (x-b)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

15. Для каждого допустимого значения a решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+a^2-2x-22a+122}=2\sqrt{37}-\sqrt{x^2+a^2+2x+2a+2}, \\ \log_{x+1}4+\log_a 4=0. \end{cases}$$

16. Для каждого значения a решите систему

$$\begin{cases} x^2+a^2-14x-10a+58=0, \\ \sqrt{x^2+a^2-16x-12a+100}+\sqrt{x^2+a^2+4x-20a+104}=2\sqrt{29}. \end{cases}$$

17. При каких значениях a система

$$\begin{cases} y^2-(2a+1)y+a^2+a-2=0, \\ \sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-3)^2}=3 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

18. Найдите все действительные значения a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+40-a^2=4y-y^2-12x, \\ x^2+y^2+(-2b-8)x=2by-2b^2-8b \end{cases}$$

имеет два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, удовлетворяющие условию

$$\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}=\frac{x_1+x_2}{y_2-y_1}.$$

19. Найдите все значения α, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 2^{x+y} \leqslant \dfrac{108\alpha - 161}{2\alpha - 3}, \\ 5 \cdot 2^{x+y} - 9 \cdot 4^y \geqslant 54 \end{cases}$$

имеет решение.

20. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^{3x^2+2y^2+8x-4y+8} + 2^{x^2+4y+5} \leqslant 33 \cdot 2^{2x^2+y^2+4x+4}, \\ x^2 + y^2 - 8x + 8y = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, но среди этих решений нет удовлетворяющих условию $x + y = 0$.

21. Найдите все значения a при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^{3x^2+2y^2+8x-4y+8} + 2^{2x^2+4y+5} \leqslant 33 \cdot 2^{x^2+y^2+4x+4}, \\ x^2 + y^2 - 8x + 8y = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, но среди этих решений нет решения, удовлетворяющего условию $x + y = 0$.

22. Найдите все значения a на отрезке $[0; \pi/2]$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x + \sqrt{3} \cdot y| + |y - \sqrt{3} \cdot x| = 2 \sin a, \\ (\sqrt{3} \cdot x + y)^2 + (\sqrt{3} \cdot y - x)^2 = 4 \cos a \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

23. При каких значениях b система

$$\begin{cases} (x + \sqrt{3}z)^2 + (y - \sqrt{3}t)^2 = 36 + 2 \cdot b \cdot \sqrt{36 - b^2}, \\ x^2 + y^2 = b^2, \\ z^2 + t^2 = (36 - b^2)/3 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

24. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\frac{y^2}{25} + \frac{\omega^2}{144},$$

если величины x, y, z, ω удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y-20=0, \\ z^2+\omega^2-2\omega-143=0, \\ x\omega+yz-x+\omega+2z-61\geqslant 0. \end{cases}$$

25. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3xy+3ax-ay-a^2-3=0, \\ 9x^2+9y^2-6ax+18ay+7a^2-2a-17=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Диагностическая работа 1

1. Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{x}{x+a} > 1.$$

2. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x-3a-1}{x+2a-2} \leqslant 0$$

выполняется для всех x из промежутка $2 \leqslant x \leqslant 3$.

3. Для каждого значения a решите уравнение

$$9a^2 + \log_2^2 x + 3\arccos(x-1) - (3a-1)\log_2 x^2 - 6a + 1 = 0.$$

4. Квадратное уравнение

$$x^2 - 6px + q = 0$$

имеет два различных корня x_1 и x_2. Числа p, x_1, x_2, q — четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите x_1 и x_2.

5. При каких значениях a уравнение

$$|x| + \left|\frac{x+1}{3x-1}\right| = a$$

имеет ровно три решения?

6. Найдите все значения p, при которых уравнение

$$6\sin^3 x = p - 5\cos 2x$$

не имеет корней.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6|x| - 6|y| + 17 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 - 2y = a^2 - 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Диагностическая работа 2

1. Для каждого значения a решите неравенство

$$|x+a| < x.$$

2. При каких значениях a функция

$$y = \frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$$

имеет максимум при $x = 4$?

3. Найдите наибольшее значение a, при котором уравнение $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен -2.

4. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

5. При каких действительных p уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = p - 4^{-x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет решение?

6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$||x+a| - 2x| - 3x = 7|x-1|$$

имеет не более одного корня.

7. Для каждого целого значения m найдите все решения уравнения

$$\log_{m^2/4+x^2}(3x)^{m^2+1} = m^2+1.$$

Диагностическая работа 3

1. Для каждого значения a решите неравенство
$$\frac{a}{x+a} > 1.$$

2. При каких положительных значениях a неравенство
$$\frac{a+2x}{ax-4} \geqslant \frac{5}{x}$$
справедливо для всех $x > 10$?

3. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$$
не имеет решений.

4. При каких значениях a четыре корня уравнения
$$x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$$
являются последовательными членами арифметической прогрессии?

5. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$
имеет единственное решение.

6. При каких значениях q система
$$\begin{cases} x^2 + qx + 3 = 0, \\ \sin^2 q\pi + \cos^2 \frac{\pi}{2}x + 2^{y^2} = \sin \frac{\pi}{2}x \end{cases}$$
имеет решения? Найдите ее решения.

7. При каждом значении b решите неравенство
$$\sqrt{x + 4b^2} > x + 2|b|.$$

Диагностическая работа 4

1. Для каждого значения a решите уравнение
$$x|x+1|+a=0.$$

2. Найдите все значения b, при которых уравнение
$$x-2=\sqrt{2(b-1)x+1}$$
имеет единственное решение.

3. Для каждого допустимого значения a решите неравенство
$$a^x(a-1)^x-2a^{x+1}-(a-1)^x+2a\leqslant 0$$
и найдите, при каких значениях a множество решений неравенства представляет собой промежуток длины 2.

4. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right|=a^2+1$$
имеет нечётное число решений.

5. Найдите наибольшее значение a, при котором неравенство
$$a\sqrt{a}(x^2-2x+1)+\frac{\sqrt{a}}{x^2-2x+1}\leqslant\sqrt[4]{a^3}\cdot\left|\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right|$$
имеет хотя бы одно решение.

6. Найдите все значения a, при которых уравнение
$$\big||x-a|+2x\big|+4x=8|x+1|$$
не имеет ни одного корня.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел (x, y), удовлетворяющая уравнению
$$-15x^2+11xy-2y^2=7$$
и неравенствам $x<y$, $2a^2x+3ay<0$.

Диагностическая работа 5

1. Для каждого значения a решите неравенство

$$\frac{(x-1)(x-a)}{x-\frac{a+1}{2}}>0.$$

2. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$|x^2+4x-a|>6$$

не имеет решений на отрезке $[-3; 0]$.

3. Решите уравнение

$$(x-1)^6(\sin 4x+\sin 4)^{1/6}+(x+1)^6(\sin 2-\sin 2x)^{1/6}=0.$$

4. Уравнение $ax^2+bx+2=0$, где $a<0$, имеет одним из своих корней число $x=3$. Решите уравнение

$$ax^4+bx^2+2=0.$$

5. Найдите все значения α, при которых уравнение

$$x^2+\frac{6x}{\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{9\sqrt{3}}{\cos\alpha}+36=0$$

имеет единственное решение.

6. Для каждого значения a, удовлетворяющего условию $0<a<2$, найдите наименьшее значение выражения

$$x^2+y^2-2a(x+y),$$

если $\cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right)=1$.

7. Для каждого значения a, принадлежащего отрезку $[-1, 0]$, решите неравенство

$$\log_{x+a}(x^2-(a+1)x+a)\geqslant 1.$$

Диагностическая работа 6

1. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$5|x-3a|+|x-a^2|+4x=a$$

1) имеет бесконечное множество решений, 2) не имеет решений.

2. При каких значениях a уравнение

$$(a-1)\cdot 4^x+(2a-3)\cdot 6^x=(3a-4)\cdot 9^x$$

имеет единственное решение?

3. Для каждого значения a решите неравенство

$$(x^2+2x-a^2-4a-3)(\sin x+2x)>0.$$

4. При каких значениях b система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ |y|-x=b \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

5. Найдите все значения b, при каждом из которых неравенство

$$(3-2\sqrt{2})^x+(b^4+12-6b^2)\cdot(3+2\sqrt{2})^x+9^t+b^2/4+b\cdot 3^t-\sqrt{12}\leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение (t,x).

6. Найдите все значения a, при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a$$

существуют и принадлежат отрезку $[2;17]$.

7. Найдите все пары целых чисел m и n, удовлетворяющие уравнению

$$m^2+amn-bn^2=0,$$

где $a=1953^{100}$, $b=1995^{100}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите все значения α, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+(y+4\sqrt{2})^2=16, \\ (x-\cos\alpha)^2+(y-\sin\alpha)^2=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-6)^2+(|y|-6)^2=4, \\ y=ax+1, \\ xy>0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. Известно, что значение a таково, что система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y}=4^{|x|}, \\ \log_2(x^4y^2+2a^2)=\log_2(1-ax^2y^2)+1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это значение a и решите систему при этом найденом значении.

4. Для каждого значения a решите уравнение

$$4\cos x\sin a+2\sin x\cos a-3\cos a=2\sqrt{7}.$$

5. Найдите значения a, для каждого из которых при любом значении b имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} (1+5x^2)^a+(b^2-6b+10)^y=2, \\ x^2y^2+(b-3)xy+a^2+2a=3. \end{cases}$$

6. Найдите все значения α, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x=\cos(x\sqrt{6-2a^2}), \\ \cos x=(a-2/3)\sin(x\sqrt{6-2a^2}) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение на отрезке $[0;2\pi]$.

7. Найдите значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $x^2-4x\leqslant a-3$ и $x^2+2a\leqslant 2x$ образуют на числовой оси отрезок длиной 1.

8. Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$y(x)=\log_{25-a^2}(\cos x+\sqrt{8}\sin x-a)$$

определена при всех значениях x.

9. Для каждого значения a решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+a^2-2x+2a+2}=\sqrt{37}-\sqrt{x^2+a^2-4x-10a+29}, \\ \log_{x-1}7+\log_a 7=0. \end{cases}$$

10. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\frac{x^2}{64}+\frac{z^2}{49},$$

если величины x, y, z, ω удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x-4y-51=0, \\ z^2+\omega^2+2z+8\omega-32=0, \\ x\omega+yz+4x-3\omega+y-2z-70\geqslant 0. \end{cases}$$

11. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2xy-ax-2ay+a^2-2=0, \\ 4x^2+4y^2-8ax-4ay-7a^2-20a=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

12. При каких значениях a система

$$\begin{cases} (x+\sqrt{2}z)^2+(y+\sqrt{2}t)^2=25+2a\sqrt{25-a^2}, \\ x^2+y^2=a^2, \\ z^2+t^2=(25-a^2)/2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

13. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^2-(2a-2)x+a^2-2a-3=0, \\ \sqrt{(y-a)^2+x^2}+\sqrt{(y-a)^2+(x-4)^2}=4 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

14. Для каждого значения a решите систему

$$\begin{cases} x^2+a^2+2x-14a-14=0, \\ \sqrt{x^2+a^2-18x+4a+85}+\sqrt{x^2+a^2+6x-12a+45}=4\sqrt{13}. \end{cases}$$

15. Найдите все значения b из интервала $[0; \pi/2]$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |\sqrt{3}\cdot x + y| + |\sqrt{3}\cdot y - x| = 2\cos b, \\ (x + \sqrt{3}\cdot y)^2 + (y - \sqrt{3}\cdot x)^2 = 4\sin b \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

16. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 7^{2x^2+2y^2+13x+10y+13} + 7^{x+2y-8} \leqslant 344\cdot 7^{x^2+y^2+7x+6y+1}, \\ x^2 + y^2 - 18x - 12y = a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, но среди этих решений нет удовлетворяющих условию $2x = 3y$.

17. При каких значениях a неравенство

$$\log_{(2a-15)/5}\left(\frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x + a - 5}{5}\right) > 0$$

выполняется при всех x?

18. При каких значениях a уравнение

$$2\cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1})$$

имеет хотя бы одно решение?

19. Найдите все значения a, при которых среди корней уравнения

$$\sin 2x + 6a\cos x - \sin x - 3a = 0$$

найдутся два корня, разница между которыми равна $3\pi/2$.

20. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(a^2 - 6a + 9)(2 + 2\sin x - \cos^2 x) + (12a - 18 - 2a^2)\cdot(1 + \sin x) + a + 3 = 0$$

не имеет решений.

21. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$|3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a| \leqslant 3$$

выполняется для любых значений x.

22. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

23. Найдите все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} xyz+z=a, \\ xyz^2+z=b, \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$$

имеет только одно решение.

24. Найдите все значения b, при которых уравнение

$$2b^2-b\sin\left(\pi\cdot\frac{x^2-16x-2}{12}\right)-1=$$
$$=\frac{3}{\pi}\arcsin(2-x/4)\log_{\sqrt{5}+2}(8-x+\sqrt{x^2-16x+65})$$

имеет единственное решение, и определите это решение.

25. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого b система

$$\begin{cases} az^2=y-bx, \\ (2b+3)x=by-2z+1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y; z)$.

26. Найдите все значения , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |3x-y+2|\leqslant 12, \\ (x-3a)^2+(y+a)^2=3a+4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

27. Найдите все значения a из интервала $(-\pi; \pi)$, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+y^2-1)(6y-x^2-15)=0, \\ y\cos a+x\sin a=1 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

28. Найдите все значения a, при каждом из которых множество точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+8x-12y+38}{x^2+y^2+10x-14y+72}\leqslant 0, \\ (x+a)(y-a)=0, \end{cases}$$

является отрезком.

29. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{a^2x+2a}{ax-2+a^2} \geqslant 0, \\ ax+a>5/4 \end{cases}$$

не имеет решений.

30. Решите уравнение

$$\frac{3\cos x+2\sin x}{\cos x} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x+\sin x}{\cos x} \cdot \sqrt{3+2x-2y+2xy-x^2-y^2}.$$

31. При каких значениях a уравнение

$$(\sin x - \log_4 a)\cdot(\sin x - 2+2a) = 0$$

имеет ровно два корня на отрезке $[\pi/2; 5\pi/2]$?

32. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(a-1)\cos^2 x - (a^2+a-2)\cos x - 2a^2 - 2a + 1 = 0$$

имеет более одного решения на отрезке $[0; 4\pi/3]$.

33. При каких значениях a уравнение

$$(1+\sin(3ax))\sqrt{5\pi x - x^2} = 0$$

имеет ровно пять различных корней?

34. При каких значениях a, принадлежащих интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, уравнение

$$\sqrt{2\sin(x-a)+\sqrt{3}} = \cos 6x - 1$$

имеет решения?

35. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(|a|-1)\cos 2x + (1-|a-2|)\sin 2x + (1-|2-a|)\cos x + (1-|a|)\sin x = 0$$

имеет нечётное число решений на интервале $(-\pi; \pi)$.

36. Найдите все значения a, при каждом из которых расстояние между любыми двумя соседними корнями уравнения

$$\cos\alpha\cos 3x - \sin 3\alpha\cos x + 2\sin 2\alpha\cos 2x = 3\sin\alpha - \cos 3x$$

не превосходит $\pi/3$.

37. Найдите все a, при которых система

$$\begin{cases} |x| + 2|y| + |2y - 3x| = 12, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

38. Найдите все a, при которых система

$$\begin{cases} |x+1| + |x-1| - 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2ay + 2a = 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

39. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (5 - 2\sqrt{6})^x + (5 + 2\sqrt{6})^x - 5a = y - |y| - 8, \\ x^2 - (a-4)y = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

40. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi x}{1+x^2}\right) + \frac{6a}{2 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)} + a^2 + 3 = 0$$

имеет единственное решение.

41. Найдите все значения a и b, при которых система

$$\begin{cases} (x-y)^2 + 4|x| + 4(y-x) = -b^2 - 2a - 5, \\ |y - x + 2| - |-y-2| = a^2 - 2b + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

42. При каждом значении a решите систему

$$\begin{cases} 4\sqrt{x-a} + \sqrt{y+a} \leqslant 38 - \dfrac{64}{\sqrt{x-a}} - \dfrac{9}{\sqrt{y+a}}, \\ 3^{13-x} \log_3(y-9) = 1. \end{cases}$$

43. Для каждого значения a решите систему

$$\begin{cases} 4\log_{25}^2 x + 9\log_{125}^2 y \leqslant 9(a^2 - 2a), \\ \log_5^2(x/y) \geqslant 18(a^2 - 2a). \end{cases}$$

44. Найдите все значения b, при каждом из которых неравенство
$(b^4+12-6b^2)\cdot(2+\sqrt{3})^z+(2-\sqrt{3})^z+9^y+3b^2+b\sqrt{12}\cdot 3^y-\sqrt{12}\leqslant 0$
имеет хотя бы одно решение (y, z).

45. Найдите наименьшее значение z, при котором имеет решение система

$$\begin{cases} z-8\cos^2\dfrac{3y}{8}-2\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{3y}{8}=2\cos^2 2x, \\ 2\pi(1+|x|)\cos 3y+|x|(\pi\sin^2 3y-16-2\pi)=0. \end{cases}$$

46. Найдите все пары чисел x и y, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 3^{x+2y-1}+2\cdot 3^{3y-1}\leqslant 2, \\ x+5y\geqslant 2-\log_3 2. \end{cases}$$

47. Найдите наибольшее значение b, при котором неравенство

$$\sqrt{b^5}(8x-x^2-16)+\frac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}\geqslant -\frac{2b}{3}\cdot|\cos(\pi x)|$$

имеет хотя бы одно решение.

48. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} ya^2+x=2a, \\ (|y|+|1+y|-1)(xy-1)=0 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

49. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{(11-x-3a)^2+(y-4a+4)^2}\leqslant \dfrac{|a-1|}{5}, \\ 4x+3y\geqslant -12 \end{cases}$$

не имеет решений.

Ответы

Подготовительные задачи. 1. а) $a\in(-2;1)$, б) $a=-2$, $a=1$, в) $a<-2$, $a>1$. **2.** а) $a\in(0;2]$, б) $a\in(2;3)$, в) $\varnothing$, г) $a\leqslant 0$, $a\geqslant 3$. **3.** а) $a<-1$, $a>1$, б) $a\in(-1;1)$, в) $a=-1$, $a=1$, г) $\varnothing$. **4.** Если $a=0$, то $x\in\varnothing$; если $a\neq 0$, то $x=1/a$. **5.** Если $a=0$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a>0$, то $x<1/a$; если $a<0$, то $x>1/a$. **6.** Если $a=0$, то $x\in\varnothing$; если $a>0$, то $x\geqslant 1/a$; если $a<0$, то $x\leqslant 1/a$. **7.** Если $a=-3$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a=3$, то $x\in\varnothing$; если $a\neq\pm 3$, то $x=1/(a-3)$. **8.** Если $a=5$, то $x\in\varnothing$; если $a\neq 5$, то $x=a$. **9.** При $a=-2$ не имеет смысла; если $a\neq -2$, то $x=a$. **10.** Если $a=\pm 1$, то $x\in\varnothing$; если $a\neq\pm 1$, то $x=-1$. **11.** Если $a=0$, то $x\neq 4$; если $a=4$, то $x\in\varnothing$; если $a\neq 0,4$, то $x=a$. **12.** Если $a<0$, то $x\in\varnothing$; если $a>0$, то $x=\pm\sqrt{a}$; если $a=0$, то $x=0$. **13.** Если $a>0$, то $x\in\varnothing$; если $a<0$, то $x=\pm\sqrt{-a}$; если $a=0$, то $x=0$. **14.** Если $a<0$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a\geqslant 0$, то $x\in(-\infty;-\sqrt{a})\cup(\sqrt{a};+\infty)$. **15.** Если $a>0$, то $-\sqrt{a}\leqslant x\leqslant\sqrt{a}$; если $a=0$, то $x=0$; если $a<0$, то $x\in\varnothing$. **16.** При любом a $x=\sqrt[3]{a}$. **17.** При любом a $x>\sqrt[3]{a}$. **18.** При любом a $x\leqslant-\sqrt[3]{a}$. **19.** Если $a<0$, то $x\in\varnothing$; если $a\geqslant 0$, то $x=\pm a$. **20.** При любом a $x=|a|$. **21.** Если $a\leqslant 0$, то $x\in\varnothing$; если $a>0$, то $x\in(3-a;3+a)$. **22.** Если $a<0$, то $x\in\mathbb{R}$; если $a\geqslant 0$, то $x\in(-\infty;3-a)\cup(3+a;+\infty)$. **23.** При $a>0$, $x\in\varnothing$; при $a\leqslant 0$, $x=a^2$. **24.** При $a=0$, $x\geqslant 0$; при $a\neq 0$, $x=0$. **25.** При $a<0$, $x\geqslant 0$; при $a\geqslant 0$, $x>a^2$. **26.** При $a\leqslant 0$, $x\in[0;a^2]$; при $a>0$, $x\in\varnothing$. **27.** При $a\leqslant 0$, $x>0$; при $a>0$, $x\in[-\sqrt{a};0)\cup[\sqrt{a};+\infty)$. **28.** При $a\leqslant 0$, $x<0$; при $a>0$, $x\in(-\infty;-\sqrt{a})\cup(0;\sqrt{a})$. **29.** При $a\leqslant 0$, $x\in\varnothing$; при $a>0$, $x<\log_2 a$. **30.** При $a\leqslant 0$, $x\in\varnothing$; при $a>0$, $x>-\log_2 a$. **31.** При $a\leqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$; при $a>0$, $x\leqslant-\log_2 a$. **32.** При $a\leqslant 0$, $x\in\mathbb{R}$; при $a>0$, $x\geqslant\log_2 a$. **33.** При $a\in(0;1)$, $x>a$; при $a>1$, $x\in(0;a)$; при $a\leqslant 0$, $a=1$ выражение не определено. **34.** При $a\leqslant 0$ выражение не определено; при $a\in(0;1)$, $x\in(0;a)\cup(1;+\infty)$; при $a\geqslant 1$, $x\in(0;1)\cup(a;+\infty)$. **35.** При $|a|\leqslant 1$, $x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; при $|a|>1$, $x\in\varnothing$; **36.** При $a\in(-\infty;0)$, $x\in\varnothing$; при $a\in[0;1]$, $x=\pm(1/2)\arccos(2a-1)+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; при $a>1$, $x\in\varnothing$. **37.** При любом a, $x=\operatorname{arctg} a+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **38.** При $a\in(-\infty;0)$, $x\in\varnothing$; при $a\in[0;1]$, $x=\pm\arcsin a+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; при $a>1$, $x\in\varnothing$. **39.** При $|a|>1$, $x\in\varnothing$; при $a\in[-1;1]$, $x=\pm\arccos a+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **40.** При $a\in(-\infty;0)\cup(\pi;+\infty)$, $x\in\varnothing$; при $a\in[0;\pi]$, $x=\cos a$. **41.** При $a\in(-\infty;-\pi/2)\cup(\pi/2;+\infty)$, $x\in\varnothing$; при $a\in[-\pi/2;\pi/2]$, $x=\sin a$. **42.** При $a\in(-\infty;-1]$, $x\in\varnothing$; при $a\in(-1;1]$, $x\in(\pi-\arcsin a+2\pi n;\arcsin a+2\pi+2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$; при $a>1$, $x\in\mathbb{R}$. **43.** При $a\in(-\infty;-1]$, $x\in\mathbb{R}$; при $a\in(-1;1]$, $x\in[\arcsin a+2\pi n;\pi-\arcsin a+2\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$; при $a>1$, $x\in\varnothing$. **44.** При $a\in(-\infty;-1)$, $x\in\varnothing$; при $a\in[-1;1)$, $x\in[\arccos a+2\pi n;-\arccos a+2\pi+2\pi n]$, $n\in\mathbb{Z}$; при $a\geqslant 1$, $x\in\mathbb{R}$. **45.** При $a\in(-\infty;-1)$, $x\in\mathbb{R}$; при $a\in[-1;1)$, $x\in(-\arccos a+2\pi n;\arccos a+2\pi n)$, $n\in\mathbb{Z}$; при $a\geqslant 1$, $x\in\varnothing$. **46.** При $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 1;0\}$, $x\in\varnothing$; при $a=-1$, $x=-\pi/2+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; при $a=1$, $x=\pi/2+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; при $a=0$ выражение не определено. **47.** $a>1/4$. **48.** $a\in[2;4)$. **49.** $a=12$; $a=13$. **50.** $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **51.** При $a\in(-\infty;1-\sqrt{2})$, $x\in\varnothing$; при $a\in[1-\sqrt{2};0)$, $x=(-a-1\pm\sqrt{-a^2+2a+1})/a$; при $a=0$, $x=0$; при $a\in(0;1+\sqrt{2}]$, $x=(-a-1\pm\sqrt{-a^2+2a+1})/a$; при $a\in$

$\in (1+\sqrt{2};+\infty)$, $x\in\varnothing$. **52.** $a=2$, $a=9/2$. **53.** $a=1$. **54.** $a\in[2;9/4)$. **55.** $a\in$ $\in[3;15/4]$. **56.** $a\in(2;5)$.

Диагностическая работа. 1. $a=150$. **2.** если $a<0$, то $x\in(-\infty;+\infty)$, если $a\geqslant 0$, то $x\in(-\infty;-2a)\cup(0;+\infty)$. **3.** $[3-\sqrt{6};2]\cup[5;3+\sqrt{6}]$. **4.** При $a\leqslant -1/\sqrt[4]{12}$ решений нет; если $-1/\sqrt[4]{12}<a<0$, то $x\in((-1+\sqrt{1-12a^4})/2a;$ $(-1-\sqrt{1-12a^4})/2a)$; если $a=0$, то $x\in(0;+\infty)$; если $0<a\leqslant 1/\sqrt[4]{12}$, то $x\in(-\infty;(-1-\sqrt{1-12a^4})/2a)\cup((-1+\sqrt{1-12a^4})/2a;+\infty)$; при $a>1/\sqrt[4]{12}$, $x\in(-\infty;+\infty)$. **5.** $a=4$, $a=-8$. **6.** При $a\leqslant -1/\sqrt[4]{12}$ решений нет; при $-1/\sqrt[4]{12}<a<0$, $x\in((-1+\sqrt{1-12a^4})/2a;(-1-\sqrt{1-12a^4})/2a)$; при $a=$ $=0$, $x\in(0;+\infty)$; при $0<a\leqslant 1/\sqrt[4]{12}$, $x\in(-\infty;(-1-\sqrt{1-12a^4})/2a)\cup$ $\cup((-1+\sqrt{1-12a^4})/2a;+\infty)$; при $a>1/\sqrt[4]{12}$, $x\in(-\infty;+\infty)$. **7.** $a=7$, корни уравнения 2, 4, 8. **8.** $a=2$. **9.** $a=1/8$. **10.** $y=6$. **11.** $a\in[1;2)\cup(2;3]$. **12.** $a\in$ $\in[-8;6]$. **13.** Для $a<0$ решений нет, для $a\in[0;1/8]$, $x\in(0;1-2\sqrt{2a})$, для $a\in(1/8;1/2]$, $x\in(1-2\sqrt{2a};0)$, для $a>1/2$, $x\in[-2a;0)$. **14.** При $1<|a|\leqslant\sqrt{2}$, $(x;y)=(1;1)$, при $0<|a|\leqslant 1$, $(x;y)=(1;1)$, $(2;1)$, $(1;2)$, при $a=0$, $(x;y)=$ $=(1;1)$, $(2;1)$, $(1;2)$, $(3;1)$, $(1;3)$, при $|a|>\sqrt{2}$ решений нет.

Тренировочные задачи к § 1. 1. $a\in(0;1)$. **2.** $b=225$. **3.** $b=-\sqrt{2}$. **4.** $a\in$ $\in(1;2)$. **5.** $(1;-1)$, $(-1/5;7/5)$. **6.** $a=0$, 1. **7.** При $c\leqslant 0$, $x=\log_{2/5}\dfrac{3+\sqrt{9-4c}}{2}$, при $0<c\leqslant 9/4$, $x=\log_{2/5}((3\pm\sqrt{9-4c})/2)$, при $c>9/4$ решений нет. **8.** При $b\leqslant -1$, $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$, при $-1<b\leqslant 0$, $x\in[-1/\sqrt{1-b^2};-1]\cup[1;+\infty)$. **9.** *1.* Если $a\in(0;1/2)$, то $x\in(-3^a;-1)\cup(1;3^a)$; если $a>1/2$, то $x\in(-\infty;-3^a)\cup$ $\cup(3^a;+\infty)$; *2.* при $a=1$. **10.** При $c\in(-\infty;1)$, решений нет; при $c\in[1;2)$, $x\in[-2\sqrt{c-1};2\sqrt{c-1}]$; При $c\in[2;+\infty)$ $x\in[-c;c]$. **11.** Если $a<1$, то $x\in$ $\in[-1;(\frac{a-2}{a-1})^2-1)$; если $a\in[1;2)$, то $x\geqslant -1$; если $a\geqslant 2$, то $x>(\frac{a-2}{a-1})^2-1$. **12.** $p=7$. *Указание*: сумма коэффициентов любого многочлена равна его значению в точке 1. **13.** Если $b\in(0;1)$, то $x\in(0;1)\cup(1;b^{-3})$; если $b\in(1;+\infty)$, то $x\in(b^{-3};1)\cup(1;+\infty)$. **14.** При $a\in(0;1]$, $x=\pm((1-a^2)/2a)^2$, при других a решений нет. **15.** 1. Для $a\in(-2;-3)$, $x\in\mathbb{R}$, для $a\in(-\infty;-2]\cup[-3;+\infty)$, $x\in$ $\in(-\infty;3-\sqrt{a^2+5a+6})\cup(3+\sqrt{a^2+5a+6};+\infty)$; 2. $a\in((-5-\sqrt{13})/2;-3]\cup$ $\cup[-2;(-5+\sqrt{13})/2)$.

16. $x=0$, a при любом a, $x=(a\pm\sqrt{a^2-72})/6$ при $|a|\geqslant 6\sqrt{2}$. **17.** $a\in(7;7.5)\cup$ $\cup(7.5;+\infty)$. **18.** $a\in(1/15;1/8)\cup(1/8;4/15]\cup\{1/2\}\cup[1;4)$. **19.** При $p=0$ корень один $x=0$, при $p=7$ корень один $x=7^4/2$, при $p>7$ два положительных корня. **20.** $b\in(0;1/50)\cup(25/2;+\infty)$. **21.** $(-\infty;0]$. **22.** $a=0$, $a\in$ $\in[-9;-1/4]$. **23.** $p\in(-\infty;0]\cup[3:+\infty)$. **24.** Если $a\in(-\infty;-5)$, то решений нет, если $a=-5$, то $x=0$, если $a\in(-5;1)$, то $x\in[0;(a+5)^2]$, если $a\in$ $\in[1;+\infty)$, то $x\in[(a-1)^2;(a+5)^2]$. **25.** $a\in\{-1\}\cup[-1/2;0)\cup(0;1/2]\cup\{1\}$. **26.** $a\in[-9/10;0)\cup(2;9/4)\cup(9/4;19/8)$. **27.** $a=2$, $b=3$. **28.** $a=-1.2$; $a=$ $=-0.67$. **29.** $a=-3/4$, $a=0$, $a=2/9$. **30.** $a\in(0;1/54)$.

Тренировочные задачи к § 2. **1.** При $a<0$, $x=(-1+\sqrt{1-4a})/2$; при $a=0$, $x=0,-1$, при $a\in(0;1/4)$, $x=(-1-\sqrt{1+4a})/2$, $x=(-1\pm\sqrt{1-4a})/2$; при $a=1/4$, $x=(-1-\sqrt{2})/2$, $x=-1/2$; при $a>1/4$, $x=(-1-\sqrt{1+4a})/2$. **2.** Если $a<-1$, то $x\in(0;-a-\sqrt{a^2-1}]\cup[-a+\sqrt{a^2-1};-a+\sqrt{a^2+1}]$; если $a\geqslant-1$, то $x\in(0;-a+\sqrt{a^2+1}]$. **3.** $a\in[4/3;2]$. **4.** При $a<-1$, $x=4$; при $a=-1$, $x\geqslant4$; при $a\in(-1;1)$, $x=4$, $x=4(a-2)/(a+1)$; при $a=1$, $x\in[-2;4]$; при $a>1$, $x=4$. **5.** $a=0$, $a=1$. **6.** $a\geqslant2/3$. **7.** 1) Не имеет решений для $(-23;0)$, 2) имеет конечное непустое множество решений для $(-\infty;-23)\cup(0;+\infty)$. **8.** При $a=-2$, $x=-1$, $15/17$, $17/15$, при $a=-1/8$, $x=-1/136$, 0, $1/120$. **9.** *a*) $a\in(-5/2;7)$, *b*) $a\in[(9-\sqrt{211})/2;-5/2]\cup\{7\}$. **10.** $(\pi/2+2\pi n;0)$, $n\in\mathbb{Z}$, $(-3\pi/2;t)$, $t\in\mathbb{R}$. **11.** $a=2\pm\sqrt{2}$. *Указание*: сделать замену $b=a-2$, $t=(x-2)/b$.

Тренировочные задачи к § 3. **1.** $[2-\sqrt{10};1]\cup[5;2+\sqrt{10}]$. **2.** $a\in(-\infty;-1/2)\cup[2/3;+\infty)$. **3.** $a\in[2/5;11/2]$. **4.** При $a\in\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right)$ одно решение; при $a=-\frac{5}{4}$ два решения; при $a\in\left(-\frac{5}{4};-1\right)$ три решения; при $a\in[-1;1-\sqrt{2})$ два решения; при $a=1-\sqrt{2}$ одно решение; при $a\in(1-\sqrt{2};5)$ два решения; при $a\in[5;+\infty)$ одно решение. **5.** $q\in(-\infty;0]\cup[12;+\infty)$. **6.** $a\in[-6;2]$. **7.** $a\in[-1;-1/5]$. **8.** $x\in(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Тренировочные задачи к § 4. **1.** $a=12$. **2.** $a=2$. **3.** $a\in(-\infty;1]\cup\{5/4\}\cup[4/3:+\infty)$. **4.** $|a|\leqslant3$. **5.** $a\in(-\infty;20]$. **6.** $a\in(0;1/8)$. **7.** $a>-2\sqrt{2}$. **8.** $a=2$. *Указание*: квадратное уравнение должно иметь хотя бы один положительный корень. **9.** 1) $(1;(2+\sqrt{13})/4]$; 2) $b=7/3$. **10.** $a\in(2;+\infty)$. **11.** $(-\infty;-3/2]$. **12.** При $a<0$ решений нет; при $a=0$, $x\in(0;+\infty)$; при $a>0$, $x\in[-a/3;0)$, $(8a;+\infty)$. **13.** $b\in(-\infty;-1/4)\cup(-1/4;0)\cup(0;1/4)\cup(1/4;+\infty)$. **14.** $a\in(-1/3;3/10]\cup\{1\}$. **15.** a) $2+\sqrt{2}$, b) $(-\infty;2-\sqrt{2})\cup\{1\}\cup(2+\sqrt{2};+\infty)$.

Тренировочные задачи к § 5. **1.** $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **2.** При $a=(1-\sqrt{2})/2$. **3.** $x=-1$, $y=-2$. **4.** $x=0$, $y=\pm1$. **5.** $x=\sqrt{3}$. **6.** $(x;y;z)=(1;5;0)$, $(1;-5;0)$, $(-1;5;0)$, $(-1;-5;0)$. **7.** $a=-3$, $a=9$. **8.** $a=0$, $a=1$. **9.** $x=\pm1$, $-1+\pi/2+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **10.** При $b=-1/2$ решение $(1/\sqrt[8]{8};-\pi/4+\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$; при $b=1/2$ решение $(1/\sqrt[8]{8};\pi/4+\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$; при $b\neq\pm1/2$ решений нет. **11.** При $a=-1/2$ решение $(\pi/2+\pi k;1/\sqrt[6]{2})$, $k\in\mathbb{Z}$; при $a=1/2$ решение $(\pi k;1/\sqrt[6]{2})$, $k\in\mathbb{Z}$; при $a\neq\pm1/2$ решений нет. **12.** $(3;3)$, $(-3;-3)$, $(2\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3};-\sqrt{3})$. **13.** $(x;y)=(-2/3;1)$, $(-1-1/(l-1);l^2+l-1)$, $(-1+1/(l+2);l^2+l-1)$, $l\in\mathbb{Z}$, $l\neq-5,-2,1,4$. **14.** $a\in(-2\sqrt{6}/3;2\sqrt{6}/3)$. **15.** $x=-\sqrt{7/5}$. *Указание*: выделить полный квадрат сначала по переменной z. **16.** $t=1$, $x=-\pi/30+2\pi n/5$, $n\in\mathbb{Z}$. **17.** $a\in(3/2;+\infty)$. *Указание*: ввести обозначение $u=2^x$, $v=2^y$. Вычесть из первого неравенства второе и доказать, что при полученном ограничении на a всегда существует решение. **18.** $a=\pm\sqrt{2}$, $\pm(\sqrt{15}+1)/4$. **19.** При $a=0$, πm, $2\pi n/3$, $m,n\in\mathbb{Z}$; при $a\neq0$ решений нет.

Тренировочные задачи к § 6. **1.** $a\in[-1;1]$. **2.** $a=7$. **3.** Для $1<a<2$, $x\in\in(-\infty;\log_{a-1}2a]\cup[0;+\infty)$, для $a=2$, $x\in[0;+\infty)$, для $a>2$, $x\in[0;\log_{a-1}2a]$. При $a=2+\sqrt{3}$ множество решений промежуток длины 2. **4.** $a\in(1;3]\cup[5;7)$. **5.** $a\in[1;5/2]$. **6.** Для $a\leqslant-3$, $x\in(a+1;0)\cup(-(a+3);+\infty)$, для $a\in(-3;-2)$, $x\in(a+1;-(a+3))\cup(0;+\infty)$, для $a=-2$, $x\in(0;+\infty)$, для $a\in(-2;-1)$, $x\in\in(-(a+3);a+1)\cup(0;+\infty)$, для $a\geqslant-1$, $x\in(-(a+3);0)\cup(a+1;+\infty)$. **7.** Если $a<-2$, $x\in(-\infty;a)\cup(-2;+\infty)$, если $a=-2$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, если $a\in(-2;1/2)$, $x\in(-\infty;-2)\cup(a;+\infty)$, если $a=1/2$, $x\in(-\infty;-2)\cup(1/2;1)\cup(1;+\infty)$, если $a>1/2$, $x\in(-\infty;-2)\cup(a;+\infty)$. **8.** $12\sqrt{2}$. *Указание*: Ввести новые переменные $u=(x+y)^2$, $v=(x-y)^2$. **9.** $a=-1$, $a=\sqrt{2}$. *Указание*: Найти ОДЗ по a для неравенства и для данных значений a решить его. **10.** При $a\leqslant-3/2$, $x\in\in(3;4-1/\sqrt{2}]\cup[1/\sqrt{2};5)$; при $a\in(-3/2;-1)$, $x\in(3;4-1/\sqrt{2}]\cup[4-f_a;4)\cup\cup(4;4+f_a]\cup[4+1/\sqrt{2};5)$; при $a=-1$, $x\in(3;4)\cup(4;5)$; при $a\in(-1;-2/3)$, $x\in(3;4-f_a]\cup[4-1/\sqrt{2};4)\cup(4;4+1/\sqrt{2}]\cup[4+f_a;5)$; при $a\geqslant-2/3$, $x\in\in[4-1/\sqrt{2};4)\cup(4;4+1/\sqrt{2}]$, где $f_a=((2a+3)/(1-a))^{\log_2\sqrt{(1-a)/(2a+3)}}$. **11.** При $a<0$ решений нет, при $a=0$ решение одно $x=-1$, при $a>0$ решения $x=-1\pm\sqrt{a}$. **12.** При $a\leqslant-\sqrt{2}$ решений нет; при $-\sqrt{2}<a<0$, $x\in((-2+\sqrt{4-a^4})/a;(-2-\sqrt{4-a^4})/a)$; при $a=0$, $x\in(0;+\infty)$; при $0<a\leqslant\sqrt{2}$, $x\in(-\infty;(-2-\sqrt{4-a^4})/a)\cup((-2+\sqrt{4-a^4})/a;+\infty)$; при $a>\sqrt{2}$, $x\in(-\infty;+\infty)$. **13.** $\beta=9/16$. **14.** $(1;-2)$; $(-1;-2)$; $(t;2)$, $t\in\mathbb{R}$. **15.** $[3;+\infty)$. **16.** $y\in[5/6;1)\cup(1;3/2]$. *Указание*: записать уравнение, как квадратное (относительно переменной x). **17.** $a=-\sqrt{3}/2$ **18.** $a\in(44-24\sqrt{2};44+24\sqrt{2})$. *Указание*: разделить обе части первого неравенства на 2^{x^2+4y} и затем разложить его на множители. **19.** $a=\pm1/6$, $a=\pm\sqrt{2}/6$. **20.** $a\in[-1-1/\sqrt{2};-1]$, $a=-2$, 0, 1, $1/\sqrt{2}$. **21.** $a=1/3$, $4/3$, $-6/11$, $6/11$, $18/11$.

Тренировочные задачи к § 7. **1.** $(x_1;x_2)=(-3;9)$, $(2;4)$. **2.** $a=-5$, $a==-5/13$. **3.** $x=\pm\sqrt{3}$. **4.** $u=6$; $v=4$. **5.** $a=13$, корни уравнения 2, 6, 18. **6.** При $a=2$, $b=4$, $c=64$.

Тренировочные задачи к § 8. **1.** $a=-2$, $a=1$. **2.** $b=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **3.** $a=0$, $a=2\sin 1$. **4.** $a=3$. **5.** $b=2$. **6.** $b=\operatorname{ctg}1$. **7.** $a=2$, $b=\pi/2+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $a=-2$, $b\in\mathbb{R}$. **8.** $b=\sqrt{2}$. **9.** $b\in(-2;0)$. **10.** $a=\pm1$. **11.** $a=2$. **12.** $a=4/3$. **13.** $a=-3$, $a=-2$. **14.** $a=0$, $b\in(0;1)$. **15.** При $a=1$, $x=-4$. **16.** $a=-4$, 4, 6. **17.** $a=\sqrt{3/2}$.

Тренировочные задачи к § 9. **1.** $a=\pm\sqrt{2}$. **2.** $\alpha=5\pi/6+2\pi l$, $\pi/18+2\pi m$, $13\pi/18+2\pi n$, $l,m,n\in\mathbb{Z}$. **3.** $a=0$, $a=-2/5$. **4.** $a=0$, $a=(3\pm\sqrt{5})/2$. **5.** $b=1/3$. **6.** Если $b=-1/2\sqrt{2}$, то одно решение $(1/\sqrt[8]{5};0;0)$. Если $b=-1/2+\sqrt{3/8}$, то два решения $(1/\sqrt[8]{5};1;\pi/4)$ и $(1/\sqrt[8]{5};-1;-\pi/4)$. **7.** $a=-1/32$, $a=-1/4$. **8.** $b=3$. **9.** $a=2/3$, $a=2$. **10.** $b=-1/4$. **11.** $a=-2$, $a=-1$. *Указание*: решить первое уравнение в системе, а затем с использованием симметрий исследовать и второе уравнение в системе. **12.** $a=-3/2$. **13.** $a=6$. *Указание*: уравнения $f(x)=0$ и $f(1/x)=0$ равносильны. **14.** $a=2$. **15.** $x\in[3\sqrt{2};6]$.

Тренировочные задачи к § 10. 1. $[17;+\infty)$. **2.** $x=-1$. **3.** $x=5/9$. **4.** При $c=-2$, $(x;y)=(11;2)$, при $c\neq-2$ решений нет. **5.** $(x;y)=((2\pi+2)/15;$ $\pm\arcsin\sqrt{(\pi-2)/3}+\pi k)$, $(-(2\pi+4)/15;\pm\arcsin\sqrt{(4-\pi)/3}+\pi m)$, $k,m\in\mathbb{Z}$. **6.** Для $a\in(-1;0)$ решений нет. Для $a=-1$, $a=0$ решение $x=y=1$. Для $a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$ решения $x_1=y_1=2^{2\sqrt{(a^2+a)/2}}$, $x_2=y_2=2^{-2\sqrt{(a^2+a)/2}}$ **7.** $a=1/16$. **8.** $x=\pi/4+\pi n$, $y=\pi/4+\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$; $x=-\pi/4+\pi n$, $y=-\pi/4+\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$. **10.** $a=-2$, $a=-16/3$. *Указание*: использовать неравенство $|z|+|1-z|\geqslant1$. **11.** $x=\pi/4+\pi n/2$, $y=\pi/2+2\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$. **12.** $\pm\pi/6+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **13.** $x=1/2+(1/2)\log_4 3$, $y=1/2-(1/2)\log_4 3$. **14.** $(2\sqrt2/(2\sqrt2-1))$, $(2\sqrt2/(2\sqrt2+1))$. **15.** $b=-\sqrt3$. **16.** $x=0$; $x=\sqrt5a/2$; $x=-\sqrt5a/2$. **17.** -14. **18.** $a\in(-8;4)\cup(7;+\infty)$.

Тренировочные задачи к § 11. 1. $x=1$. **2.** $p\in(-\infty;-11)\cup(5:+\infty)$. **3.** $x=2$. **4.** При $a=0$, $x=-1$, 0, при $a\neq0$, $x=0$. **5.** При $q=-4$, $(1;0)$, при $q=4$, $(-3;0)$. **6.** $p=-2$, $p=1/2$. **7.** Для $a\in(0;4-2\sqrt2]$ минимум равен $\min=-a^2$, а для $a\in(4-2\sqrt2;2)$ минимум равен $\min=8(1-a)$. **8.** $x=-1$, $y=\pm2$. *Указание*: доказать, что выражение в скобках больше нуля. **9.** 3. **10.** $b\in[286624;10^6]\cup[3\cdot10^6;3.125\cdot10^6]$. **11.** $[0;1/2)\cup(1/2;3/4]$. **12.** $a\in[-1/\sqrt{10};1/\sqrt{10}]$. **13.** 0, π, 2π.

Тренировочные задачи к § 12. 1. $\{-\sqrt2\}\cup(-1;1)$. **2.** 2; $3+\sqrt{65}$. **3.** 1. **4.** Наименьшее значение $1/5$, достигается при $a=\pm2/5$, $b=4/5$. **5.** *a*) $a\in(-3;5)$, *b*) $a\in[2-2\sqrt{13};-3]\cup\{5\}$. **6.** $a\in[-6;4]$. **7.** $a\in(-\infty;1/4)\cup(3+\sqrt7;+\infty)$. **8.** $a=5$. **9.** $a\in(-7;5)$. **10.** $a\in(-2;-1)\cup(1;2)$. **11.** $a\in(-\sqrt6;-\sqrt2)\cup(\sqrt2;\sqrt6)$. **12.** $a=2$. **13.** При $a\in(-1;1)$ $(x;y)=((13-a)/2;3x-6+a)$, при $a>7$ $(x;y)=((1-a)/2;-x+6+a)$. **14.** При $a=10$. **15.** $a\in[-2/5;2/3]$. **16.** $a=-5$, -4. **17.** При $a<-4$ общих точек нет, при $a=-4$ $(x;y)=(2;-4)$, при $a>-4$ $(x;y)=(3-\sqrt{5-a};a)$ и $(x;y)=(1+\sqrt{5-a};a)$ **18.** $a=-3/5$, 0, $-8\pm4\sqrt3$, $6\pm4\sqrt2$. **19.** $11\pm7\sqrt2$. **20.** $a\in[-\sqrt{2221}/12;-1/4]\cup[1/4;\sqrt{2221}/12]$. **21.** $a=-7/3$. **22.** $a=-7/2$, $3/2$. **23.** При $a\in(0;1/e)$ шесть решений, при $a=1/e$ четыре решения, при $a\in(1/e;1)$ два решения, при $a\in(1;(53/4)^{8/2401})$ два решения, при $a=(53/4)^{8/2401}$ три решения, при $a\in((53/4)^{8/2401};+\infty)$ четыре решения. **24.** 4; $5\sqrt2-1$; $9-5\sqrt2$. **25.** $a\in(-1;1)\cup[5/4;5)$. **26.** При $a\in(0;1)\cup(1;50^{1/2500})$ два решения, при $a=50^{1/2500}$ три решения, при $a\in(50^{1/2500};e^{1/(2e)})$ четыре решения, при $a>e^{1/(2e)}$ решений нет. **27.** $a\in(1-e^{1/e};2)\cup(2;1+e^{1/e})$. **28.** $a\in(-2\pi/3;-\pi/2)\cup(-\pi/2;-\arccos(3/4))\cup(\arccos(3/4);\pi/2)\cup(\pi/2;2\pi/3)$ (ответ получен из условий $-1/2<\cos a<3/4$, $\cos a\neq0$). **29.** $a\in[-4;-2-\sqrt2]\cup[-2+\sqrt2;0]$. **30.** $a\in[-e^{1/(10e)};0)\cup(0;e^{1/(10e)})$. **31.** $a\in\{-1-\sqrt3\}\cup[-1;1-\sqrt3)\cup(1-\sqrt3;1]$. **32.** $a\in(-e^{1/e};-1)\cup(1;e^{1/e})$. **33.** $a\in(0;1)\cup\{2\}$. **34.** 0, $(9+\sqrt{81+12\pi})/2$. **35.** *a*) $2/\sqrt5$; *b*) $4-4\pi/5$. **36.** $x\in[-3/4-3\pi/2;-\pi+3/2]\cup[-3/2;+\infty)$. **37.** $a\in(-\infty;-1]\cup\{0\}\cup(2;+\infty)$. **38.** $a\in[1;3]$. **39.** $n=19$, $a=0.15$. **40.** $a\in[2;3)\cup(3;4]$. **41.** $a=4$, $\sqrt{45}-3<|b|<\sqrt{45}+3$. **42.** $a=-6-4\sqrt2$, $a=3/5$. **43.** $a\in[\pi-22/5;\pi-8/5)\cup\{\pi-3+\sqrt{74}/5\}$. **44.** $a\in[0;1]$.

Тренировочные задачи к § 13. **1.** $a\in(-1/2;2)$. **2.** -3; 1. **3.** $a_1\in\in(2;2.5)$. *Указание*: написать неравенства для a_1 и d и решить их методом областей. **4.** $9(\pi+1)/2$. **5.** $S=4\pi/3+2\sqrt{3}$. **6.** $P=3\pi/\sqrt{2}+2\sqrt{2}$. **7.** $S=2\pi+7$. **8.** $18\pi-36$. **9.** $[-1;5]$. **10.** $S=15/2$. **11.** -2, 3. **12.** $-5/3$, $-3/2$, -1, 1. **13.** $a\in(-\infty;-6]\cup[6;+\infty)$. **14.** $a\in(3/7;3/2)$. **15.** $p==6$. **16.** $a\in[-6;1-\sqrt{13}]\cup[\sqrt{13}-1;6]$. **17.** $(x-2)^2+(y-5)^2=20$. **18.** $(-1;(1-\sqrt{3})/2)\cup(1;(1+\sqrt{3})/2)$. **19.** При $a\in[0;1)$, $x\in(-\infty;-2)\cup\cup[-2a/(a+1);1-\sqrt{1-a}]\cup[1+\sqrt{1-a};+\infty)$, при $a\geqslant1$, $x\in(-\infty;-2)\cup\cup[-2a/(a+1);+\infty)$. **20.** $(5-2\sqrt{6};8-2\sqrt{6})\cup(5+2\sqrt{6};8+2\sqrt{6})$. **21.** $[1;3]$. **22.** Для $|b|\in[0;1/4]$, $x\in(0;1-4|b|)$, для $|b|\in(1/4;1/2]$, $x\in(1-4|b|;0)$, для $|b|>1/2$, $x\in[-4b^2;0)$. **23.** Если $a=-1$, то $x\in(2;+\infty)$; если $a\in(-1;-1/2)$, то $x\in(1;a+2]\cup(1-a;+\infty)$; если $a=-1/2$, то $x\in(1;3/2)\cup(3/2;+\infty)$; если $a\in(-1/2;0)$, то $x\in(1;1-a)\cup[a+2;+\infty)$; если $a=0$, то $x\in[2;+\infty)$.

Тренировочные задачи к § 14. **1.** $m=0$, $x=3$; $m=\pm1$, $x=\pm(3\pm2\sqrt{2})/2$; $m=\pm2$, $x=(3\pm\sqrt{5})/2$; $m=\pm3$, $x=\pm3/2$. **2.** $m=1$, $n=-1$ и $m=-1$, $n==1$. **3.** 72. *Указание*: упростить выражение и воспользоваться оценкой $|x|<\sqrt{x(x+2)}<|x+1|$. **4.** $-13/3<a\leqslant-19/5$. **5.** $\{(9;9)\}$. **6.** $(4;3)$, $(6;13)$, $(14;5)$. **7.** $(0.8;0.98)$. **8.** $(7k;3k;2k)$, $k\in\mathbb{Z}$. **9.** $m=4$, $n=9$; $m=5$, $n=8$. **10.** $[-3;-2)\cup\{1\}$. **11.** $m=0$, $n=0$. **12.** $x=2$, $y=1$. **13.** $(1;6)$, $(1;7)$, $(2;7)$. **14.** $|a|\in(1;\sqrt{2}]$. **15.** $(0;0)$, $(2;2)$, $(0;3)$, $(3;0)$. **16.** $u=-187$; $v=-819$. **17.** 1984. **18.** $(x;y;z)=(5;4;4)$. **19.** $(0;-2)$, $(-2;0)$, $(0;3)$, $(2;1)$. *Указание*: записать уравнение, как квадратное относительно y (или x) и разложить его на множители (равносильно тому, чтобы решить квадратное уравнение). **20.** $(2;3)$, $(2;-3)$, $(-2;3)$, $(-2;-3)$. **21.** $a=-2$, $b=4,5,\ldots$; $a=-1$, $b=3,4,5,\ldots$. **22.** $a\in\in(5/11;6/13]$.

Тренировочные задачи к § 15. **1.** При любом a $(2a;a)$, $(-2a,-a)$. **2.** 4, 64. **3.** При $a<0$ $x\in(0;-a)\cup(-a;+\infty)$, при $a=0$ решений нет, при $a>0$ $x\in(-\infty;-3a)\cup(-a/3;0)$. **4.** $3\pi^2k^2$. **5.** $a<17\sqrt{6}-6$. **6.** $\left[\frac{17-\sqrt{29}}{2};9\right)$. **7.** $\alpha=3$. **7.** 3. **8.** $\left[\frac{17-\sqrt{29}}{2};9\right)$. **9.** а) $(\pm1;3)$; б) $0<y<\frac{x^2}{12}$ при $x>0$ и $-\frac{x^2}{12}<y<0$ при $x<0$. **10.** 2, $\frac{16}{3}$. **11.** $a\in\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right\}\cup\left[1;\sqrt[4]{2}\right)$. **12.** $a\in[2101608;4000000]\cup\cup[600\cdot10^4;625\cdot10^4]$. **13.** 2, 4. **14.** $(a;b)=(t^2/(|t|+2);t)$, где $t\neq0$; либо $(a;b)=(t^2/(|t|-2);t)$, где $|t|>2$. **15.** При $a=2$, $x=-1/2$ при остальных a решений нет. **16.** При $a=(180+2\sqrt{415})/29$, $x=(217-5\sqrt{415})/29$ при остальных a решений нет. **17.** $a\in[-2;1)\cup(1;4]$. **18.** $b=-1$, $\sqrt{90}-4<|a|<\sqrt{90}+4$. **19.** $\alpha\in(\frac{3}{2};+\infty)$. **21.** $a\in(44-24\sqrt{2};44+24\sqrt{2})$. *Указание*: разделить обе части первого неравенства на 2^{x^2+4y}. **22.** $\arccos((\sqrt{5}-1)/2)$, $\arccos(\sqrt{2}-1)$. **23.** $b\in[-6;6]$. **24.** $\frac{4201}{3600}\pm\frac{\sqrt{601}}{30}$. **25.** $1/3$, -1.

Диагностическая работа 1. 1. При $a<0$, $x\in(-a;+\infty)$, при $a=0$, $x\in\varnothing$, при $a>0$, $x\in(-\infty;-a)$. **2.** $a\in(-\infty;-1/2)\cup[2/3;+\infty]$. **3.** при $a=2/3$, $x=2$, при других a решений нет. **4.** $(x_1;x_2)=(-3;9)$, $(2;4)$. **5.** $a=2/3$, $a=2$. **6.** $p\in(-\infty;-11)\cup(5;+\infty)$. **7.** $a\in[-6;1-\sqrt{13}]\cup[\sqrt{13}-1;6]$

Диагностическая работа 2. 1. При $a<0$, $x\in(-a/2;-a)\cup[-a;+\infty)=(-a/2;+\infty)$, при $a\geqslant 0$, $x\in\varnothing$. **2.** $a=8$. **3.** $a=7$. **4.** $a=0$, $a=2\sin 1$. **5.** $[17;+\infty)$. **6.** $a\in[-6;4]$. **7.** $m=0$, $x=3$; $m=\pm 1$, $x=\pm(3\pm 2\sqrt{2})/2$; $m=\pm 2$, $x=(3\pm\sqrt{5})/2$; $m=\pm 3$, $x=\pm 3/2$.

Диагностическая работа 3. 1. При $a<0$, $x\in(0;-a)$, при $a=0$, $x\in\varnothing$, при $a>0$, $x\in(-a;0)$. **2.** $a\in[2/5;11/2]$. **3.** $a\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **4.** $a=-5$, $a=-5/13$. **5.** $a=\pm\sqrt{2}$. **6.** При $q=-4$, $(1;0)$, при $q=4$, $(-3;0)$. **7.** Для $|b|\in[0;1/4]$, $x\in(0;1-4|b|)$, для $|b|\in(1/4;1/2]$, $x\in(1-4|b|;0)$, для $|b|>1/2$, $x\in[-4b^2;0)$.

Диагностическая работа 4. 1. При $a<0$, $x=(-1+\sqrt{1-4a})/2$; при $a=0$, $x=0,-1$, при $a\in(0;1/4)$, $x=(-1-\sqrt{1+4a})/2$, $x=(-1\pm\sqrt{1-4a})/2$; при $a=1/4$, $x=(-1-\sqrt{2})/2$, $x=-1/2$; при $a>1/4$, $x=(-1-\sqrt{1+4a})/2$. **2.** $b\in[3/4;+\infty)$. **3.** Для $1<a<2$, $x\in(-\infty;\log_{a-1}2a]\cup[0;+\infty)$, для $a=2$, $x\in[0;+\infty)$, для $a>2$, $x\in[0;\log_{a-1}2a]$. При $a=2+\sqrt{3}$ множество решений — промежуток длины 2. **4.** $a=\pm 1$. **5.** $a=1/16$. **6.** $a\in(-7;5)$. **7.** $-13/3<a\leqslant-19/5$.

Диагностическая работа 5. 1. При $a<1$, $x\in(a;(a+1)/2)\cup(1;+\infty)$, при $a=1$, $x\in(1;+\infty)$, при $a>1$, $x\in(1;(a+1)/2)\cup(a;+\infty)$. **2.** $a\in[-6;2]$. **3.** $x=-1$, $-1+\pi/2+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **4.** $x=\pm\sqrt{3}$. **5.** $a=5\pi/6+2\pi l$, $\pi/18+2\pi m$, $13\pi/18+2\pi n$, $l,m,n\in\mathbb{Z}$. **6.** Для $a\in(0;4-2\sqrt{2}]$ минимум равен $\min=-a^2$, а для $a\in(4-2\sqrt{2};2)$ минимум равен $\min=8(1-a)$. **7.** Для $a\in(-1;0)$ решений нет. $x\in(2;+\infty)$, при $a=-1$; $x\in(1;a+2]\cup(1-a;+\infty)$, при $-1<a<-1/2$; $x\in(1;3/2)\cup(3/2;+\infty)$, при $a=-1/2$; $x\in(1;1-a)\cup[a+2;+\infty)$, при $-1/2<a<0$; $x\in[2;+\infty)$, при $a=0$.

Диагностическая работа 6. 1. Уравнение: 1) не имет бесконечного множества решений ни при каком значении a, 2) при $a\in(-\infty;-8)\cup(0;+\infty)$ не имеет решений. **2.** $a\in(-\infty;1]\cup\{5/4\}\cup[4/3:+\infty)$. **3.** Для $a\leqslant-3$, $x\in(a+1;0)\cup(-(a+3);+\infty)$, для $a\in(-3;-2)$, $x\in(a+1;-(a+3))\cup(0;+\infty)$, для $a=-2$, $x\in(0;+\infty)$, для $a\in(-2;-1)$, $x\in(-(a+3);a+1)\cup(0;+\infty)$, для $a\geqslant-1$, $x\in(-(a+3);0)\cup(a+1;+\infty)$. **4.** $b=\sqrt{2}$. **5.** $b=-\sqrt{3}$. **6.** $a\in[1;3]$. **7.** $m=0$, $n=0$.

Задачи для самостоятельного решения. 1. $\alpha\in[5\pi/4;7\pi/4]$. **2.** $a=\dfrac{15-\sqrt{57}}{16}$; $a=15/8$. **3.** $a=1$, $(x;y)=(0;1)$. **4.** При $a=\pm\arccos(-2/\sqrt{7})+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, $x=-\pi/6+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; при $a=(-1)^m\arcsin(-\sqrt{3/7})+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$,

$x=-5\pi/6+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; при других значениях a решений нет. **5.** $a=-3$; $a=1$. **6.** $-1/3$, $-5/3$, ± 1, $\pm\sqrt{3}$. **7.** $a=0$; $a=-3/4$. **8.** $a\in(-5;-\sqrt{24})\cup(-\sqrt{24};-3)$. **9.** При $a=2$, $x=3/2$ при остальных a решений нет. **10.** $\dfrac{3641}{3136}\pm\dfrac{\sqrt{505}}{28}$. **11.** $1/3$, -2. **12.** $a\in[-5;5]$. **13.** $a\in[-1;3)\cup(3;7]$. **14.** При $a=(70-6\sqrt{87})/13$, $x=9\cdot(\sqrt{87}-3)/13$ при остальных a решений нет. **15.** $\arcsin((\sqrt{5}-1)/2)$, $\arcsin(\sqrt{2}-1)$. **16.** $a\in(92-8\sqrt{13};92+8\sqrt{13})$. **17.** $a\in(15/2;8)\cup(12;+\infty)$. **18.** $a\in[-1;2)$. **19.** $a=\pm 1/6$, $\pm\sqrt{2}/6$. **20.** $a\in(-\infty;-3)\cup(1;6)$. **21.** $a\in[-12/5;0]$. **22.** $a=0$. **23.** При $a=b=-2$. **24.** При $b=-1/3$, $x=0$. **25.** $a\in[-1;1/3]$. **26.** $-4/3$, 2. **27.** $a\in(-2\pi/3;-\pi/2)\cup(-\pi/2;-\arccos(3/4))\cup(\arccos(3/4);\pi/2)\cup(\pi/2;2\pi/3)$. **28.** $(4-\sqrt{14};6-\sqrt{14})\cup(7+\sqrt{2};6+\sqrt{14})$. **29.** $a=0$, $a\leqslant -1/2$. **30.** $x=\pi n$, $y=\pi n-1$, $n\in\mathbb{Z}$. *Указание*: перейти к переменной $t=\operatorname{tg}x$ и исследовать подкоренное выражение. **31.** $(1/4;1/2)\cup\{1\}\cup(3/2;4]$. **32.** $(-1/3;3/10]\cup\{1\}$. **33.** $(-13/30;-3/10)\cup(11/30;1/2]$. **34.** $-\pi/3$; 0; $\pi/3$. **35.** $a\in[0;1)\cup(1;2]\cup\{3\}$. *Указание*: представить уравнение в виде $A\cos 2x+B\sin 2x=-B\cos x+A\sin x$ и решить при помощи введения вспомогательного аргумента (одного угла φ для выражений в разных частях уравнения). **36.** $\alpha=2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. *Указание*: уравнение по $\cos x$ является кубическим, поэтому расположение корней задаётся однозначно. **37.** $9/2$, $117/4$. **38.** 0, 1. **39.** $a=2$; $a=4$. **40.** $a=-2$; $a=-1$. **41.** $a=-1$; $b=1$. **42.** При $a=-3$, $(x;y)=(13;12)$, при $a\neq-3$ решений нет. **43.** Если $a\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$, то $(x;y)=(5^{3\sqrt{a^2-2a}/2};5^{-3\sqrt{a^2-2a}/2})$; $(x;y)=(5^{-3\sqrt{a^2-2a}/2};5^{3\sqrt{a^2-2a}/2})$; если $a=0$ или $a=2$, то $(x;y)=(1;1)$; если $a\in(0;2)$, то решений нет. **44.** $-\sqrt{3}$. **45.** 7. **46.** $x=1/3+(2/3)\log_3 2$, $y=1/2-(1/4)\log_2 3$. **47.** $b=1/9$. **48.** $a\in(-\infty;-2]$. **49.** $a=-42$.

Литература

Для прохождения школьного курса математики необходим комплект школьных учебников, желательно из федерального комплекта, утвержденного Министерством образования РФ. При этом для подготовки к ЕГЭ, кроме учебников по математике, предназначенных для 10—11 классов, нужны также учебники по планиметрии для 7—9 классов и по алгебре для 8—9 классов.

Кроме учебников, особенно для изучения приемов решения задач с параметрами, рекомендуем использовать проверенные временем методические пособия, задачники по элементарной математике, сборники конкурсных задач по математике. Вот некоторые из них.

1) Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Под ред. *М. И. Сканави*. — М.: Высшая школа, 1998.

2) *Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х.* Математика для поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 1976.

3) *Шабунин М. И.* Математика для поступающих в вузы. — М.: Лаборатория базовых знаний, 1999.

4) *Шарыгин И. Ф.* Решение задач. — М.: Просвещение, 1994.

5) *Шарыгин И. Ф., Голубев В. И.* Факультативный курс по математике. Решение задач. — М.: Просвещение, 1991.

6) *Голубев В. И.* Решение сложных и нестандартных задач по математике. — М.: ИЛЕКСА, 2007.

7) *Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф.* Сборник конкурсных задач по математике. — М.: Наука, 1986.

8) *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Задачи вступительных экзаменов по математике. — М.: Факториал, 1995.

9) *Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И.* Подготовка к ЕГЭ по математике. 2010. — М.: МЦНМО, 2009.

10) *Ященко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И.* Математика. ЕГЭ. Тематическая рабочая тетрадь. — М.: Экзамен, 2010.

11) Математика. Сборник тренировочных работ. Под ред. *А. Л. Семенова* и *И. В. Ященко*. — М.: МЦНМО, 2009.

12) Математика. ЕГЭ—2010. Типовые тестовые задания. Под ред. *А. Л. Семенова* и *И. В. Ященко*. — М.: Экзамен, 2009.

13) Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ—2010. Математика. Под ред. *А. Л. Семенова* и *И. В. Ященко*. — М.: Астрель, 2009.

14) *Панферов В. С., Сергеев И. Н.* Отличник ЕГЭ. Математика. Решение сложных задач. — ФИПИ; М.: Интеллект-Центр, 2010.

15) *Козко А. И., Чирский В. Г.* Задачи с параметром и другие сложные задачи. — М.: МЦНМО, 2008.

16) *Козко А. И., Макаров Ю. Н., Чирский В. Г.* Математика. Письменный экзамен. Решение задач. Методы и идеи: Учебное пособие. — М.: Экзамен, 2007.

17) *Сергеев И. Н.* ЕГЭ. Математика: Задания типа С. Методы решения экзаменационных задач типа С. Обучающие комментарии к решениям. Разбор требований к оформлению решений. Критерии оценки выполнения заданий. — М.: Экзамен, 2009.

18) *Кочагин В. В., Кочагина М. Н.* ЕГЭ—2009. Математика. Сборник заданий. — Эксмо, 2009.

19) *Мельников И. И., Сергеев И. Н.* Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. — 1990.

20) *Ткачук В. В.* Математика абитуриенту. — М.: МЦНМО, 2007.

21) *Сергеев И. Н.* Математика: задачи с ответами и решениями. Учебное пособие для поступающих в вузы. — Высшая школа КД Университет, 2003.

22) *Амелькин В. В., Рабцевич В. Л.* Задачи с параметрами. — Минск, «Асар», 1996

23) *Горнштейн П. И., Полонский В. Б., Якир М. С.* Задачи с параметрами. — Киев, «Евроиндекс», 1995.

Мы не считаем, что все перечисленные пособия должны находиться в личной библиотеке абитуриента, да это и невозможно. Однако каждая из них по-своему полезна и найдет своего благодарного читателя.

Оглавление

Предисловие . . . 3
Введение . . . 5
Подготовительные задачи . . . 8
Диагностическая работа . . . 11
§ 1. Простейшие уравнения и неравенства с параметром . . . 13
Тренировочные задачи к § 1 . . . 19
§ 2. Простейшие задачи с модулем . . . 23
Тренировочные задачи к § 2 . . . 27
§ 3. Параметр как переменная . . . 29
Тренировочные задачи к § 3 . . . 33
§ 4. Задачи, сводящиеся к исследованию квадратного уравнения 34
Тренировочные задачи к § 4 . . . 41
§ 5. Выделение неотрицательных выражений . . . 43
Тренировочные задачи к § 5 . . . 45
§ 6. Разложение на множители . . . 48
Тренировочные задачи к § 6 . . . 52
§ 7. Теорема Виета для уравнений третьей степени . . . 55
Тренировочные задачи к § 7 . . . 60
§ 8. Задачи на исследование количества решений . . . 61
Тренировочные задачи к § 8 . . . 65
§ 9. Задачи с использованием симметрий . . . 68
Тренировочные задачи к § 9 . . . 74
§ 10. Задачи с применением некоторых неравенств . . . 77
Тренировочные задачи к § 10 . . . 82
§ 11. Использование экстремальных значений функций . . . 85
Тренировочные задачи к § 11 . . . 88
§ 12. Решение задач при помощи графика . . . 90
Тренировочные задачи к § 12 . . . 115
§ 13. Метод областей . . . 121

Тренировочные задачи к § 13 128
§ 14. Задачи на целые числа 131
Тренировочные задачи к § 14 136
§ 15. Системы уравнений и неравенств 139
Тренировочные задачи к § 15 147
Диагностическая работа 1 152
Диагностическая работа 2 153
Диагностическая работа 3 154
Диагностическая работа 4 155
Диагностическая работа 5 156
Диагностическая работа 6 157
Задачи для самостоятельного решения 158
Ответы 165
Литература 173